

¿Cómo calculas la superficie de tu campo ?

Isabel SOTO CORNEJO et Nicolas ROUCHE

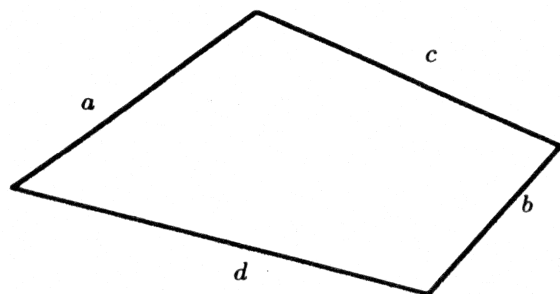
CIDE, Chile et Université de Louvain, Belgique.

La grande plaine agricole du Chili s'étend tout en longueur dans la direction nord-sud entre l'importante Cordillère des Andes qui la domine de toute la hauteur de ses gigantesques sommets et la Cordillère Côtière, plus modeste, qui court parallèlement à l'Océan Pacifique. Au pied de cette dernière, dans une région qui s'appelle Melipilla (prononcez "mélipilia"), l'un des auteurs de cet article (devinez lequel ...) a demandé à trois paysans, Joel, Luis et Santiago, de lui expliquer comment ils mesurent les champs. C'est de leur réponse qu'il est question ici.

Dans d'autres régions, par exemple celle de Cunco Mocún à 800 km plus au sud, on mesure les champs en sacs de semences : on dit par exemple, ce champ vaut un sac et demi de blé, ou un sac de pommes de terre. A Melipilla par contre, lorsque le champ est rectangulaire, on multiplie la longueur par la largeur, et les paysans, bien que n'ayant fréquenté l'école que très peu, voire pas du tout, connaissent bien les unités de mesure et se représentent parfaitement un hectare comme un carré de 100 m de côté et de 10 000 m².

Mais les champs sont rarement rectangulaires et c'est là que les choses se compliquent. Lorsqu'un champ a la forme d'un quadrilatère irrégulier, les paysans disent "qu'il faut le quarrer" ("hay que cuadrarlo"), ce qui nous fait souvenir de nos bonnes vieilles quadratures. "Quarrer" veut dire pour eux arranger la forme du quadrilatère en enlevant un triangle ici ou là pour le remettre ailleurs de manière à arriver à une forme rectangulaire. Mais il s'agit là d'une procédure seulement imaginée. Car pour le calcul réel, ils disent que le rectangle qu'on obtiendrait aurait pour côtés les deux moyennes des côtés opposés (nous écrivons *côté* pour faire court : lisez *longueur de côté*).

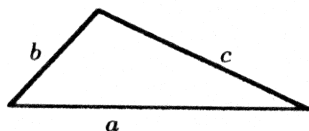
Et donc (voir figure 1), ils calculent l'aire en multipliant les moyennes des côtés opposés.



Formule proposée pour l'aire : $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}$

Figure 1

Lorsqu'on lui a demandé "Comment faites-vous pour un champ triangulaire?", l'un d'eux (Joel) a répondu comme le montre la figure 2, considérant le triangle comme un quadrilatère avec un côté nul.



Formule proposée pour l'aire : $\frac{a+0}{2} \cdot \frac{b+c}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{b+c}{2}$

Figure 2

Nous proposons que le lecteur, avant d'aller plus loin, réfléchisse à la situation.

ESPACE EXTENSIBLE RESERVE
A LA REFLEXION DU LECTEUR

Voici maintenant quelques questions et réponses que nous avons trouvées ou glanées à gauche et à droite.

1. La formule est-elle parfois correcte?

Mais oui, par exemple pour les rectangles (mais c'est précisément là qu'elle s'avère peu utile...).

2. Peut-on trouver facilement des cas où elle est fausse?

Elle est fausse pour les triangles (figure 2), mais aussi pour tous les parallélogrammes non rectangulaires. D'ailleurs, si elle est vraie pour un quadrilatère donné, on peut presque considérer que c'est un effet du hasard. En effet, comme le rappelle la figure 3, un quadrilatère de côtés donnés est déformable, et son aire change selon la déformation qu'on lui fait subir. Sur la figure 3, les nombres inscrits près des côtés sont des longueurs.

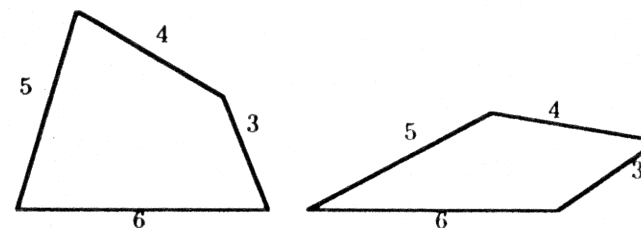


Figure 3

3. Quels sont tous les cas où la formule est fausse?

La figure 4 montre deux copies d'un quadrilatère, chacune divisée en deux triangles.

