De la Fraction au Nombre

A. CHEVALIER et C. DOCQ, *GEM — UCL*

2e partie : les engrenages dans les vélos.

Mots clés : fraction, rapport, engrenage.

Chaque histoire personnelle de l'apprentissage des fractions commence tôt, avec les premières expériences concrètes de partage. Elle se poursuit longtemps, jusqu'à l'acquisition du concept de nombre, en passant par la découverte de diverses facettes des fractions et des opérations.

Le Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM) a préparé quelques séquences d'activités qui jalonnent cet apprentissage. Dans cet article, nous vous en proposons une, destinée à des élèves du premier degré et qui amène à réfléchir sur le fonctionnement d'un dérailleur ([1]).

La première partie contient la description des activités proposées aux élèves et la seconde propose les solutions et les commentaires épistémologiques pointant les différentes facettes du concept de fraction à l'oeuvre.

Activités.

1. Dans la salle, il y a deux vélos dont un avec trois plateaux à l'avant et six à l'arrière (vélo vert) et un autre avec un plateau à l'avant et six à l'arrière (vélo gris) ([2]). Nous indiquons au tableau la réflexion suivante :

« Tous ces plateaux, c'est du bluff »

2. Voici deux représentations qui peuvent vous aider : ([3])

([0]) Adresses des auteurs : Anne Chevalier, rue de l'eau vive, 15, 1420 Braine l'Alleud, e-mail : a_chev@encbw.be, Christine Docq, drève du bonheur, 16 , 1150 - Bruxelles, christine.docq@brutele.be

([1]) L'activité décrite dans cet article a fait l'objet d'un atelier au Congrès annuel en août 2000 à Seraing.

([2]) Il va de soi qu'il faut adapter cette séquence aux vélos disponibles.

([3]) Cette représentation n'est fournie qu'au moment où les participants manisfestent le besoin de compter le nombre de dents de chaque roue.

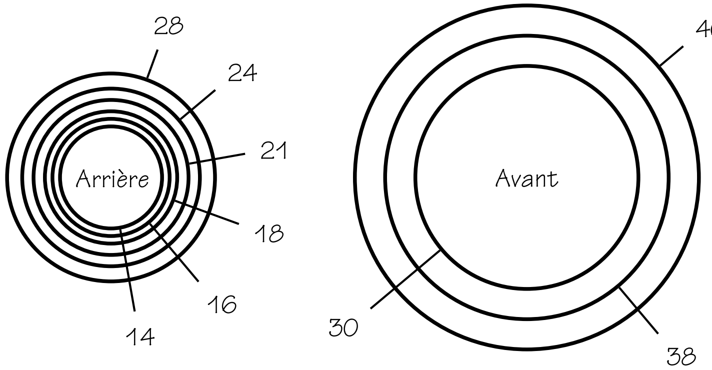

Fig. 1 : Schéma du vélo vert.

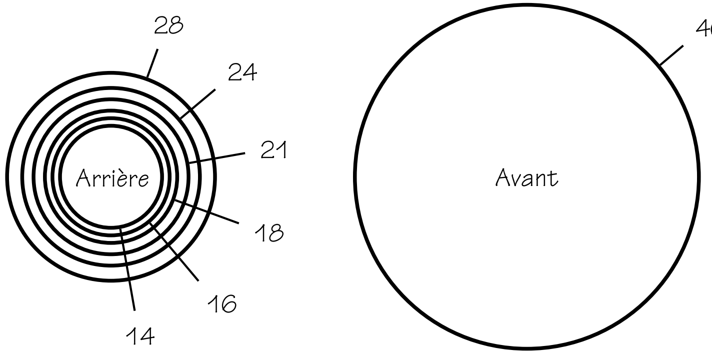

Fig. 2 : Schéma du vélo gris.

Solutions et commentaires.

