De la géométrie synthétique à la géométrie analytique

20 janvier 2010

Table des matières

1 Introduction

En cinquième année, le produit scalaire des vecteurs du plan et de l'espace permet d'aborder des questions de distance, d'orthogonalité et de mesure d'angle. C'est la raison pour laquelle le point de vue vectoriel gagne à être associé au point de vue synthétique. En sixième année, la géométrie analytique ou vectorielle des plans et des droites, et son interprétation en termes de systèmes d'équations linéaires achève, avec les mots de Sophie Germain, de mettre en valeur que « l'algèbre est la géométrie écrite et la géométrie est de l'algèbre visuelle ».[1]

Percevoir des situations spatiales est une réelle difficulté pour un certain nombre d'élèves qui ne « ne voient pas dans l'espace ». C'est peut-être une des raisons pour lesquelles le cours de géométrie dans l'espace est parfois pratiquement réduit à un cours d'algèbre. Pourtant, il paraît dommage que cer-

[1] extrait du programme de la FESEC

taines notions importantes, comme la perpendicularité par exemple, soient traitées directement en analytique, avec peu ou pas de contenu synthétique.

Notre intention est de confronter le plus possible l'élève avec la visualisation à trois dimensions des situations proposées. Pour cela, nous commençons par des situations où les objets étudiés sont dans des positions privilégiées : les perceptions et les intuitions spatiales sont plus aisées quand les objets sont « bien positionnés » par rapport aux directions verticale et horizontale. Ensuite, nous mettons en évidence ce qu'apporte l'écriture vectorielle. Nous veillons à maintenir le lien avec la géométrie synthétique même après que l'outil vectoriel ait été installé. Enfin, nous traitons l'essentiel de la géométrie analytique de l'espace.

Ce projet, conçu pour le cours de mathématiques 4 périodes/semaine, est à développer de manière plus ou moins approfondie par le professeur en fonction du niveau de sa classe. Il peut aussi servir de point de départ pour un cours de 6 périodes/semaine, complété par exemple par du calcul matriciel.

Ce travail est initialement inspiré par les idées et la pratique en classe de Mariza Krysinska. Que ce soit par leur réflexion d'une année en sous-groupe du GEM, par leur expérimentation en classe ou leur rôle dans la rédaction et la confection des nombreuses illustrations particulièrement minutieuses à réaliser, d'autres enseignants ont contribué à ce travail. Qu'ils en soient remerciés : Anne Bélanger, François Bernard, Pierre Bolly, Micheline Citta, Ginette Cuisinier, Danièle Degen, Christiane Hauchart, Mariza Krysinska, Dany Legrand, Cécile Marchand, Rosane Tossut.

2 La perpendicularité dans l'espace

1. Le plus court chemin

Nous utiliserons le matériel suivant : un cube en plastique (ou un cube fabriqué avec du fil de fer, ou des pailles et des cure-pipes, ou. . ..) et des piques à brochette. Posez le cube face à vous.

a) Appelons M le point milieu de l'arête supérieure de la face avant de ce cube.

  1° Quel est le plus court chemin du point M à la face arrière du cube ?

  2° Quel est le plus court chemin du point M à un plan vertical diagonal du cube ?

b) Soient D et H les extrémités de l'arête verticale arrière gauche et soient I et J les milieux des arêtes horizontales de la face de droite. Appelons N le point situé sur l'arête verticale avant droite, aux trois quarts de la hauteur. Quel est le plus court chemin du point N au plan $DHIJ$?

c) Soit S un sommet quelconque du cube. Quel est le plus court chemin de S au plan passant par les autres sommets des trois arêtes contenant S ?

Dans un premier temps, vous êtes invités à manipuler le cube et à montrer le plus court chemin. Dans un second temps, vous êtes invités à décrire le plus court chemin de manière à ce que quelqu'un qui n'est pas présent puisse réaliser la construction : par quels points faut-il passer, quelle direction faut-il prendre ? N'hésitez pas à utiliser les éléments du cube.

Dans ce premier problème, on demande de trouver, dans différents cas, le plus court chemin d'un point à un plan. L'idée est ici de manipuler le cube et de matérialiser le chemin en se servant par exemple des piques à brochette, et aussi de décrire comment on peut le construire. Dans les classes, les élèves ont travaillé par groupes de trois ou quatre.

Il n'est pas question pour le moment de représenter les chemins, et nous avons choisi de décrire les points et plans sans recourir à une représentation du cube. L'énoncé du problème est aussi l'occasion d'un exercice de lecture.

Nous allons parcourir les solutions et présenter des photos prises par des élèves afin d'illustrer leur travail.

a) Le plus court chemin de M à la face arrière s'obtient en joignant M au milieu de l'arête supérieure de la face arrière (Fig. 1).

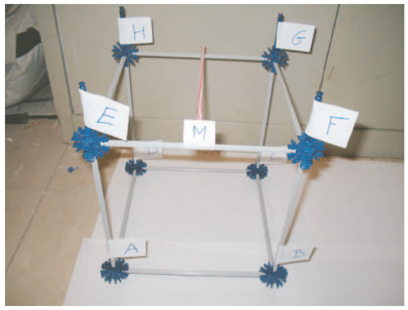


FIG. 1

Quant au plus court chemin de M à un plan vertical diagonal, il s'obtient en menant par M la perpendiculaire à la diagonale appropriée de la face supérieure (Fig. 2).

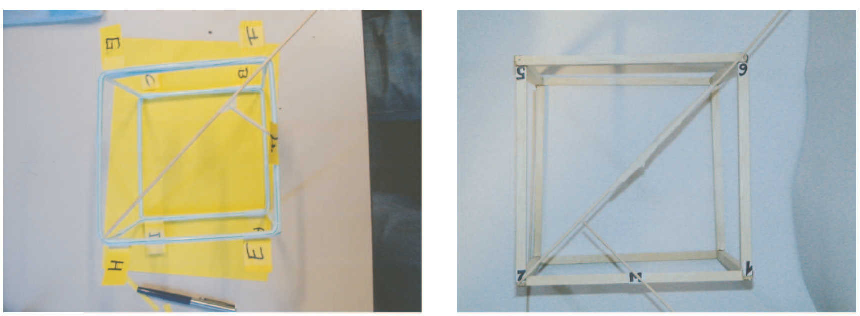


FIG. 2

Remarquons que la résolution de cette première question a pu se faire en restant dans une face du cube.

b) Pour construire le chemin demandé, on peut se placer dans le plan horizontal passant par N et mener par N la droite perpendiculaire à l'intersection de ce plan horizontal avec le plan vertical à atteindre (Fig. 3 a)).

Dans ce problème-ci, le plus court chemin n'est donc plus sur une face

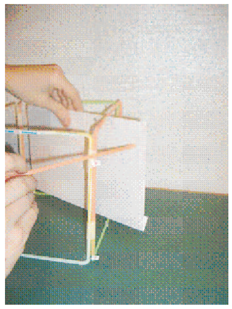


FIG. 3 a)

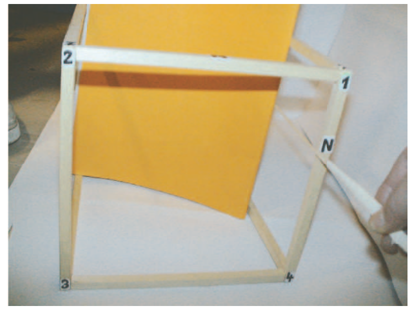


FIG. 3 b)

du cube. Et pour certains élèves, sortir du cube est une difficulté, comme l'illustre la figure 3 b).

c) Le plan à atteindre n'est plus vertical et il est difficile à imaginer. Une manière de voir plus clair consiste à modifier la position du cube afin de pouvoir à nouveau exploiter les directions horizontale et verticale : en tenant le cube posé sur le sommet S, on rend le plan à atteindre horizontal et il devient évident que la droite verticale passant par S est le plus court chemin(Fig. 4).

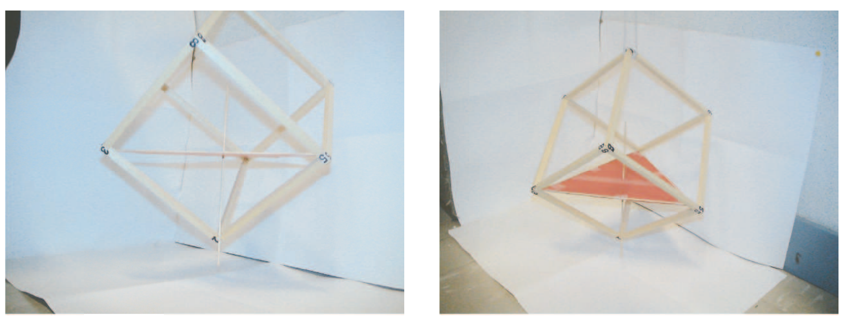


FIG. 4

Dans chaque cas de la fiche 1, le plus court chemin du point au plan est obtenu en menant par le point la droite perpendiculaire au plan. Mais la définition de la perpendicularité d'une droite à un plan n'est pas forcément explicitée à ce stade-ci. On peut en effet décrire les constructions en les situant dans des plans particuliers et en utilisant les directions horizontale et verticale. Il est possible que la notion se rapproche plutôt de la définition donnée par Clairaut en 1741, dans ses *Éléments de géométrie : « La ligne perpendiculaire à un plan est celle qui ne penche d'aucun côté sur ce plan ».*

2. La planche à clou

Vous disposez d'un niveau d'eau, d'une équerre et d'un fil à plomb. Un long clou est planté dans une planche. Comment vérifier si ce clou est perpendiculaire à la planche ? Envisagez chacun des cas suivants :

a) la planche est horizontale,

b) la planche est verticale,

c) la planche est dans une position quelconque.

Énoncez un critère de la perpendicularité d'une droite et d'un plan.

L'objectif est ici d'établir la définition de la perpendicularité d'une droite et d'un plan ainsi qu'un critère de reconnaissance de cette propriété.

Parcourons les différents cas envisagés.

Lorque la planche est horizontale, le clou lui est perpendiculaire s'il est vertical. Pour vérifier la verticalité du clou, on peut utiliser le fil à plomb.

Lorque la planche est verticale, le clou doit être horizontal et le niveau d'eau permet de vérifier son horizontalité. Mais cela ne suffit pas. Il faut en plus s'assurer qu'il est perpendiculaire à une droite non verticale de la planche, par exemple la droite horizontale passant par la pointe du clou. Et pour cela, on utilise l'équerre.

Notons que ce problème est l'occasion de souligner la dissymétrie existant entre les notions d'horizontal et de vertical : il y a une seule direction pour les plans horizontaux alors qu'il y a une infinité de directions pour les droites horizontales ; par contre, il y a une infinité de directions pour les plans verticaux alors qu'il n'y a qu'une seule direction pour les droites verticales.

Après avoir vérifié que le clou est bien perpendiculaire à la planche en ayant placé l'équerre, on peut tourner l'équerre tout en maintenant un de ses côtés en contact avec le clou. C'est l'occasion d'observer la perpendicularité du clou à toutes les droites de la planche menées par la pointe du clou.

A la question c), on prend ses distances par rapport à la verticale et à l'horizontale en supposant que la planche est dans une position quelconque et qu'elle ne peut pas être déplacée. Le fil à plomb et le niveau d'eau seront ainsi assez naturellement laissés de côté. L'équerre permet de vérifier la perpendicularité entre le clou et toutes les droites de la planche menées par la pointe du clou. Pour mettre en évidence un critère de la perpendicularité d'une droite et d'un plan, on peut s'interroger sur le nombre minimal de

« mesures » permettant d'assurer la perpendicularité du clou à la planche : il suffit de vérifier l'angle droit pour deux droites de la planche (Fig. 5).

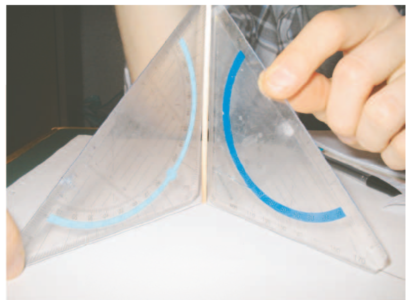


Fig. 5

Au terme de ces deux premières fiches, nous sommes à même d'énoncer la définition et le critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan.

Une *droite* est dite *perpendiculaire à un plan* lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan menées par leur point de rencontre.

Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est perpendiculaire à deux droites du plan menées par leur point de rencontre (Fig. 6).

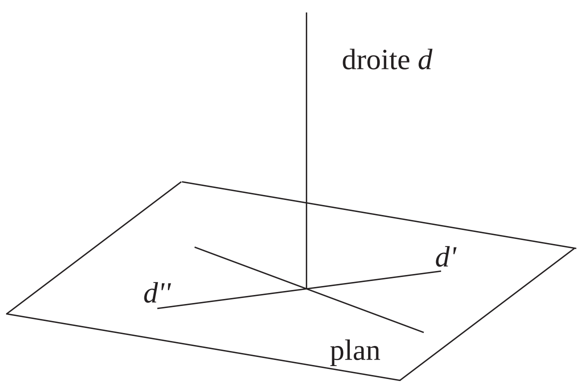


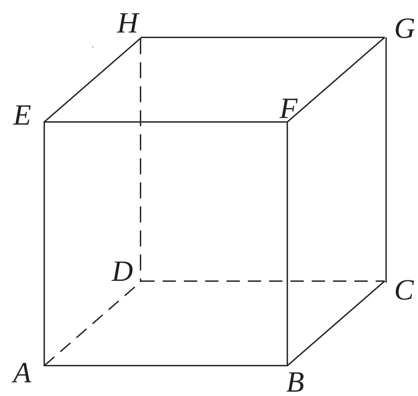
Fig. 6

3. Dessiner le plus court chemin

Voici un cube dessiné en perspective cavalière. Reproduisez-en quelques exemplaires. Pour chaque question de la fiche 1 :

– représentez votre solution,

– justifiez que la droite dessinée représente une perpendiculaire au plan considéré.