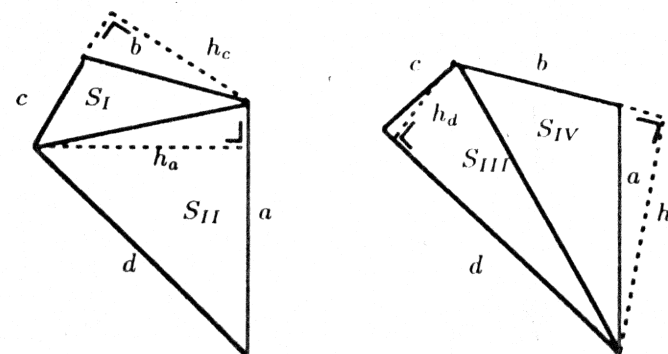


Figure 4

Si S , S_I , S_{II} , S_{III} et S_{IV} désignent respectivement les aires du quadrilatère et des quatre triangles, on a successivement

$$S = S_I + S_{II} = \frac{ch_c}{2} + \frac{ah_a}{2} \leq \frac{cb}{2} + \frac{ad}{2}$$

et

$$S = S_{III} + S_{IV} = \frac{dh_d}{2} + \frac{bh_b}{2} \leq \frac{dc}{2} + \frac{ab}{2}.$$

On tire de là que

$$2S \leq \frac{cb}{2} + \frac{ad}{2} + \frac{dc}{2} + \frac{ab}{2},$$

ce qui s'écrit encore

$$S \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}.$$

On n'obtient l'égalité que lorsque tous les angles du quadrilatère sont droits. Donc la formule des paysans donne toujours une aire trop grande, sauf dans le cas des rectangles où elle est juste.

La démonstration ne s'appuie que sur la géométrie élémentaire du triangle et sur l'astuce consistant à décomposer le quadrilatère de deux façons.

Voici une manière trigonométrique de faire la preuve. Avec les notations de la figure 5, on a

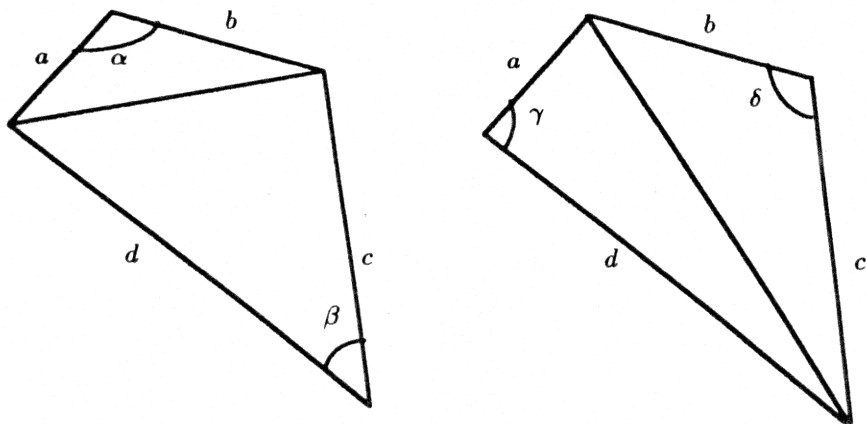


Figure 5

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha + \frac{1}{2}cd \sin \beta$$

$$S = \frac{1}{2}ad \sin \gamma + \frac{1}{2}bc \sin \delta$$

Tous les sinus sont positifs, puisque les quatre angles sont compris entre 0 et π (on ne considère ici que les quadrilatères convexes). On a donc

$$2S \leq \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2} + \frac{ad}{2} + \frac{bc}{2}$$

et enfin comme ci-dessus

$$S \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

avec l'égalité si et seulement si les quatre angles sont droits.

Voici une solution originale découverte, lors d'une matinée de formation continue, par une équipe de professeurs du Collège Saint-Hubert de Bruxelles.

On peut toujours accoler quatre copies isométriques d'un quadrilatère comme le montre la figure 6.

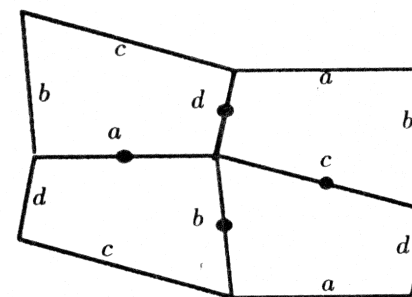


Figure 6

Cette figure se construit comme ceci : on passe d'un premier quadrilatère à un second par une symétrie centrale autour du milieu d'un des côtés. On en construit un troisième par une symétrie centrale analogue, et de même pour le quatrième et dernier. La figure "se referme" exactement, puisque la somme des angles d'un quadrilatère est un angle plein. Ce résultat n'étonnera pas le lecteur s'il sait qu'on peut paver le plan avec des copies isométriques d'un quadrilatère donné quelconque.

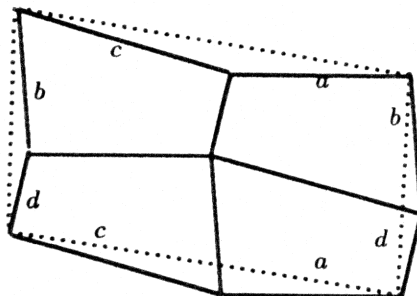


Figure 7

Les propriétés élémentaires des symétries centrales montrent alors que le quadrilatère en trait interrompu de la figure 7 est un parallélogramme. L'aire de celui-ci égale 4 fois celle du quadrilatère donné. On a donc

$$4S \leq (a + c) \cdot (b + d).$$

D'où la preuve cherchée.

Y para terminar ; Muchas gracias a Joel, Luis y Santiago !

Adresse des auteurs :

Isabelle SOTO CORNEJO

CIDE (Centro de Investigación y Desarrollo de la Educación)
Santiago, Chile

Nicolas ROUCHE

Département de Mathématiques,
Université de Louvain, Belgique