1. Les élèves sont invités à former des petits groupes, à s'approcher des vélos, à les observer, les manipuler afin de réagir le plus objectivement possible à la phrase écrite au tableau. Pour certains, c'est déjà une découverte de constater le nombre de plateaux différents et d'observer que ceux de devant sont plus grands que ceux de derrière. Pour avancer dans la réflexion, il faut fixer son attention sur une association possible d'un plateau avant et d'un plateau arrière et essayer de

comprendre ou observer ce qui se passe quand on se met à tourner le pédalier. Certains peuvent essayer concrètement en mesurant la distance parcourue au sol par tour de pédale (appelée développement), d'autres vont calculer ce développement à partir du diamètre de la roue et du nombre de dents des plateaux. C'est le moment de fournir les informations relatives au nombre de dents des plateaux des deux vélos.

2. Pour comprendre le fonctionnement d'un dérailleur, il faut passer par les observations suivantes :

   - les dents des plateaux avant et arrière ont la même forme et la même taille quel que soit leur diamètre de façon à pouvoir s'emboîter dans les maillons d'une même chaîne ;
   - lorsque le plateau du pédalier fait un tour :
     - il tourne d'un certain nombre de dents d_A et le plateau entrainé tourne du même nombre de dents d_A ;
     - le nombre de tours réalisés par le plateau arrière dépend aussi du nombre de dents d_B de la roue arrière. Il est d'autant plus élevé que d_B est petit et que d_A est grand.

   Considérons le cas particulier où $d_A = 30$ et $d_B = 14$.

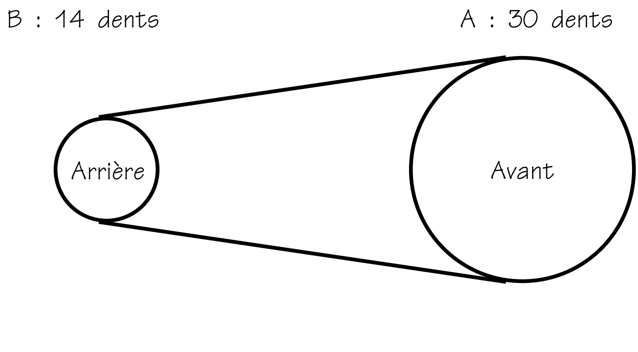

Fig. 3 : Cas particulier.

Pendant que le plateau avant réalise un tour complet, 30 dents sont engrenées. Puisque qu'une chaîne relie les deux roues, un même nombre de dents sont engrenées au plateau arrière, ce qui fait tourner le plateau arrière de 2 tours et $\frac{2}{14}$ de tour, qui correspond à $\frac{30}{14}$ de tours.

Ce raisonnement permet de conclure que chaque fois que le plateau du pédalier fait un tour, le plateau arrière fait un nombre de tours égal à $\frac{d_A}{d_B}$ qui n'est évidemment pas toujours entier. Le plateau arrière étant lié à la roue arrière, celle-ci réalise donc ce même nombre de tours.

Par tour de pédalier, on avance d'une distance d'autant plus grande que :

- le rapport $\frac{d_A}{d_B}$ est élevé ;
- le diamètre de la roue arrière du vélo est grand.

Pour connaître toutes les possibilités qui sont offertes pour un vélo donné, il faut envisager tous les rapports possibles. Les cyclistes parlent de « braquets ([4]) » ou de « vitesses ([5]) » à propos de ces rapports. Le tableau ci-dessous reprend ces différents rapports pour le vélo vert. Remarquons que toutes les possibilités du vélo gris se retrouvent dans la dernière colonne.

d_A ▶ d_B ▼	30	38	46
14	$\frac{30}{14} = \frac{15}{7}$	$\frac{38}{14} = \frac{19}{7}$	$\frac{46}{14} = \frac{23}{7}$
16	$\frac{30}{16} = \frac{15}{8}$	$\frac{38}{16} = \frac{19}{8}$	$\frac{46}{16} = \frac{23}{8}$
18	$\frac{30}{18} = \frac{5}{3}$	$\frac{38}{18} = \frac{19}{9}$	$\frac{46}{18} = \frac{23}{9}$
21	$\frac{30}{21} = \frac{10}{7}$	$\frac{38}{21}$	$\frac{46}{21}$
24	$\frac{30}{24} = \frac{5}{4}$	$\frac{38}{24} = \frac{19}{12}$	$\frac{46}{24} = \frac{23}{12}$
28	$\frac{30}{28} = \frac{15}{14}$	$\frac{38}{28} = \frac{19}{14}$	$\frac{46}{28} = \frac{23}{14}$