Dans la fiche 2, la notion de droite perpendiculaire à un plan ne fait intervenir dans le plan que des droites passant par le pied de la perpendiculaire. Le retour au cube va permettre de faire évoluer la définition et le critère qui viennent d'être énoncés : un objectif de la fiche 3 est d'introduire la notion de droites orthogonales et de l'utiliser pour justifier la perpendicularité d'une droite à un plan. C'est également l'occasion de retravailler des problèmes de représentation plane d'objets de l'espace et de rappeler des propriétés de la représentation en perspective cavalière, par exemple la conservation du parallélisme de deux droites et la conservation du milieu d'un segment.

Dans le cas a) de la fiche 1, le plus court chemin de M à la face arrière s'obtient en joignant M au milieu de l'arête supérieure de la face arrière. A la figure 7, ce chemin est représenté par MP.

Dans la réalité, MP est perpendiculaire au plan CGH car elle est parallèle à une perpendiculaire à ce plan, à savoir l'arête FG. On utilise les propriétés suivantes.

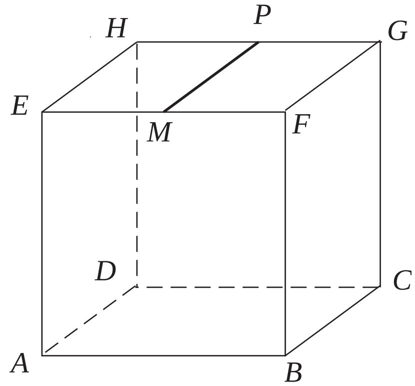


Fig. 7

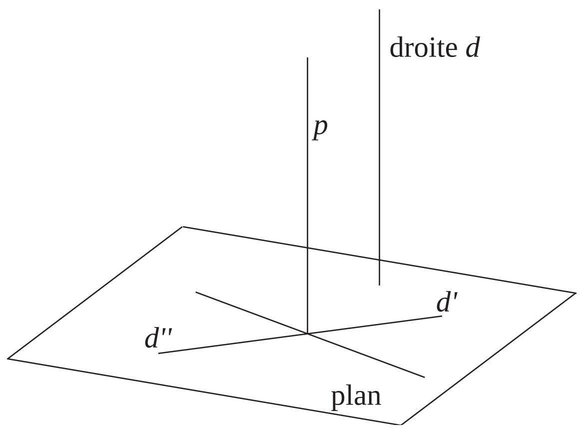


Fig. 8

Une arête du cube est perpendiculaire aux deux faces qu'elle perce.

Une droite parallèle à une droite perpendiculaire à un plan est aussi perpendiculaire à ce plan.

La seconde propriété donne l'idée d'une direction de droites perpendiculaires à un plan (Fig. 8). Afin de simplifier à l'avenir les justifications, il peut être utile d'introduire ici un terme pour désigner la position relative de deux droits telles que d et d'.

Dorénavant, nous dirons que les *droites d et d'* sont *orthogonales* lorsqu'une de ces droites est parallèle à une droite perpendiculaire à l'autre. En particulier, deux droites perpendiculaires sont orthogonales.

Avec cette notion d'orthogonalité, on peut énoncer deux propriétés qui seront utilisées par la suite.

> Une droite est orthogonale à toute droite située dans un plan qui lui est perpendiculaire. En particulier, dans le cas des éléments du cube, une arête est orthogonale à toutes les droites situées dans les deux faces qui lui sont perpendiculaires.
>
> Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est orthogonale à deux droites de directions différentes situées dans ce plan (Fig. 9). Il s'agit là d'un second critère de perpendicularité d'une droite à un plan.

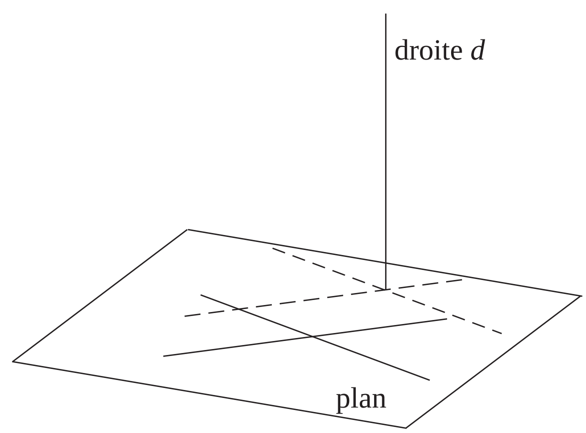


Fig. 9

Dans le second cas du a) de la fiche 1, le plan à atteindre est un plan vertical diagonal. On a vu que le plus court chemin s'obtient en menant par M, la perpendiculaire à la diagonale adéquate de la face supérieure. Le dessin d'élèves repris à la figure 10 met en évidence leur difficulté à représenter cette perpendiculaire. On peut résoudre le problème en représentant l'autre diagonale de la face supérieure. Et on mène par le point donné la parallèle à cette seconde diagonale. Le chemin est représenté par MP à la figure 11.

Pour justifier que, dans la réalité, MP est perpendiculaire au plan diagonal BFH, on peut utiliser la notion d'orthogonalité. Dans le cube réel, la diagonale EG est perpendiculaire au plan BFH car elle est orthogonale à deux droites de ce plan : d'une part à l'autre diagonale FH, et d'autre part à l'arête BF car cette arête est perpendiculaire à la face dans laquelle se trouve EG. Dès lors, la droite MP étant parallèle à EG, elle est également perpendiculaire au plan BFH.

Pour traiter le cas b) de la fiche 1 dans la réalité, on se place dans le plan

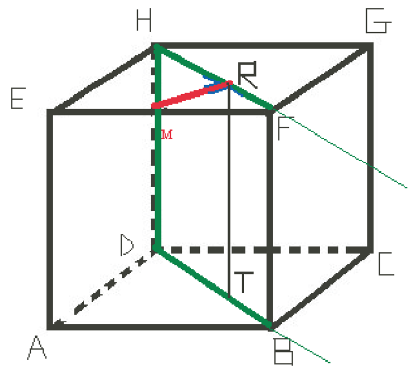


Fig. 10

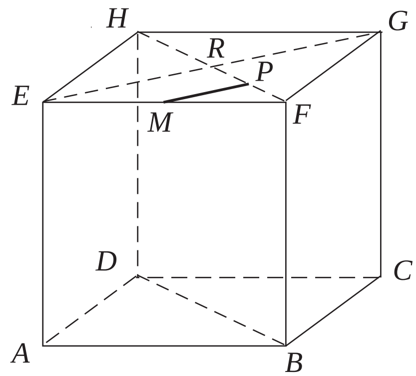


Fig. 11

horizontal passant par N et on mène par N la perpendiculaire à l'intersection de ce plan horizontal avec le plan vertical à atteindre. La figure 12 présente le dessin d'un élève. On y retrouve un problème de représentation de droites perpendiculaires que l'on peut résoudre en joignant, dans la face supérieure, le milieu M de l'arête EF au sommet G (Fig. 13). On représente ainsi des triangles isométriques, images l'un de l'autre par une rotation de 90°. Les droites MG et HJ sont donc perpendiculaires dans la réalité. On dessine ensuite le chemin NP en menant par N la parallèle à MG.

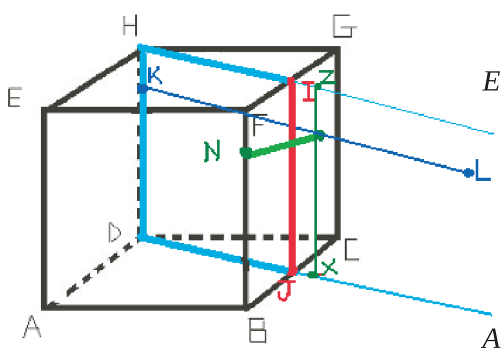


Fig. 12

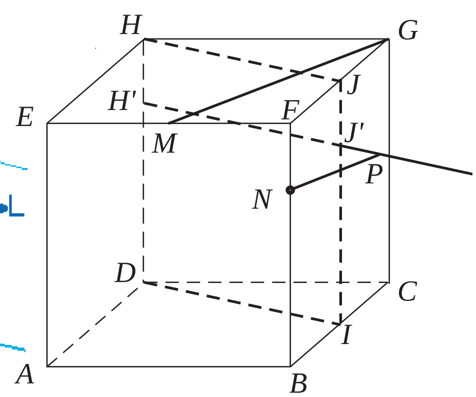


Fig. 13

Qu'en est-il de la justification ? La droite MG est, dans la réalité, perpendiculaire au plan $DHJI$ car elle est orthogonale à deux droites de ce plan : d'une part à HJ et d'autre part à DH (qui est une arête perpendiculaire à la face dans laquelle se trouve MG). La droite NP étant parallèle à MG, elle est donc également perpendiculaire au plan $DHJI$.

Le cas c) de la fiche 1 est illustré à la figure 14. Le plus court chemin est FP, P étant l'intersection de la diagonale FD avec le plan à atteindre BGE. Le point P se trouve à l'intersection des médianes BR et EV du triangle BGE, ce qui permet de le représenter.

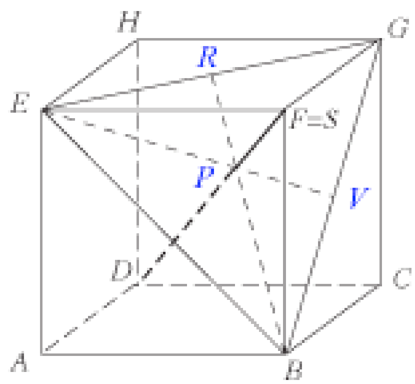


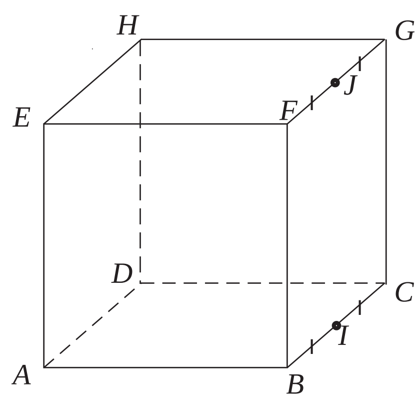
FIG. 14

Pour justifier que, dans le cube réel, FD est perpendiculaire au plan BGE, on peut montrer que FD est orthogonale à EG et à BG : la droite FD est orthogonale à EG car FD est dans le plan diagonal $HFBD$ et EG est perpendiculaire à ce plan ; de manière analogue, FD est orthogonale à BG car FD est dans le plan diagonal $FCDE$ et BG est perpendiculaire à ce plan.

4. Plans perpendiculaires
Reprenons les plans envisagés précédemment : CGH, DBF, HJI et BGE.

a) Pour chacun de ces plans, recherchez plusieurs plans qui lui sont perpendiculaires. Donnez une définition de la perpendicularité de deux plans.

b) Recherchez
   – un plan contenant AF et perpendiculaire au plan CGH,
   – un plan contenant AF et perpendiculaire au plan HJI,
   – un plan contenant FH et perpendiculaire au plan BGE.



Alors que les trois premières fiches concernent la perpendicularité d'une droite à un plan, celle-ci traite des plans perpendiculaires. Elle vise à mettre au point la définition de la perpendicularité de deux plans.

Deux *plans* sont dits *perpendiculaires* lorsque l'un d'eux contient une droite perpendiculaire à l'autre.

3 Repérer des points dans l'espace

L'objectif de cette question est de faire prendre conscience de la nécessité d'un repère à trois dimensions en utilisant la connaissance déjà acquise du repère à deux dimensions.
En répondant à ces deux questions, l'élève est soumis à un exercice de rédaction dont la clarté est vérifiée, non pas par le professeur, mais par d'autres élèves. Ce qui le rend d'autant plus périlleux.

5. Repérage dans la classe

a) Imaginez que le local dans lequel vous vous trouvez est vide de tout mobilier. Choisissez un point de ce local. Rédigez ensuite un message qui permettrait à une personne réceptrice de retrouver le point choisi.

b) Prenez un cube et choisissez un point dans l'espace. Rédigez un message qui décrit la position du point par rapport au cube.

De la résolution de ce problème devraient ressortir trois aspects différents du repérage dans l'espace :

- les distances du point P aux trois plans de référence,
- le cheminement parallèlement aux trois axes successivement,
- le repérage d'un point dans le plan Oxy puis l'élévation suivant l'axe Oz.

Il est utile que l'enseignant ait à l'esprit ces trois aspects afin de mieux comprendre les difficultés des élèves ou les aider plus efficacement.

Nous choisissons de privilégier le troisième aspect car il prolonge le travail antérieur dans le plan au sens où se repérer dans l'espace revient à ajouter aux coordonnées relatives au plan horizontal la coordonnée relative à l'axe vertical.

Nous découvrons avec les élèves qu'il est important de choisir un sens de parcours sur les axes. Le repère et les coordonnées sont définis de la façon suivante.

Un *repère* dans l'espace est déterminé par un point origine noté O et trois axes non coplanaires gradués le comprenant et notés Ox, Oy, Oz.

Un repère est *orthonormé* si les trois axes sont perpendiculaires deux à deux et si les unités sur les axes sont égales.

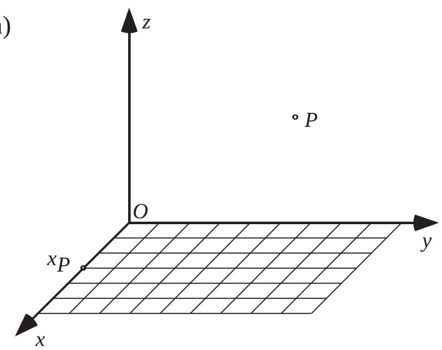
Les deux premières *coordonnées* d'un point P sont celles de la projection du point dans le plan Oxy, et la troisième est son élévation selon l'axe Oz. Elles sont respectivement notées x_P, y_P, z_P et sont appelées *abscisse*, *ordonnée* et *cote* du point P. On écrit $P(x_P, y_P, z_P)$.

Dans la suite de ce texte, le repère considéré sera toujours orthonormé.

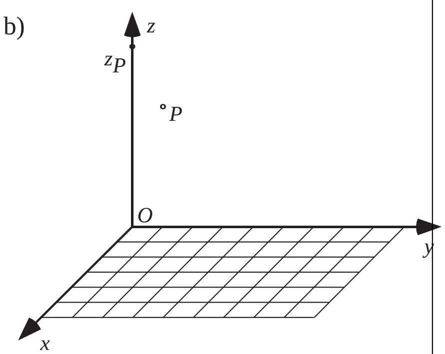
6. S'entraîner à repérer des points dans l'espace

Sur chaque figure, une des coordonnées du point P est indiquée. Déterminez celles qui manquent. Aidez-vous du repère en carton illustré à la figure 15 que vous pouvez fabriquer selon les instructions données dans l'annexe.

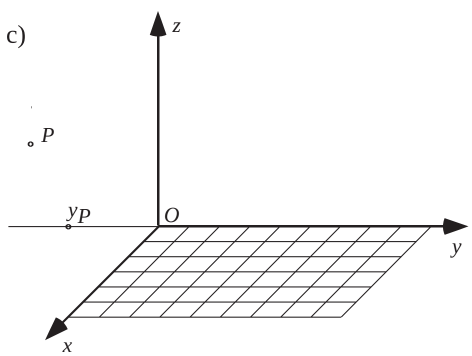
a)



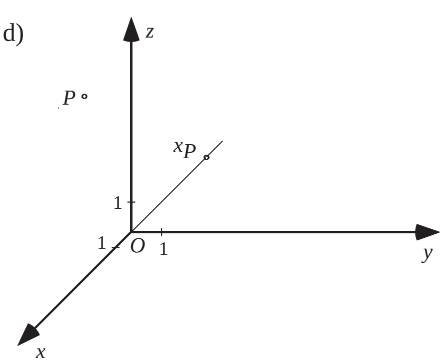
b)



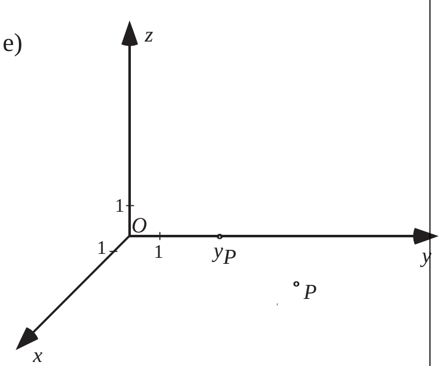
c)



d)



e)



Le repère de la figure 15 est un outil pour localiser, dans l'espace, un point dont on connaît les trois coordonnées.

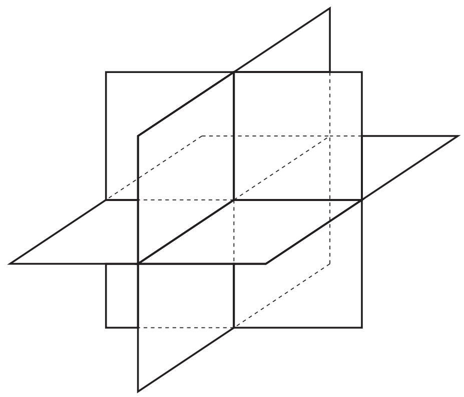


FIG. 15

La fiche porte sur la représentation plane d'un point de l'espace. On demande souvent de représenter un point dont on donne les coordonnées. Ici, c'est l'inverse : la représentation du point est donnée et il s'agit d'en déterminer les coordonnées. Mais, comme dans une représentation plane, un point peut représenter une infinité de points de l'espace, il faut en donner une des trois coordonnées pour que le point soit déterminé de façon univoque.
Nous suggérons d'utiliser un repère en carton pour ce travail dans l'espace. Un patron en est donné en annexe.
Les situations proposées sont de difficulté croissante. En effet, les coordonnées sont d'abord toutes positives et le plan Oxy est muni d'un quadrillage 1×1. Puis les coordonnées prennent des valeurs négatives, le quadrillage n'est plus représenté et il faut parfois prolonger un ou plusieurs axes pour déterminer la solution du problème.

Nous décrivons les différentes approches de résolution pour la figure a). Nous appellerons P_x le point de l'axe Ox ayant pour abscisse x_P .
1$^{\text{re}}$ approche.

Comme le plan Oxy est muni d'un quadrillage, il semble assez naturel d'utiliser le 3$^{\text{e}}$ aspect du repérage cité dans la résolution de la fiche 5 : on cherche à déterminer P_{xy}, projection de P sur le plan Oxy (Fig. 16). L'abscisse et l'ordonnée de P sont les mêmes que celles de P_{xy} et la cote est donnée par la distance de P au plan Oxy, en vraie grandeur sur la figure. La seule difficulté est donc la détermination de P_{xy} . Ce point du plan horizontal se trouve sur la droite d, parallèle à Oy passant par le point P_x et aussi sur la droite d', perpendiculaire abaissée de P sur le plan Oxy, parallèlement à Oz. Les droites d et d' sont sécantes et leur intersection est le point P_{xy}. Les coordonnées de P_{xy} dans le plan Oxy sont $(3, 7)$. La cote mesurée par la longueur PP_{xy}, éventuellement reportée sur Oz, est 5. Finalement les coordonnées de P sont $(3, 7, 5)$.

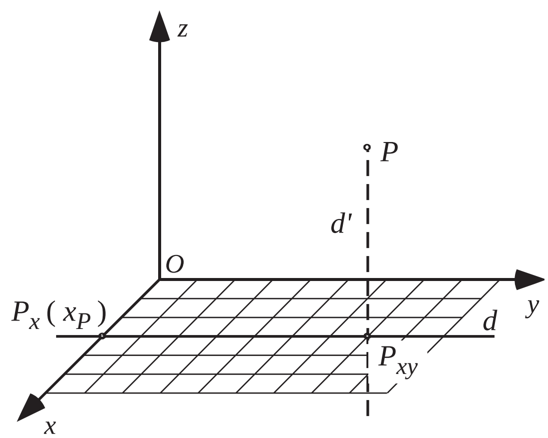


Fig. 16

2$^{\text{e}}$ approche

Une deuxième méthode repose sur l'observation suivante : le point P appartient au plan parallèle au plan Oyz passant par P_x (Fig. 17). On y lit que l'ordonnée du point P est 7 et sa cote 5. Les coordonnées de P sont donc $(3, 7, 5)$.

3$^{\text{e}}$ approche

La connaissance de x_P permet de déterminer P_{yz}, la projection de P dans le plan Oyz : il suffit en effet de tracer, à partir de P, le segment parallèle de même longueur et orienté de la même manière que le segment P_xO (Fig 18). L'extrémité de ce segment est le point P_{yz}. Dans le plan Oyz , on peut maintenant lire l'ordonnée et la cote du point P. On a ainsi déterminé les coordonnées de P.

On procède de la même manière dans le cas des autres figures. On construit la projection du point dans un des plans de coordonnées. On obtient successivement, aux erreurs de mesure près, les coordonnées suivantes b) $P(4, 3, 6)$, c) $P(2, 5; -3, 4)$, d) $P(, -5, -4, 2)$, e) $P(-5, 3, -4)$.

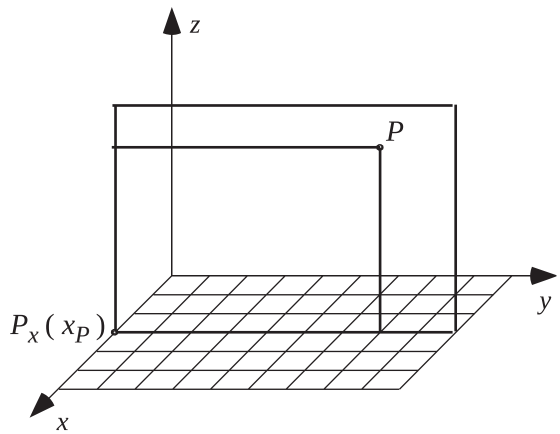


Fig. 17

4 Vecteurs et produit scalaire

7. Opérations sur les coordonnées

Les coordonnées du point O sont $(0, 0, 0)$ et celles du point A sont $(1, 3, 1)$.

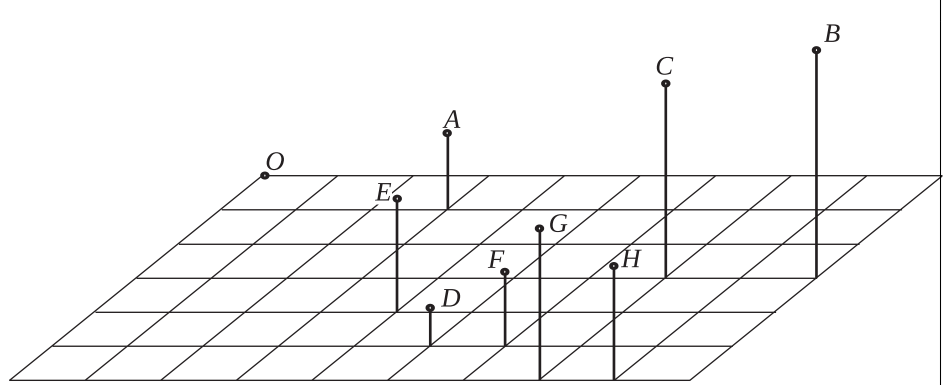
a) Parmi les points représentés, déterminez-en deux alignés avec l'origine. Quelles sont leurs coordonnées ?

b) Complétez les coordonnées de $K(x, 6, z)$ pour que K, O et A soient alignés.

c) Les droites EA et FG sont parallèles sur la représentation. Le sont-elles dans la réalité ?

d) Parmi les points représentés, y en a-t-il trois qui, avec l'origine, forment un parallélogramme ? Quelles sont leurs coordonnées ?

e) Déterminez les coordonnées du point L telles que $OBLF$ soit un parallélogramme.



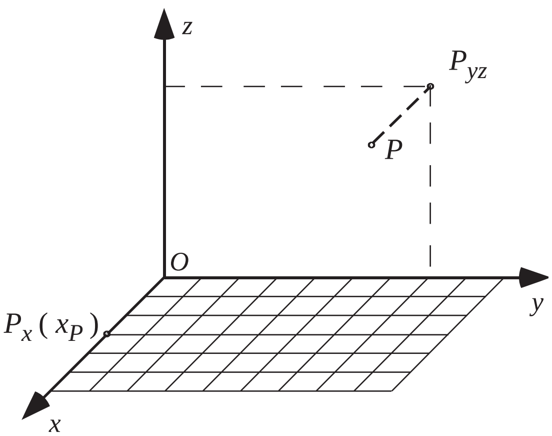


Fig. 18

L'objectif est ici d'étendre à l'espace la notion de vecteur déjà rencontrée dans le plan. On généralisera aussi aux vecteurs de l'espace l'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un nombre.

Comme dans le plan, un vecteur de l'espace est déterminé par une direction, un sens et une longueur. À un vecteur est associée la famille de segments orientés ayant cette direction, ce sens et cette longueur. De la même manière qu'à un vecteur du plan a été associé un couple de nombres, à un vecteur de l'espace sera associé un triplet de nombres.

Il peut être utile de disposer d'une maquette (batonnets piqués sur une planche de polystyrène expansé) pour confirmer, a posteriori, les réponses obtenues aux diverses questions de cette fiche, mais la mettre à disposition des élèves d'emblée ferait perdre toute pertinence à ces questions. Pour la construction de cette maquette, reportez-vous dans l'annexe, à la fin de ce document.
La démonstration développée au point d) n'est là que par souci d'être complet, mais n'est nullement indispensable. En effet, c'est une question de niveau de rigueur : il n'est pas à conseiller de démontrer ce qui, aux yeux des élèves, apparaît comme une évidence.

a) En répondant à cette question, les élèves réalisent que des points alignés sur le dessin ne le sont pas forcément dans l'espace. Montrons d'abord que les points O, A et C, alignés sur le dessin, ne le sont pas en réalité. À la figure 19, on a noté A' et C' les projections orthogonales de A et C sur

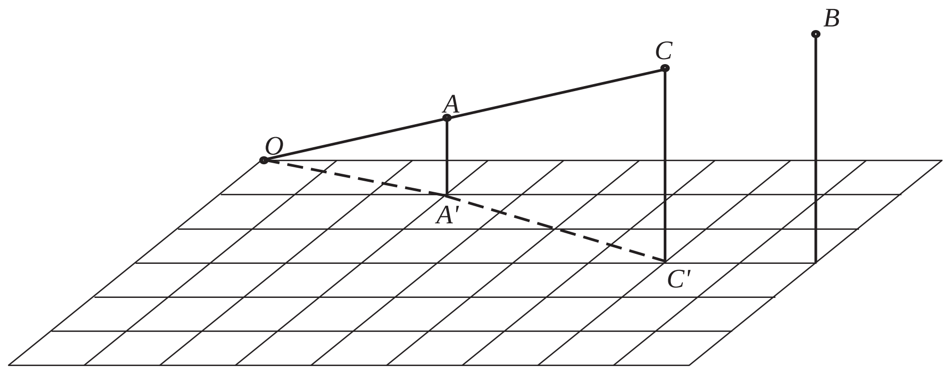


Fig. 19

le plan horizontal. On observe qu'en les reliant, on obtient une ligne brisée . Or, on sait que les projections parallèles sur un plan de trois points alignés sont trois points alignés. Donc les points O, A et C ne peuvent pas être alignés dans l'espace.