([4]) On peut s'étonner du fait que, dans les médias, les braquets soient présentés sous forme de produit $d_A \times d_B$ au lieu de rapport $\frac{d_A}{d_B}$

([5]) Le terme est mal choisi dans la mesure où il n'est pas question ici de distance parcourue par unité de temps.

Pour analyser un tel tableau , il faut comparer et ordonner ces différents rapports qui sont ici tous fractionnaires.

Le plus petit rapport est celui qu'on obtient en choisissant le plus petit numérateur et le plus grand dénominateur c.-à-d. $\frac{30}{28}$; tandis que *le plus grand s'obtient à partir du plus grand numérateur et du plus petit dénominateur c.-à-d.*$\frac{46}{14}$.

La classification par ordre croissant des rapports $\frac{d_A}{d_B}$ est la suivante :

$$\frac{15}{14}, \frac{5}{4}, \frac{19}{14}, \frac{10}{7}, \frac{19}{12}, \frac{23}{14}, \frac{5}{3}, \frac{38}{21}, \frac{15}{8}, \frac{23}{12}, \frac{19}{9}, \frac{15}{7}, \frac{46}{21}, \frac{19}{8}, \frac{23}{9}, \frac{19}{7}, \frac{23}{8}, \frac{23}{7}$$

Pour procéder à cette mise en ordre des différents rapports, il faut comparer les rapports deux par deux.

Toutes les fractions d'une même colonne ont même numérateur. La plus petite aura le plus grand dénominateur. Elles s'ordonnent par ordre décroissant de dénominateur.
Toutes les fractions d'une même ligne ont même dénominateur. La plus petite aura le plus petit numérateur. Elles s'ordonnent par ordre croissant de numérateur.

Malheureusement (pour les élèves!) l'ordre de toutes ces fractions ne correspond ni à celui des colonnes, ni à celui des lignes. On est donc amené à comparer des fractions n'ayant ni même numérateur, ni même dénominateur. Plusieurs techniques sont possibles :

- *On réduit facilement au même dénominateur :*
  $\frac{10}{7}$ et $\frac{19}{14}$ correspondent à $\frac{20}{14}$ et $\frac{19}{14}$. Donc, $\frac{10}{7} > \frac{19}{14}$.
- *On décompose les fractions à partir d'un entier proche :*
  $\frac{19}{8}$ et $\frac{23}{9}$ correspondent à $\frac{19}{8} = 2 + \frac{3}{8}$ et $\frac{23}{9} = 2 + \frac{5}{9}$.
  Or $\frac{3}{8} < \frac{1}{2}$ et $\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$, donc $\frac{19}{8} < \frac{23}{9}$.

  $\frac{23}{14}$ et $\frac{5}{3}$ correspondent à $\frac{23}{14} = 2 - \frac{5}{14}$ et $\frac{5}{3} = 2 - \frac{1}{3}$.
  Or $\frac{5}{14} > \frac{1}{3}$, donc $\frac{23}{14} < \frac{5}{3}$.

La succession des 18 rapports sous forme de fractions permet difficilement de cerner leurs positions relatives. A ce stade, on est amené *à exprimer ces rapports à l'aide de nombres décimaux.*
Les situer sur trois droites graduées (une par plateau, placée l'une en dessous de l'autre) peut aussi aider à visualiser les positions relatives des rapports.

Les questions suivantes permettent de poursuivre la réflexion à propos du fonctionnement d'un vélo avec différents plateaux.