Montrons ensuite que les points O, A et B sont alignés dans l'espace.

À la figure 20, on a noté A' et B' les projections orthogonales de A et B sur le plan horizontal. Dans l'espace, les droites AA' et BB' déterminent un plan vertical. Par conséquent, les droites AB et $A'B'$ sont coplanaires. Elles sont sécantes. Leur point d'intersection ne peut être que le point O. Ainsi, les points O, A et B sont alignés dans l'espace.

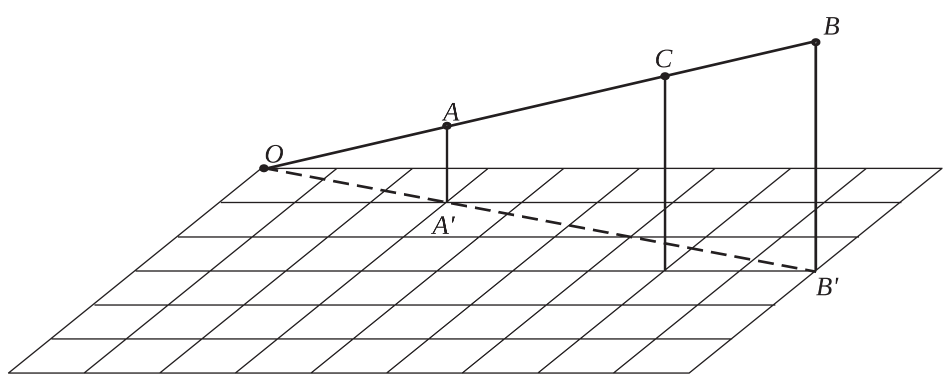


Fig. 20

Recherchons maintenant les coordonnées de ces points alignés.

Les coordonnées de $O(0,0,0)$ et$A(1,3,1)$ suffisent à déterminer le repère et, par suite, à lire les coordonnées de B et C :

$$B(3,9,3) \text{ et } C(3;7;2,5).$$

On constate que les coordonnées des points $A(1,3,1)$ et $B(3,9,3)$, alignés avec O, sont proportionnelles :

$$3 = 3 \times 1, \quad 9 = 3 \times 3, \quad 3 = 3 \times 1,$$

ce qu'on écrira

$$(3,9,3) = 3(1,3,1).$$

Par contre, on observe que les coordonnées des points A et C, non alignés avec O, ne sont pas proportionnelles. Sur base de ces observations, nous admettons que, de manière générale,

> *Deux points A et B sont alignés avec l'origine O* si et seulement si les coordonnées de B sont le produit des coordonnées de A par un nombre.

b) La proportionnalité admise au point a) conduit aisément aux coordonnées $(2,6,2)$ pour le point K.

c) La figure 21 montre que les droites EA et FG, parallèles sur le dessin,

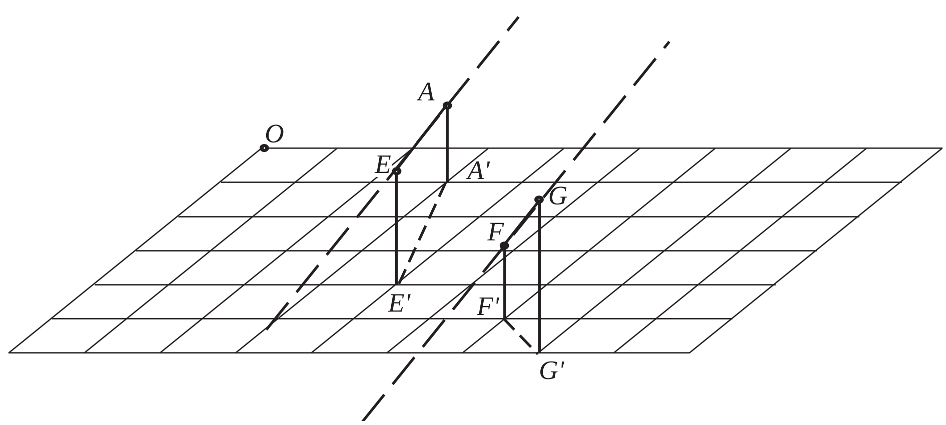


Fig. 21

ne le sont pas dans la réalité car leurs projections $E'A'$ et $F'G'$ sur le plan horizontal ne sont pas parallèles.

d) La figure 22 montre que le quadrilatère $OAHD$ est représenté par un parallélogramme. Nous allons montrer qu'il est un parallélogramme dans l'espace. Pour cela, nous allons vérifier que les droites OA et DH sont parallèles et qu'il en est de même des droites OD et AH. Appelons respecti-

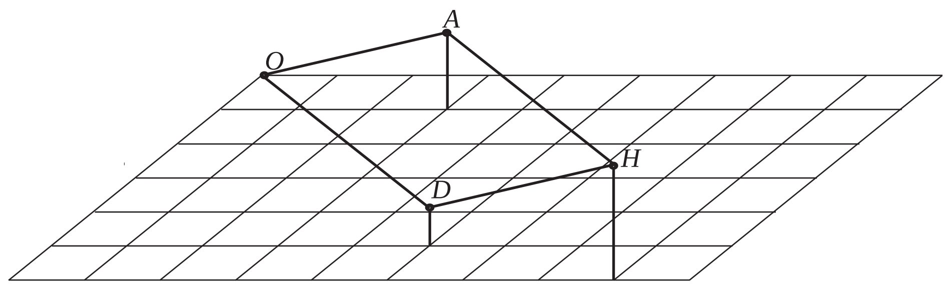


Fig. 22

vement OA' et $D'H'$ les projections orthogonales de OA et DH sur le plan horizontal (Fig. 23). Ces droites OA' et $D'H'$ sont coplanaires et parallèles sur la figure. Elles sont donc parallèles. Elles sont aussi les droites d'inter-

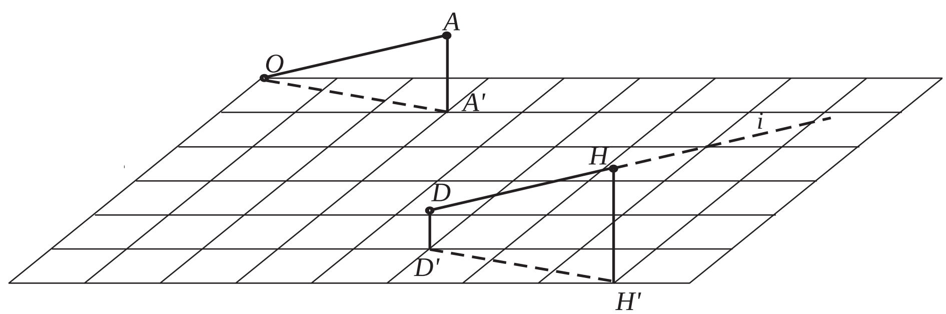


Fig. 23

section des plans verticaux OAA' et $DHH'D'$ avec le plan horizontal. Par conséquent, ces plans verticaux sont parallèles. Ils contiennent les droites OA et DH. Voyons que le plan OAD déterminé par la droite OA et le point D coupe le plan $DHH'D'$ selon DH. Ce plan OAD, qui coupe les deux plans verticaux parallèles, doit le faire selon deux droites parallèles entre elles. Donc il coupe le plan $DHH'D'$ selon une droite i passant par D et parallèle à OA. Les droites i et DH, confondues sur le dessin, le sont aussi dans la réalité car elles sont incluses dans un même plan (le plan $DHH'D'$) dont la représentation ne réduit pas à une droite. En conclusion, les droites OA et DH sont bien parallèles. On montrerait de la même manière que les droites OD et AH sont parallèles. Ce qui fait du quadrilatère $ODHA$ un parallélogramme.

Cherchons maintenant les coordonnées des points O, A, H et D. On les lit sur la figure 22 :

$$O(0,0,0) \qquad A(1,3,1)$$

$$D(5;5;0,5) \qquad H(6;8;1,5)$$

Quel lien y a-t-il entre les coordonnées de ces quatre points sommets d'un parallélogramme ?

Comme les segments $[OA]$ et $[DH]$ sont deux segments orientés de même direction, même sens et même longueur, ils représentent le même vecteur.

On trouve que la différence entre les coordonnées de A et O est la même que celle entre les coordonnées de H et D :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1-0 & = & 6-5 \\ 3-0 & = & 8-5 \\ 1-0 & = & 1,5-0,5 \end{array}\right.$$

$$\text{coord. de } A - \text{coord. de } O = \text{coord. de } H - \text{coord. de } D.$$

Cette propriété concernant les coordonnées est visualisée géométriquement à la figure 24 : elle peut s'interpréter par le fait que le « chemin[2] pour aller O à A est le même que celui pour aller de D à H ». On trouve de même que

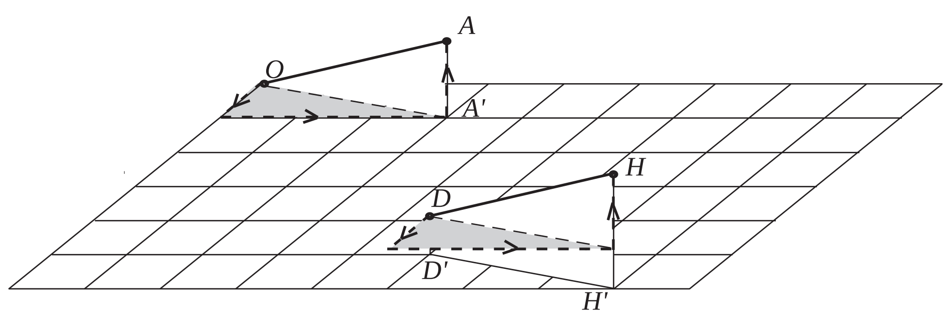


FIG. 24

la différence entre les coordonnées de D et O est la même que celle entre les coordonnées de H et A :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 5-0 & = & 6-1 \\ 5-0 & = & 8-3 \\ 0,5-0 & = & 1,5-1 \end{array}\right.$$

[2]On retrouve ici un des trois aspects du repérage mis en évidence lors de la résolution de la question 5 : celui qui visualise les coordonnées d'un point au moyen d'un cheminement parallèlement aux trois axes successivement.

coord. de D − coordonnées de O = coord. de H − coordonnées de A.

À ce stade, nous sommes en mesure d'étendre à l'espace, les notions liées au vecteur déjà vues en géométrie plane.

> Tous les segments orientés de même direction, même sens et même longueur représentent le même *vecteur dans l'espace.*

On écrit, par exemple : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DH}$.

> Les différences entre les coordonnées des extrémités et les coordonnées des origines de deux segments représentant le même vecteur sont égales. Ces différences sont appelées les *composantes* du vecteur.

Par exemple, les composantes du vecteur $\overrightarrow{DH}$ sont $(1, 3, 1)$.

On relève aussi que les coordonnées du point H peuvent s'obtenir en faisant la somme de celles de D et de A :

$$\begin{cases} 6 & = & 5+1 \\ 8 & = & 5+3 \\ 1,5 & = & 1+0,5 \end{cases}$$

ce que l'on écrit sous la forme

$$(6; 8; 1,5) = (5, 5, 1) + (1; 3; 0,5)$$

Cette égalité exprime aussi que les composantes du vecteur $\overrightarrow{OH}$ sont égales aux sommes des composantes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$. Or, le segment $[OH]$ est une diagonale du parallélogramme $OAHD$. D'où, le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$. Cela s'écrit

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}.$$

> En général, pour obtenir les composantes du *vecteur somme de deux vecteurs*, on additionne les composantes correspondantes.

De manière analogue, l'égalité $(3, 9, 3) = 3 \cdot (1, 3, 1)$ qui traduisait l'alignement des points O, A, B exprime que le vecteur $\overrightarrow{OB}$ est le produit du vecteur $\overrightarrow{OA}$ par le nombre 3 et cela s'écrit

$$\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OA}.$$

En général, pour obtenir les composantes du *vecteur produit d'un vecteur par un nombre*, on multiplie les composantes du vecteur par ce nombre.

e) Pour que $OBLF$ soit un parallélogramme, il faut que

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{FL}.$$

Or les composantes de $\overrightarrow{OB}$ sont $(3, 9, 3)$ et les coordonnées de F sont $(5, 6, 1)$. Si (l_1, l_2, l_3) désignent les coordonnées de L, l'égalité des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{FL}$ s'écrit

$$(3, 9, 3) = (l_1, l_2, l_3) - (5, 6, 1).$$

D'où,

$$(l_1, l_2, l_3) = (8, 15, 4).$$

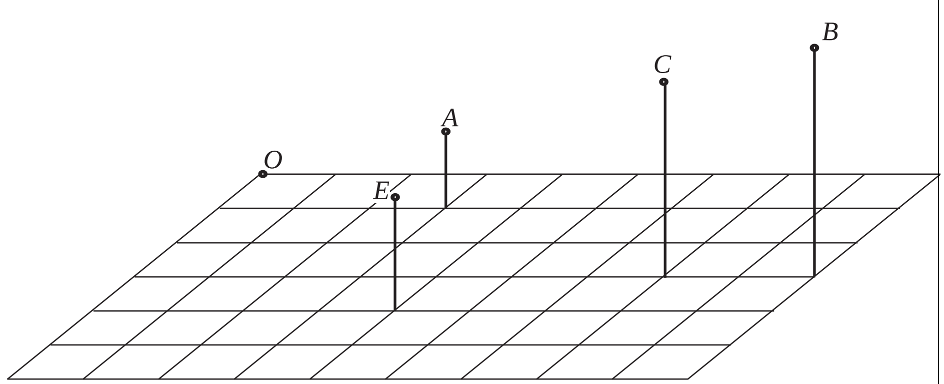
On aurait aussi pu obtenir les coordonnées de L en utilisant l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF}$.

8. Alignement et parallélisme

a) Complétez les coordonnées $(2, y, z)$ du point S pour que S, A et C soient alignés. Représentez S.

b) Écrivez vectoriellement une condition d'alignement de trois points quelconques P, Q, R.

c) Utilisez les vecteurs pour déterminer les coordonnées du point T telles que $ACTE$ soit un parallélogramme.



Le sujet de cette fiche fait partie du programme de 6e pour les classes de math 4H/sem. Il peut être omis sans conséquence pour ce qui suit.
Cette question donne l'occasion d'appliquer les règles d'addition de deux vecteurs et de multiplication d'un vecteur par un nombre à des vecteurs représentés par des segments orientés dont l'origine n'est pas le point O.

a) La question revient à chercher les coordonnées y et z du point S de la droite AC, sachant que sa première coordonnée est 2.

On pourrait procéder de façon « artisanale » en imposant aux projections A', S' et C' de A, S et C sur le plan horizontal d'être alignées, ce qui fournit y, puis en cherchant z à la verticale de ce point. On préfère cependant à ce stade exploiter le « point fort » des vecteurs, à savoir qu'ils sont représentables par plusieurs segments orientés et en particulier par ceux qui sont issus de O. Translatons donc la configuration A, S C en O, S_1, C_1 avec $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{AC} = (2; 4; 1,5)$ et $\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{AS}$. L'alignement de S_1 avec O et C_1 se traduit par

$$\overrightarrow{OS_1} = k\overrightarrow{OC_1},$$

ce qui n'est rien d'autre que

$$\overrightarrow{AS} = k\overrightarrow{AC},$$

pour une certaine valeur de k. En termes de coordonnées, cette égalité s'écrit

$$(2-1, y-3, z-1) = k(2; 4; 1,5)$$

ou

$$(1, y-3, z-1) = k(2; 4; 1,5)$$

D'où $k = \frac{1}{2}$, et de là, $y - 3 = \frac{1}{2}(4) = 2$ et $z - 1 = \frac{1}{2}(1,5) = 0,75$.

Les coordonnées de S sont finalement $(2, y, z) = (2; 5; 1,75)$.

b) L'alignement des points P, Q et R s'écrit vectoriellement $\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{PR}$, pour une valeur de k.

c) Une condition en termes de vecteurs pour que $ACTE$ soit un parallélogramme est que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{ET}$ (ou $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CT}$). Or, $\overrightarrow{AC} = (2; 4; 1,5)$, $\overrightarrow{AE} = (3; 1; 0,5)$. En désignant par (x, y, z) les coordonnées de T, il faut que

$$(2; 4; 1,5) = (x-4, y-4, z-1,5).$$

D'où, $x = 6$, $y = 8$ et $z = 3$.

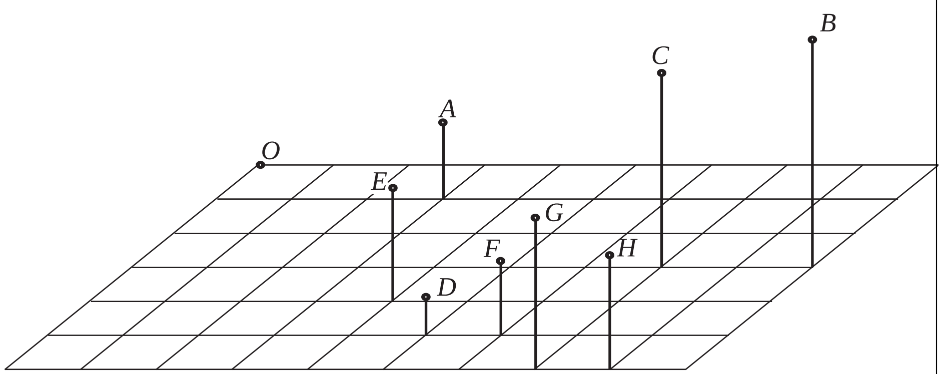
9. La distance entre deux points

Reprenons le repère orthonormé utilisé précédemment.

a) Calculez la distance entre les points O et E et celle entre les points G et B.

b) Calculez la distance du point G au point $M(15, 20, 10)$ et celle du point G au point $N(3, -2, -1)$.

c) Trouvez une formule qui donne la distance entre deux points quelconques $A(a_1, a_2, a_3)$ et $B(b_1, b_2, b_3)$.



Les élèves ont vu, en géométrie plane, comment calculer la distance entre deux points donnés par leurs coordonnées et cela, en utilisant le théorème de Pythagore. Il s'agit à présent de calculer la distance entre deux points situés dans l'espace.

a) Les points considérés sont représentés dans un repère qui incite à utiliser leur projection dans le plan Oxy et leur élévation selon l'axe Oz. A la figure 25, la projection de E dans le plan Oxy est notée E'. Le segment $[OE]$ est l'hypoténuse du triangle rectangle vertical $OE'E$. Le côté EE' de ce triangle est parallèle à l'axe Oz et a $3/2$ pour mesure. Quant au côté OE', il est l'hypoténuse d'un triangle rectangle horizontal dont les côtés sont parallèles à Ox et à Oy. En appliquant le théorème de Pythagore au triangle vertical, on a

$$|OE|^2 = |OE'|^2 + |EE'|^2.$$

En l'appliquant au triangle horizontal, on a

$$|OE'|^2 = 4^2 + 4^2.$$

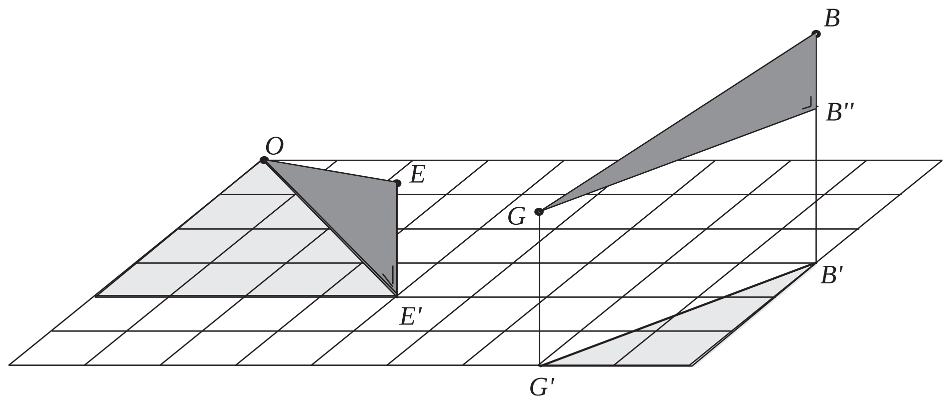


FIG. 25

On obtient donc

$$|OE| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 1,5^2} = \sqrt{34,25}.$$

Pour calculer la distance entre G et B, on procède de manière analogue en appliquant le théorème de Pythagore à deux triangles rectangles, l'un horizontal et l'autre vertical. Pour faire apparaître ce dernier, on considère sur BB' le point B'' obtenu en menant par G la parallèle à $G'B'$. On a, pour le triangle vertical,

$$|GB|^2 = |GB''|^2 + |BB''|^2,$$

avec $|GB''| = |G'B'|$. Pour le triangle horizontal, on a

$$|G'B'|^2 = 3^2 + 2^2.$$

On obtient donc

$$|GB| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}.$$

b) Dans les calculs précédents, on a pu se contenter de lire les longueurs des côtés des triangles rectangles sur la représentation. Pour calculer la distance entre G et un point non représenté (et difficilement représentable dans le repère donné), on est forcé d'employer les coordonnées des points.

Pour calculer la distance entre les points $G(6, 7, 2)$ et $M(15, 20, 10)$, on peut imaginer deux triangles rectangles comme dans l'exercice précédent.

En notant G' et M' les projections de G et M dans le plan Oxy, et M'' le point de MM' obtenu en menant par G la parallèle à $G'M'$, on a

$$|GM|^2 = |GM''|^2 + |MM''|^2$$

avec $|GM''| = |G'M'|$, et aussi

$$|G'M'|^2 = (15-6)^2 + (20-7)^2.$$

On a donc

$$|GM| = \sqrt{(15-6)^2 + (20-7)^2 + (10-2)^2} = \sqrt{314}.$$

On considère à présent le point N dont deux coordonnées sont négatives. Cela permet de visualiser la différence des coordonnées lorsque certaines d'entre elles sont négatives. Les coordonnées de N ont été choisies de manière à pouvoir représenter le point (Fig. 26).

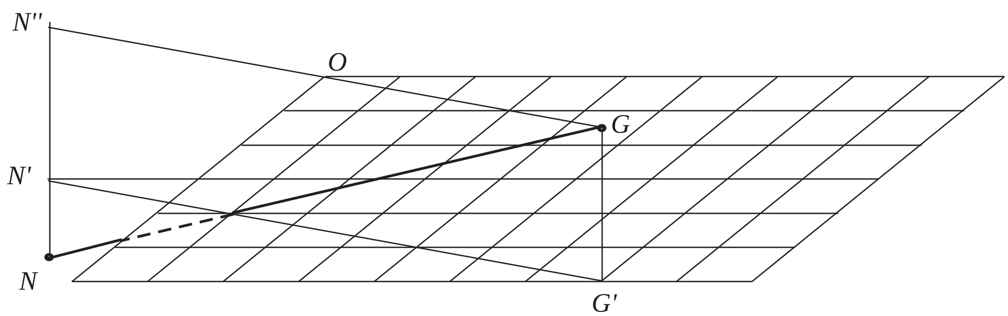


Fig. 26

La distance entre les points $G(6,7,2)$ et $N(3,-2,-1)$ est égale à

$$|GN| = \sqrt{(3-6)^2 + (-2-7)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{108}.$$

c) En généralisant les exemples précédents, on obtient

$$|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2}.$$

Cette formule renvoie au chemin qui relie A et B en suivant les directions des axes. On retrouve ici un des trois aspects du repérage mis en évidence lors de la résolution de la question 5 : celui qui visualise les coordonnées d'un point au moyen d'un cheminement issu de l'origine parallèlement aux trois axes successivement. La figure 27 montre ce chemin pour les points G et N.

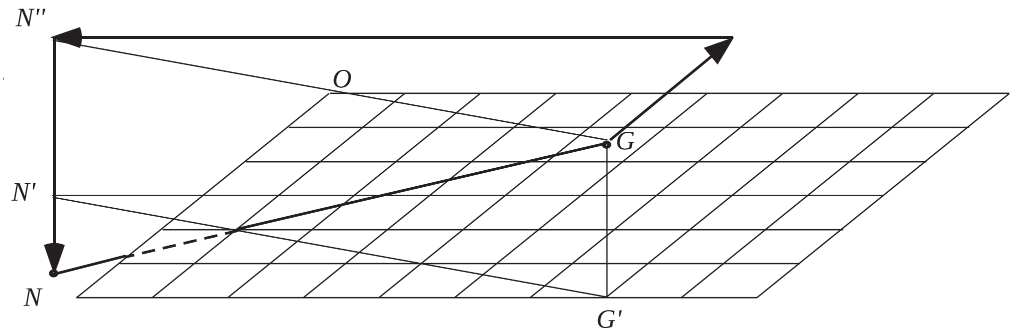


FIG. 27

La longueur $|AB|$ est aussi appelée la *norme* ou la *longueur du vecteur* $\overrightarrow{AB}$.

10. Le produit scalaire

a) Placez dans un repère orthonormé d'origine O les points $A(1,5,3)$ et $B(-3,-3,6)$. Le triangle AOB est-il rectangle en O ? Justifiez votre réponse.

b) Dans un repère orthonormé dont l'origine est O, quelle est la condition pour qu'un triangle AOB soit rectangle en O si A et B ont pour coordonnées générales $A(a_1, a_2, a_3)$ et $B(b_1, b_2, b_3)$?

Dans les cours traditionnels, la définition du produit scalaire de deux vecteurs est imposée d'emblée. Notre intention ici est de motiver le calcul de la somme des produits des composantes correspondantes. Voilà pourquoi le produit scalaire apparaît pour la première fois dans un cas particulièrement utile, celui où il est nul.
Par ailleurs, nous sommes conscients que l'aspect projection orthogonale d'un vecteur et produit scalaire est à peine abordé, mais cette lacune peut être aisément comblée par des exercices classiques sur le produit scalaire.

a) Le triangle AOB est rectangle en O car il vérifie la relation de Pythagore. En effet

$$\begin{aligned}
|OA|^2 &= (1-0)^2 + (5-0)^2 + (1-0)^2 = 35 \\
|OB|^2 &= (-3-0)^2 + (-3-0)^2 + (6-0)^2 = 54 \\
|AB|^2 &= (-3-1)^2 + (-3-5)^2 + (6-3)^2 = 89.
\end{aligned}$$

Donc

$$|OA|^2 + |OB|^2 = |AB|^2.$$

b) Lorsque les coordonnées de A et B sont générales, on obtient

$$\begin{aligned}
|OA|^2 &= {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 \\
|OB|^2 &= {b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2 \\
|AB|^2 &= (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2.
\end{aligned}$$

Pour que le triangle AOB soit rectangle en O, il faut et il suffit que la relation de Pythagore soit vérifiée, soit :

$${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2 = a_1^2+b_1^2-2a_1b_1+a_2^2+b_2^2-2a_2b_2+a_3^2+b_3^3-2a_3b_3,$$

ce qui revient à :

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

La somme de produits $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ est appelée *produit scalaire des deux vecteurs* $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

On note :

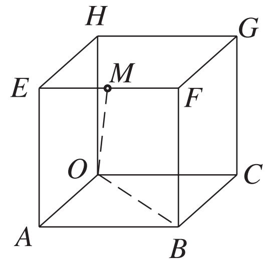
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Ainsi, pour obtenir le produit scalaire de deux vecteurs quelconques, on fait la somme des produits de leurs composantes respectives.