- Pour mieux se rendre compte des variations des « vitesses », calculez le rapport entre la plus grande et la plus petite, calculez les écarts absolus et relatifs d'une « vitesse » à l'autre.
- Un vendeur donne le conseil d'utilisation suivant : « Associez le grand plateau avant avec les trois plus petits plateaux arrière, le plateau du milieu avec les quatre plateaux du milieu à l'arrière et le petit plateau avant avec les trois grands plateaux arrière ». Comment ce conseil se justifie-t-il d'un point de vue technique ? De cette façon, nos dix-huit « vitesses » annoncées se réduisent à dix. Est-ce vraiment grave ? (Pour y voir plus clair, on peut barrer sur la droite graduée les « vitesses » dont on n'a pas usage.)
- Comment se passent les changements de « vitesse » en pratique ? Passe-t-on toujours d'une « vitesse » à celle qui lui est directement supérieure ou inférieure ?
- Pour chacune de ces « vitesses », calculez la distance parcoure en un tour de pédale (appelée « développement »).

Prolongation possible.

Pour donner suite au travail sur les engrenages relatifs aux vélos, on peut s'intéresser à des successions d'engrenages qui comprennent entre autre des roues solidaires.

Dans un premier temps, on propose aux élèves de découvrir et de comprendre le fonctionnement d'une association de quelques engrenages simples montés à partir d'une boîte de jeux ([6]).

Ensuite, on montre aux élèves des horloges mécaniques sous forme de jeu à construire « Horloge 2000 ([7]) » et on leur pose les questions suivantes :

– *Comment peut-on expliquer que l'aiguille des heures et celle des minutes tournent correctement ?*
– *Quelle est la période (temps d'aller-retour) du balancier ?*

([6]) QUERCETTI, Intelligent toys 3D Gears.
([7]) réf. 2085000, JOUSTRA 67 402 ILLKIRCH CEDEX.

Conclusion

Cette séquence sur les engrenages met en oeuvre des fractions dans des situations où elles apparaissent naturellement comme des rapports. Néanmoins, lorsqu'il s'agit de comparer ces rapports, il est plus facile de les considérer comme des nombres écrits sous forme décimale. L'intérêt des situations relatives aux enchaînements d'engrenages, c'est qu'elles amènent des produits de fractions.

Nous espérons avoir pu vous éclairer sur quelques possibilités de travailler les fractions (et les opérations qui y sont liées) avec des élèves du premier degré dans des contextes variés et porteurs de sens.

★ ★ ★

Déterminez le réalisant (ρ) de l'équation suivante :

$$0,1x^2 - 6,36x + 0,27425 = 0$$

Attention, la traduction des énoncés mathématiques peut parfois prendre des formes étranges. Ainsi l'équation posée se traduit

en allemand	$0,01x^2 - 1,4x + 0,10425 = 0$
en autrichien	$0,01x^2 - 3,71x + 0,095 = 0$
en espagnol	$0,1x^2 - 12,9x + 0,06 = 0$
en français	$0,01x^2 - 2,57x + 1,13325 = 0$
en finlandais	$0,01x^2 - 2,44x + 0,19675 = 0$
en grec	$0,01x^2 - 18,46x + 0,54 = 0$
en irlandais	$0,01x^2 - 0,89x + 0,1134 = 0$
en italien	$x^2 - 44,1x + 2,135 = 0$
en néerlandais	$0,01x^2 - 1,49x + 0,40975 = 0$
en portugais	$0,01x^2 - 14,16x + 0,59 = 0$

Il est impossible de traduire ce problème en anglais, en suédois ou en danois.

(Aimablement communiqué par Michel Coyette de Rixensart.)

$\rho_{belge} = 40,3399$, $\rho_{allemand} = 1,95583$, $\rho_{autrichien} = 13,7603$, $\rho_{espagnol} = 166,386$
$\rho_{francais} = 6,55957$, $\rho_{finlandais} = 5,94573$, $\rho_{grec} = 340,75$, $\rho_{irlandais} = 0,787564$
$\rho_{italien} = 1936,27$, $\rho_{neerlandais} = 2,20371$, $\rho_{portugais} = 200,482$