Lorsque le produit scalaire de deux vecteurs est *nul*, ils sont *orthogonaux* et réciproquement.

11. Détermination d'un angle

a) Soit le cube d'arête 2.



Calculez l'angle BOM, le point M étant le milieu de l'arête EF.

b) En général, dans un repère orthonormé d'origine O, quelle est la mesure de l'angle $\hat{O}$ d'un triangle AOB si A et B ont pour coordonnées générales (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) ?

a) Dans le triangle BOM, nous utilisons la relation de Pythagore généralisée

$$|BM|^2 = |OB|^2 + |OM|^2 - 2|OB||OM| \cos \hat{O}$$

Les mesures des trois côtés du triangle peuvent être calculées par exemple comme à la question 8. Cela donne

$$|BM| = \sqrt{5}; \quad |OB| = \sqrt{8}; \quad |OM| = 3.$$

Dès lors, avec ces valeurs, la relation ci-dessus devient

$$5 = 8 + 9 - 6\sqrt{8} \cos \hat{O},$$

ce qui permet de déduire que

$$\cos \hat{O} = \frac{12}{6\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

et, de là, que

$$\hat{O} = 45°.$$

b) Pour le triangle AOB, la relation de Pythagore généralisée s'écrit

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB| \cos \hat{O}.$$

En y introduisant la formule de la distance entre deux points, on obtient

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2 = {a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2-2|OA||OB| \cos \hat{O}.$$

Après développement et simplification, il reste

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3 = -2|OA||OB|\cos\hat{O},$$

ou encore

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |OA||OB|\cos\hat{O}.$$

On reconnaît dans le membre de gauche le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. Le membre de droite en donne une nouvelle expression :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |OA||OB|\cos\hat{O}.$$

> Le *produit scalaire* de deux vecteurs est égal au produit de leurs longueurs multiplié par le cosinus de l'angle entre les deux.

Cette deuxième définition du produit scalaire permet de déterminer l'angle $\hat{O}$ lorsqu'on connaît les coordonnées de A et B.

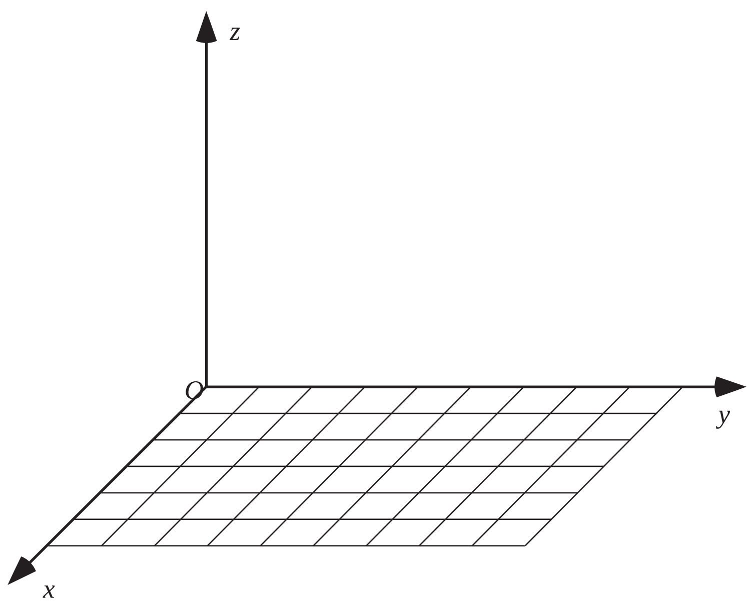
Observons encore qu'en écrivant l'expression précédente $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |OA|(|OB|\cos\hat{O})$, on met en évidence le facteur $(|OB|\cos\hat{O})$ qui n'est autre que la projection orthogonale de $\overrightarrow{OB}$ sur $\overrightarrow{OA}$. Le produit scalaire de deux vecteurs peut donc être vu comme la longueur du premier vecteur multipliée par la longueur de la projection orthogonale du deuxième vecteur sur le premier, moyennant un changement de signe dans le cas où l'angle est obtus.

5 Équations des droites et des plans

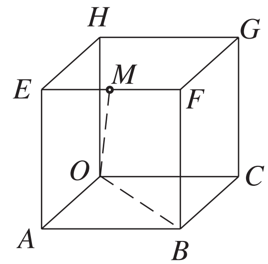
12. Équations de droites et de plans particuliers

a) Décrivez le lieu des points qui vérifient chacune des conditions suivantes. Visualisez-le dans le repère en carton, ensuite représentez-le dans un repère orthonormé.

Équations	**Description du lieu**
$y = 8$	
$x = y$	
$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$	
$z = 0$	
$y + z = 5$	
$\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$	
$x = -2$	



b) Soit le cube d'arête 2 représenté ci-dessous.



Quelles sont les équations des lieux suivants ?

Lieux	**Équations**
plan ABC	
droite HF	
droite BF	
plan HBF	
plan AEG	

c) Reprenez le cube et complétez le tableau suivant.

Lieux	**Équations**
plan OEF	
	$z + 2y = 2$
droite OF	
droite AG	
	$\begin{cases} y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$
	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$
	$x^2 + y^2 = 4$
cercle de centre H passant par G et E	

L'objectif de cette question est de rencontrer des équations d'objets de l'espace et d'identifier la forme des équations de droites et de plans dans l'espace. En particulier, au terme de cette fiche, les élèves devraient avoir observé que l'absence d'une variable dans une équation doit être interprétée comme un degré de liberté : cette variable peut prendre n'importe quelle valeur.

a) Chaque lieu peut être décrit de plusieurs façons. En voici quelques-unes.

$\boxed{y = 8}$

- Comme la deuxième coordonnée est fixée, il s'agit de tous les points de coordonnées $(a, 8, a)$.
- C'est le plan parallèle à Oxz passant par exemple par $(0, 8, 0)$.
- C'est le plan perpendiculaire à Oy passant par exemple par $(0, 8, 0)$.

$\boxed{x = y}$

- Comme les deux premières coordonnées sont égales, il s'agit de l'ensemble des points de coordonnées (a, a, c).
- C'est le plan perpendiculaire à Oxy qui le coupe selon la bissectrice des axes.
- C'est le plan vertical déterminé par Oz et la bissectrice des axes Ox et Oy.
- C'est le plan bissecteur des plans Oxz et Oyz.

$\boxed{\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}}$

- C'est l'ensemble des points de coordonnées $(5, 2, c)$.
- C'est la droite intersection des deux plans verticaux $x = 5$ et $y = 2$.
- C'est la droite verticale qui perce le plan Oxy en $(5, 2, 0)$.

$\boxed{z = 0}$

- Ce sont tous les points de coordonnées $(a, b, 0)$
- C'est le plan horizontal Oxy

$\boxed{y + z = 5}$

- C'est l'ensemble des points (a, b, c) tels que $b + c = 5$
- C'est le plan parallèle à Ox qui coupe le plan de coordonnées Oyz selon la droite $z = 5 - y$ du plan $x = 0$.

$$\boxed{\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}}$$

- C'est l'ensemble des points de coordonnées $(a, 0, a)$
- C'est la bissectrice du plan Oxz
- C'est la droite d'intersection des plans d'équation $x = z$ et $y = 0$.

$$\boxed{x = -2}$$

- C'est l'ensemble des points $(-2, y, z)$
- C'est le plan parallèle à Oyz passant par exemple par $(-2, 0, 0)$.

b)

plan ABC	$z = 0$
droite HF	$\begin{cases} x = y \\ z = 2 \end{cases}$
droite BF	$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$
plan HBF	$x = y$
plan AEG	$x + y = 2$

c)

plan OEF	$x = z$
plan passant par E, H et le milieu de OC	$z + 2y = 2$
droite OF	$x = y = z$
droite AG	$\begin{cases} x + y = 2 \\ y = z \end{cases}$
droite BC	$\begin{cases} y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$
Sphère de centre O de rayon 2	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$
Cylindre circulaire droit d'axe $0z$	$x^2 + y^2 = 4$
cercle de centre H passant par G et E	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$

Les nombreux exemples présentés permettent d'observer que l'équation d'un plan est du premier degré en x, y et z et que le lieu qui correspond à une équation du premier degré est un plan. En outre, pour caractériser une droite de l'espace, il faut deux équations, celles de deux plans dont elle est l'intersection.

13. L'équation d'un plan

a) Décrivez le lieu des points qui vérifient la condition suivante

$$x + y - z - 4 = 0.$$

Pour cela, visualisez sur la maquette et dans le repère
– les points (x, y, z) de ce lieu tels que $z = 0$,
– les points (x, y, z) de ce lieu tels que $z = 1$,
– les points (x, y, z) de ce lieu tels que $z = 2$.

Caractérisez ensuite le lieu des points qui vérifient la condition

$$ax + by + cz + d = 0.$$

b) Le lieu des points qui vérifient l'égalité

$$7x^2 + 2y - 3z + 2 = 0$$

est-il un plan ?
Et le lieu des points qui vérifient

$$3xy + 2y - z = 0\,?$$

c) Caractérisez maintenant l'équation d'un plan.

L'objectif de cette fiche est de démontrer que l'équation d'un plan est une équation du premier degré en x, y et z et réciproquement. Il n'est pas évident de voir un plan comme engendré par une infinité de droites parallèles s'appuyant sur une droite. C'est bien différent du plan défini par deux droites parallèles ou sécantes.

a) On observe que les intersections du lieu avec les plans horizontaux $z = 0$, $z = 1$, $z = 2, \ldots$ sont les droites d'équations $z = 0, x + y = 4$, $z = 1, x + y = 5$, $z = 2, x + y = 6 \ldots$. Ces droites sont parallèles et percent le plan vertical Oyz aux points de coordonnées (y, z) telles que $y - z = 4$. Ces points sont donc alignés. Comme il en est ainsi pour les intersections du lieu avec tous les plans horizontaux $z = k, \quad k \in \mathbb{R}$, le lieu est formé de toutes les droites horizontales parallèles s'appuyant sur la droite d'équation$x = 0, y - z = 4$ du plan Oyz ? C'est donc un plan.

Ce qui a été observé pour l'équation particulière $x + y - z - 4 = 0$ reste vrai pour une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$. Les points qui vérifient cette équation appartiennent à un plan de l'espace.

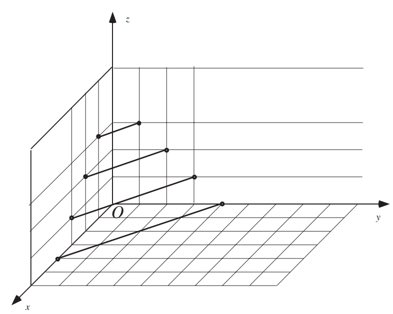


Fig. 28

b) Les points (x, y, z) qui vérifient $7x^2 + 2y - 3z + 2 = 0$ et qui appartiennent au plan horizontal $z = 0$ satisfont à l'équation $7x^2 + 2y + 2 = 0$. Ils se trouvent donc sur une parabole. Dès lors, le lieu n'est pas un plan.

Considérons enfin le lieu des points qui vérifient l'équation $3xy + 2y - z = 0$. Les points de ce lieu qui appartiennent au plan horizontal $z = 0$ satisfont à l'équation $3xy + 2y = 0$. Ils sont donc soit sur la droite $y = 0$, soit sur la droite $3x + 2 = 0$. Le lieu n'est donc pas non plus un plan.

De façon générale, quel que soit le lieu donné par une équation qui n'est pas du premier degré, il est possible de trouver un plan dont l'intersection avec ce lieu n'est pas une droite.

c) L'équation d'un plan est une équation du premier degré en x, y et z et réciproquement.

14. Détermination de l'équation d'un plan perpendiculaire à un vecteur donné

a) Déterminez l'équation d'un plan passant par O et perpendiculaire au vecteur $\vec{v}$ de composantes $(6, -2, -1)$.
Et si, au lieu de passer par O, le plan passe par $A(0, 2, 4)$?

b) Quelle est l'équation d'un plan perpendiculaire à un vecteur $\vec{v} = (a, b, c)$ et passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$?

Cette fiche vise à donner une interprétation géométrique aux coefficients de l'équation d'un plan.

a) Pour tout point $P(x, y, z)$ de ce plan, le vecteur $\overrightarrow{OP}$ appartient à ce plan et est donc perpendiculaire à $\vec{v}$. Par suite, le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul, ce qui s'écrit

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{v} = 0,$$

c'est-à-dire

$$6x - 2y - 1z = 0. \tag{1}$$

On reconnaît dans (1) l'équation d'un plan, c'est l'équation cherchée.

Cherchons à présent l'équation du plan perpendiculaire au vecteur $\vec{v} = (6, -2, -1)$ passant par le point $A(0, 2, 4)$.

Le raisonnement est similaire. Pour tout point $P(x, y, z)$ de ce plan, le vecteur $\overrightarrow{AP}$, de composantes $(x, y - 2, z - 4)$, appartient à ce plan et est donc perpendiculaire à $\vec{v}$. Par suite, le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul, ce qui s'écrit

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = 0,$$

c'est-à-dire

$$6x - 2(y - 2) - 1(z - 4) = 0,$$

ou

$$6x - 2y - 1z = -8. \tag{2}$$

C'est l'équation recherchée.

On remarque que les coefficients des variables dans les équations (1) et (2) sont les mêmes, à savoir les composantes du vecteur perpendiculaire au plan. La deuxième question de cette fiche conduit à généraliser ce résultat.

b) Le plan perpendiculaire à $\vec{v} = (a, b, c)$ et passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ est tel que, pour tout point $P(x, y, z)$ de ce plan, le produit scalaire de $\overrightarrow{AP}$ et de $\vec{v}$ est nul, ce qui s'écrit

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0,$$

ou encore

$$ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0.$$

En posant $-ax_A - by_A - cz_A = d$, l'équation précédente s'écrit

$$ax + by + cz + d = 0. \tag{3}$$

On observe que, dans (3), les coefficients des variables sont bien les composantes du vecteur $\vec{v}$, perpendiculaire au plan.

Nous avons remarqué que les coefficients des équations (1) et (2) étaient les mêmes. Or, ces équations sont celles de deux plans parallèles puisqu'ils sont perpendiculaires à un même vecteur $\vec{v}$. De façon générale, les équations de plans parallèles ont les coefficients des variables proportionnels. Par exemple, l'équation

$$12x - 4y - 2z = -15$$

est celle d'un plan parallèle à ceux d'équation (1) et (2).

15. Détermination de l'équation d'un plan passant par trois points donnés

Déterminez l'équation du plan passant par les points $A(1,2,3)$, $B(-1,-4,2)$ et $C(7,1,-5)$.

Avant toute chose, vérifions que les trois points A, B et C ne sont pas alignés. Pour cela, considérons les vecteurs $\overrightarrow{AB} = (-2,-6,-1)$ et $\overrightarrow{AC} = (6,-1,-8)$. Il est clair qu'il n'existe par de scalaire k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Une première manière de résoudre le problème est d'imposer que les coordonnées des trois points satisfassent à l'équation générale d'un plan $ax + by + cz + d = 0$. Cela conduit au système d'équations

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + d = 0 \\ -a - 4b + 2c + d = 0 \\ 7a + b - 5c + d = 0 \end{cases}$$

Nous sommes en présence d'un système de 3 équations à 4 inconnues. Mais, comme l'équation d'un plan est déterminée à un facteur près, nous posons $d = 1$ et le système d'équations devient

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + 1 &= 0 \\ -a - 4b + 2c + 1 &= 0 \\ 7a + b - 5c + 1 &= 0 \end{cases}$$

Une calculatrice donne la solution, à quatre décimales, $a = 0,4017$,
$b = 0,1880$ et $c = -0,3247$ et une équation du plan cherché est

$$-0,4017x + 0,1880y - 0,3247z + 1 = 0. \tag{4}$$

La méthode qui consiste à poser $d = 1$ ne fonctionne pas dans tous les cas comme le montre l'exemple qui suit. Essayons de déterminer une équation du plan qui passe par les points $(1,1,4)$, $(1,2,2)$ et $(2,5,2)$. Le système d'équations est

$$\begin{cases} a+b+4c+d &= 0 \\ a+2b+2c+d &= 0 \\ 2a+5b+2c+d &= 0 \end{cases}$$

En posant $d=1$, le système devient

$$\begin{cases} a+b+4c+1 &= 0 \\ a+2b+2c+1 &= 0 \\ 2a+5b+2c+1 &= 0 \end{cases}$$

Et la calculatrice dans ce cas affiche un message d'erreur. Il n'était donc pas permis de poser $d=1$. Essayons alors de poser $c=1$. Le système devient

$$\begin{cases} a+b+4+d &= 0 \\ a+2b+2+d &= 0 \\ 2a+5b+2+d &= 0 \end{cases}$$

et a comme solution $a=-6$, $b=2$ et $d=0$. Une équation du plan cherché est $-6x+2y+z=0$. ce plan passe par l'origine. c'est la raison pour laquelle poser $d=1$ a mené à une impasse. C'est le même plan que celui de la question 14.

Voici maintenant une deuxième manière de résoudre le problème.

Cherchons un vecteur $\vec{v}$, de composantes (a,b,c), perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$. Les composantes de $\vec{v}$ doivent être telles que

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC}\cdot\vec{v}=0,$$

ou

$$-2a-6b-c=0 \qquad \text{et} \qquad (6a-b-8c=0.$$

Comme les composantes d'un vecteur sont déterminées à une constante multiplicative près, nous pouvons poser $a=1$. Les équations à résoudre sont alors

$$\begin{cases} -2-6b-c &= 0 \\ 6-b-8c &= 0 \end{cases}$$

La solution est $b=-\frac{22}{47}$ et $c=\frac{38}{47}$. Le plan cherché appartient à la famille des plans perpendiculaires à $\vec{v}$ et admet donc une équation de la forme

$$x-\frac{22}{47}y+\frac{38}{47}z+d=0.$$

Pour déterminer d, il reste à tenir compte du fait que l'équation doit être vérifiée par les coordonnées de l'un des trois points donnés. Ce qui conduit à $d = -\frac{117}{47}$. Une équation du plan décrit est donc

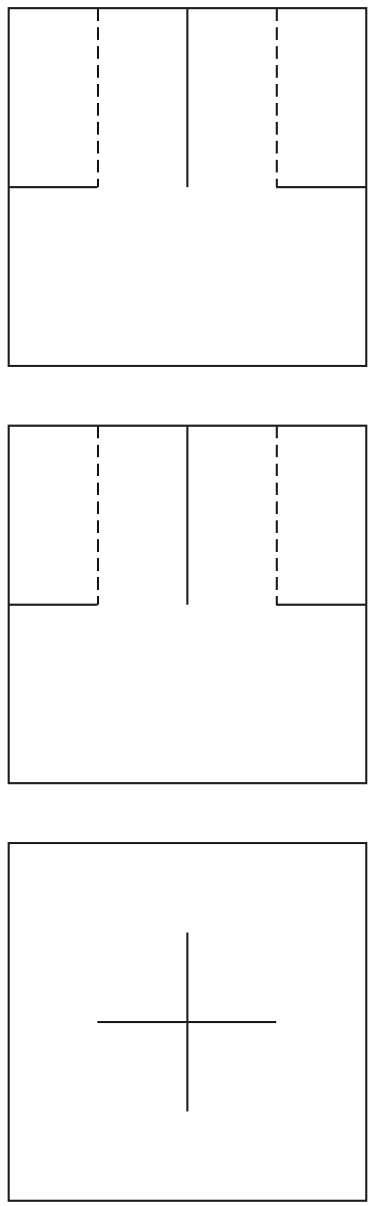
$$47x - 22y + 38z - 117 = 0.$$

Remarquons pour terminer qu'en divisant les deux membres de cette équation par -117, nous retrouverions l'équation (4).

Notons qu'ici aussi, la méthode qui consiste à poser $a = 1$ ne conduit pas toujours à la solution. Dans le cas d'un plan parallèle à l'axe Ox, le coefficient de x serait nul et c'est un autre coefficient que a qu'il faudrait choisir égal à 1.

Annexe : patron pour la construction d'un repère orthogonal.

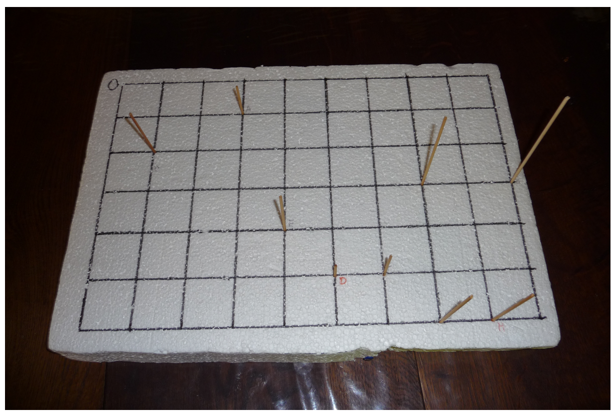
Matériel : trois carrés de 20 cm de côté en carton léger.



Couper selon les traits continus intérieurs au carré.
Plier selon les traits interrompus pour l'assemblage.

Construction d'une maquette en trois dimensions

Prendre une plaque de polystyrène expansé assez épaisse (au rayon isolation des magasins de bricolage). Tracer un quadrillage. Sur la maquette ci-dessous, les carrés mesurent 5 cm de côté. Ensuite, découper des piques à brochettes de la hauteur voulue et les planter aux bons endroits du quadrillage de manière à ce qu'ils dépassent de la hauteur indiquée dans l'énoncé. Sur une telle maquette, le non alignement de A, B et C (fiche 7) devient flagrant.



1. Le plus court chemin

Nous utiliserons le matériel suivant : un cube en plastique (ou un cube fabriqué avec du fil de fer, ou des pailles et des cure-pipes, ou. . ..) et des piques à brochette. Posez le cube face à vous.

a) Appelons M le point milieu de l'arête supérieure de la face avant de ce cube.

   1° Quel est le plus court chemin du point M à la face arrière du cube ?

   2° Quel est le plus court chemin du point M à un plan vertical diagonal du cube ?

b) Soient D et H les extrémités de l'arête verticale arrière gauche et soient I et J les milieux des arêtes horizontales de la face de droite. Appelons N le point situé sur l'arête verticale avant droite, aux trois quarts de la hauteur. Quel est le plus court chemin du point N au plan $DHIJ$?

c) Soit S un sommet quelconque du cube. Quel est le plus court chemin de S au plan passant par les autres sommets des trois arêtes contenant S ?

Dans un premier temps, vous êtes invités à manipuler le cube et à montrer le plus court chemin. Dans un second temps, vous êtes invités à décrire le plus court chemin de manière à ce que quelqu'un qui n'est pas présent puisse réaliser la construction : par quels points faut-il passer, quelle direction faut-il prendre ? N'hésitez pas à utiliser les éléments du cube.

2. La planche à clou

Vous disposez d'un niveau d'eau, d'une équerre et d'un fil à plomb. Un long clou est planté dans une planche. Comment vérifier si ce clou est perpendiculaire à la planche ? Envisagez chacun des cas suivants :

a) la planche est horizontale,

b) la planche est verticale,

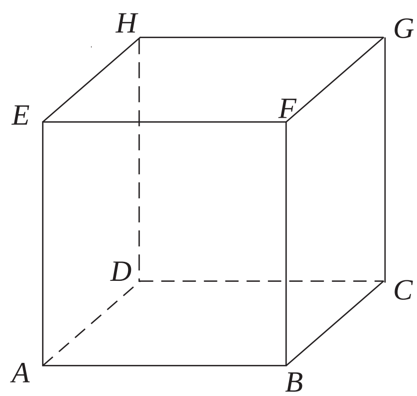
c) la planche est dans une position quelconque.

Énoncez un critère de la perpendicularité d'une droite et d'un plan.

3. Dessiner le plus court chemin

Voici un cube dessiné en perspective cavalière. Reproduisez-en quelques exemplaires. Pour chaque question de la fiche 1 :

– représentez votre solution,
– justifiez que la droite dessinée représente une perpendiculaire au plan considéré.

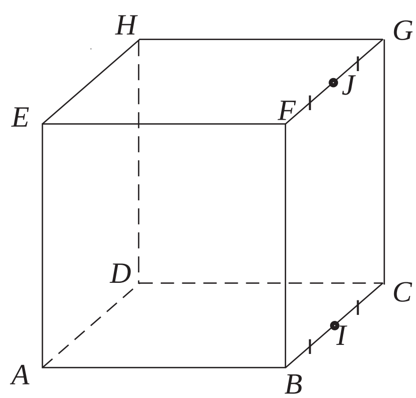


4. Plans perpendiculaires

Reprenons les plans envisagés précédemment : CGH, DBF, HJI et BGE.

a) Pour chacun de ces plans, recherchez plusieurs plans qui lui sont perpendiculaires. Donnez une définition de la perpendicularité de deux plans.

b) Recherchez
  – un plan contenant AF et perpendiculaire au plan CGH,
  – un plan contenant AF et perpendiculaire au plan HJI,
  – un plan contenant FH et perpendiculaire au plan BGE.



5. Repérage dans la classe

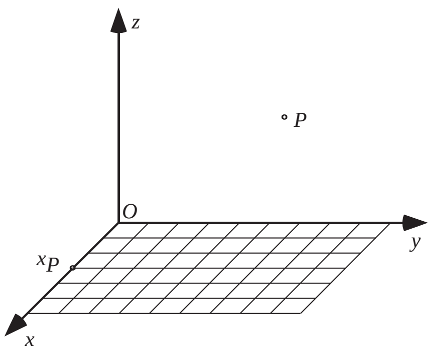
a) Imaginez que le local dans lequel vous vous trouvez est vide de tout mobilier. Choisissez un point de ce local. Rédigez ensuite un message qui permettrait à une personne réceptrice de retrouver le point choisi.

b) Prenez un cube et choisissez un point dans l'espace. Rédigez un message qui décrit la position du point par rapport au cube.

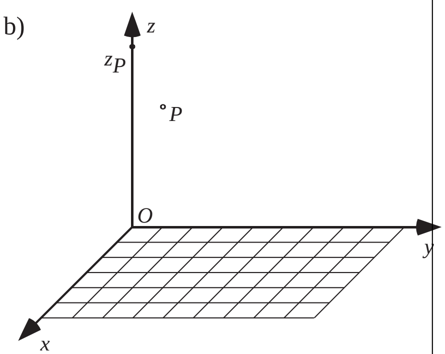
6. S'entraîner à repérer des points dans l'espace

Sur chaque figure, une des coordonnées du point P est indiquée. Déterminez celles qui manquent. Aidez-vous du repère en carton illustré à la figure 15 que vous pouvez fabriquer selon les instructions données dans l'annexe.

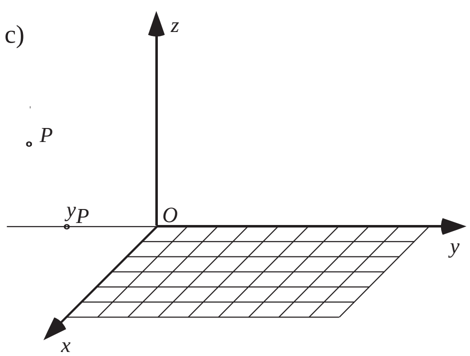
a)



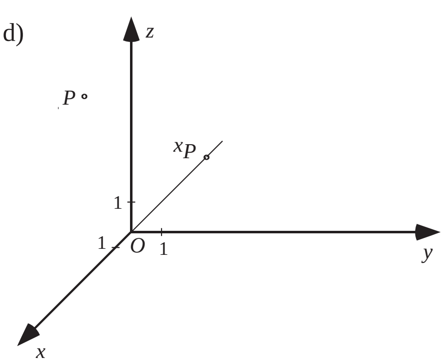
b)



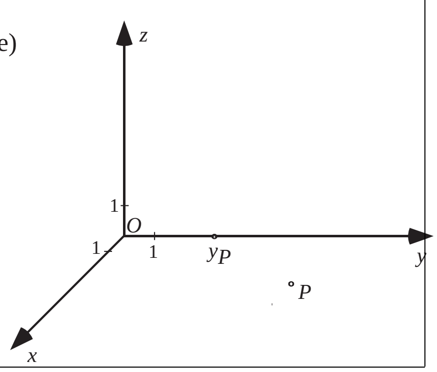
c)



d)



e)



7. Opérations sur les coordonnées

Les coordonnées du point O sont $(0,0,0)$ et celles du point A sont $(1,3,1)$.

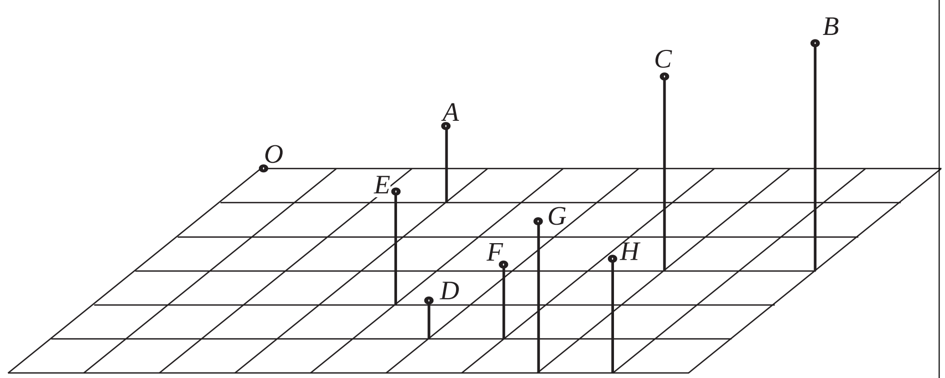
a) Parmi les points représentés, déterminez-en deux alignés avec l'origine. Quelles sont leurs coordonnées ?

b) Complétez les coordonnées de $K(x,6,z)$ pour que K, O et A soient alignés.

c) Les droites EA et FG sont parallèles sur la représentation. Le sont-elles dans la réalité ?

d) Parmi les points représentés, y en a-t-il trois qui, avec l'origine, forment un parallélogramme ? Quelles sont leurs coordonnées ?

e) Déterminez les coordonnées du point L telles que $OBLF$ soit un parallélogramme.

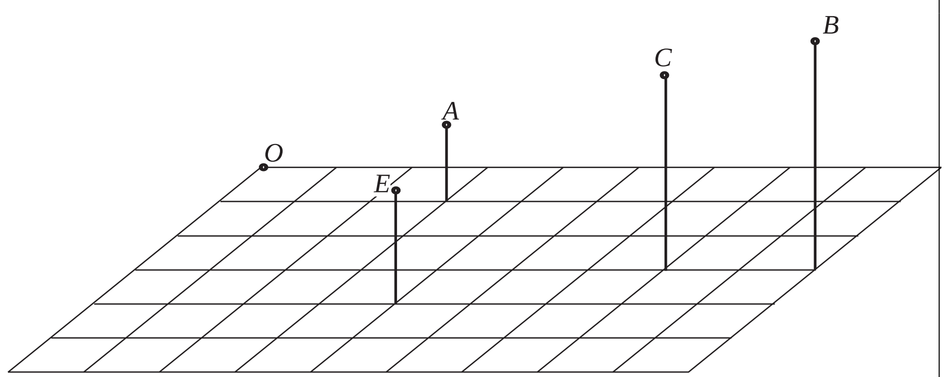


8. Alignement et parallélisme

a) Complétez les coordonnées $(2, y, z)$ du point S pour que S, A et C soient alignés. Représentez S.

b) Écrivez vectoriellement une condition d'alignement de trois points quelconques P, Q, R.

c) Utilisez les vecteurs pour déterminer les coordonnées du point T telles que $ACTE$ soit un parallélogramme.



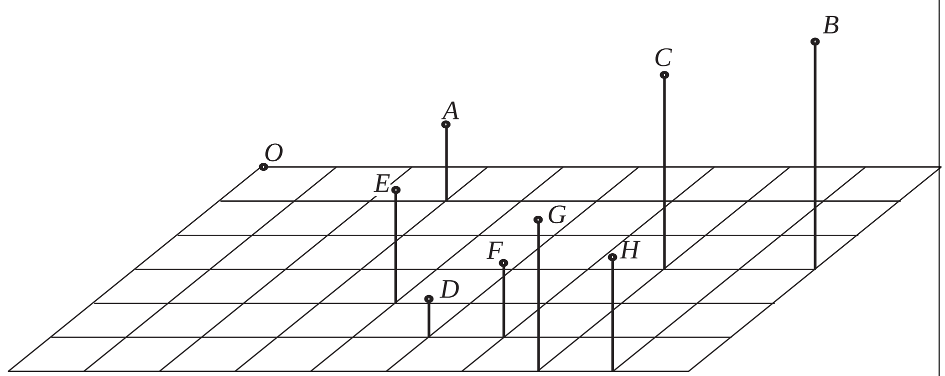
9. La distance entre deux points

Reprenons le repère orthonormé utilisé précédemment.

a) Calculez la distance entre les points O et E et celle entre les points G et B.

b) Calculez la distance du point G au point $M(15, 20, 10)$ et celle du point G au point $N(3, -2, -1)$.

c) Trouvez une formule qui donne la distance entre deux points quelconques $A(a_1, a_2, a_3)$ et $B(b_1, b_2, b_3)$.



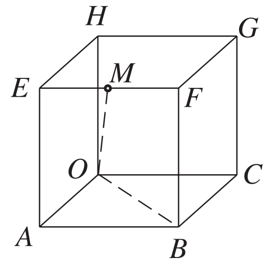
10. Le produit scalaire

a) Placez dans un repère orthonormé d'origine O les points $A(1, 5, 3)$ et $B(-3, -3, 6)$. Le triangle AOB est-il rectangle en O ? Justifiez votre réponse.

b) Dans un repère orthonormé dont l'origine est O, quelle est la condition pour qu'un triangle AOB soit rectangle en O si A et B ont pour coordonnées générales $A(a_1, a_2, a_3)$ et $B(b_1, b_2, b_3)$?

11. Détermination d'un angle

a) Soit le cube d'arête 2.



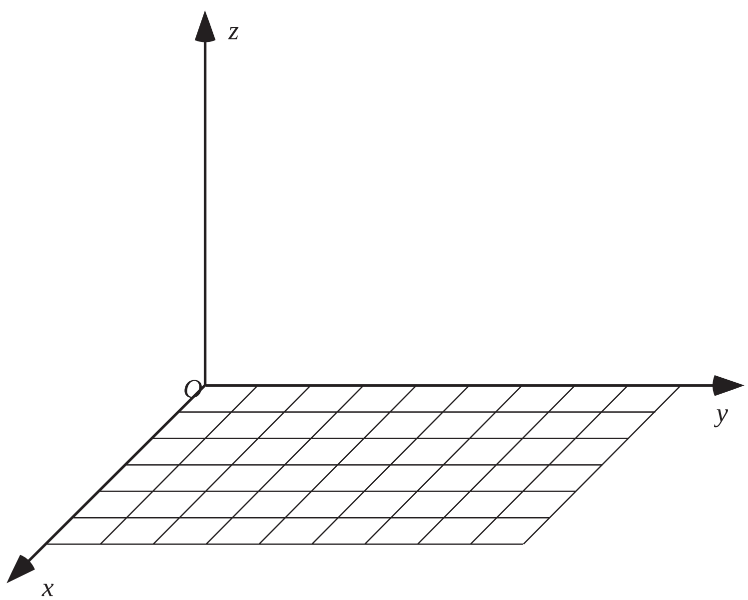
Calculez l'angle BOM, le point M étant le milieu de l'arête EF.

b) En général, dans un repère orthonormé d'origine O, quelle est la mesure de l'angle $\hat{O}$ d'un triangle AOB si A et B ont pour coordonnées générales (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) ?

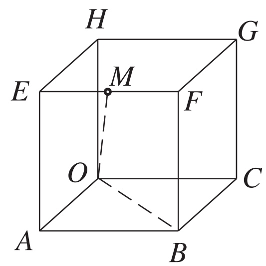
12. Équations de droites et de plans particuliers

a) Décrivez le lieu des points qui vérifient chacune des conditions suivantes. Visualisez-le dans le repère en carton, ensuite représentez-le dans un repère orthonormé.

Équations	**Description du lieu**
$y = 8$	
$x = y$	
$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$	
$z = 0$	
$y + z = 5$	
$\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$	
$x = -2$	



b) Soit le cube d'arête 2 représenté ci-dessous.



Quelles sont les équations des lieux suivants ?

Lieux	**Équations**
plan ABC	
droite HF	
droite BF	
plan HBF	
plan AEG	

c) Reprenez le cube et complétez le tableau suivant.

Lieux	**Équations**
plan OEF	
	$z + 2y = 2$
droite OF	
droite AG	
	$\begin{cases} y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$
	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$
	$x^2 + y^2 = 4$
cercle de centre H passant par G et E	

13. L'équation d'un plan

a) Décrivez le lieu des points qui vérifient la condition suivante

$$x + y - z - 4 = 0.$$

Pour cela, visualisez sur la maquette et dans le repère
– les points (x, y, z) de ce lieu tels que $z = 0$,
– les points (x, y, z) de ce lieu tels que $z = 1$,
– les points (x, y, z) de ce lieu tels que $z = 2$.

Caractérisez ensuite le lieu des points qui vérifient la condition

$$ax + by + cz + d = 0.$$

b) Le lieu des points qui vérifient l'égalité

$$7x^2 + 2y - 3z + 2 = 0$$

est-il un plan ?
Et le lieu des points qui vérifient

$$3xy + 2y - z = 0\,?$$

c) Caractérisez maintenant l'équation d'un plan.

14. Détermination de l'équation d'un plan perpendiculaire à un vecteur donné

a) Déterminez l'équation d'un plan passant par O et perpendiculaire au vecteur $\vec{v}$ de composantes $(6, -2, -1)$.
Et si, au lieu de passer par O, le plan passe par $A(0, 2, 4)$?

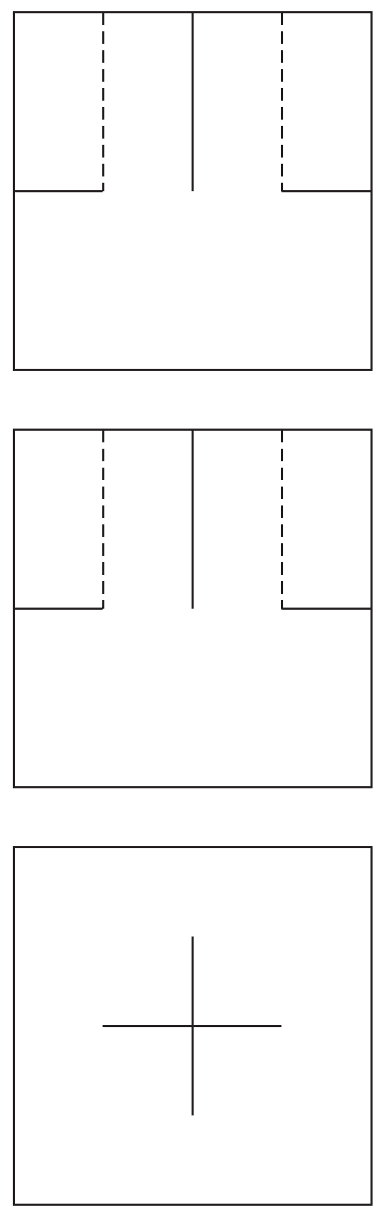
b) Quelle est l'équation d'un plan perpendiculaire à un vecteur $\vec{v} = (a, b, c)$ et passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$?

15. Détermination de l'équation d'un plan passant par trois points donnés

Déterminez l'équation du plan passant par les points $A(1, 2, 3)$, $B(-1, -4, 2)$ et $C(7, 1, -5)$.

Annexe : patron pour la construction d'un repère orthogonal.

Matériel : trois carrés de 20 cm de côté en carton léger.



Couper selon les traits continus intérieurs au carré.
Plier selon les traits interrompus pour l'assemblage.