Table des matières

Partie 1

Les fractions continues, outil d'approximation

BERNARD François, CITTA Micheline, KRYSINSKA Maria

1.1 Introduction

Après une introduction élémentaire à la notion de développement en fraction continue d'un nombre rationnel, par le biais du dallage de rectangles, nous calculons des réduites et observons qu'elles sont des approximations rationnelles du nombre rationnel initial. En exposant le problème des engrenages du planétaire de la Cathédrale de Strasbourg, que les fractions continues ont contribué à résoudre au 19^{e} siècle, nous voulons montrer qu'il est parfois utile de trouver une fraction assez simple pour « remplacer » un nombre rationnel dont l'expression fractionnaire comporte des numérateurs et dénominateurs trop grands pour être utilisés aisément. Comme la technique mise au point pour le développement en fraction continue d'un rationnel fonctionne aussi pour un irrationnel, nous l'appliquons à $\sqrt{2}$ et à π de manière à faire découvrir de nouvelles propriétés des réduites. L'étude de l'échelle musicale bien tempérée, adoptée au 17^{e} siècle, offre l'occasion de mettre en évidence le rôle majeur d'une réduite dans l'approximation du logarithme en base 2 de 3/2.

1.2 Développement en fraction continue d'un nombre rationnel

Nous avons choisi d'introduire les fractions continues par le dallage de rectangles. Daller un rectangle, c'est, selon la définition de Friedelmeyer (Friedelmeyer, 2004), le recouvrir de carrés à intérieurs disjoints les plus grands possibles et à côtés parallèles aux côtés du rectangle.

Commençons par réaliser le dallage d'un rectangle de dimensions 127 et 24 (Fig. 1.1).

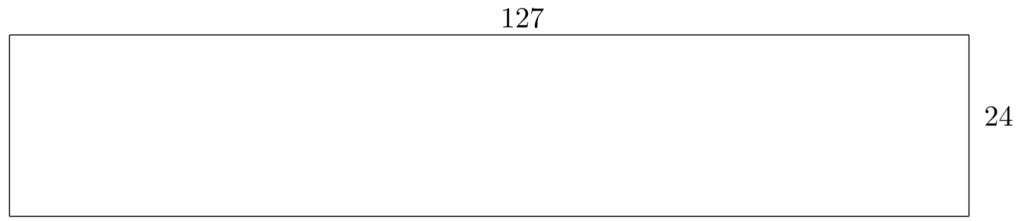


Fig. 1.1 – Rectangle 127×24

• Première étape : on peut couvrir partiellement ce rectangle avec 5 carrés de côté 24 et il restera un rectangle de dimensions 24 et 7 (Fig. 1.2). Ce dallage partiel se traduit par l'égalité

$$127 = 5 \times 24 + 7.$$

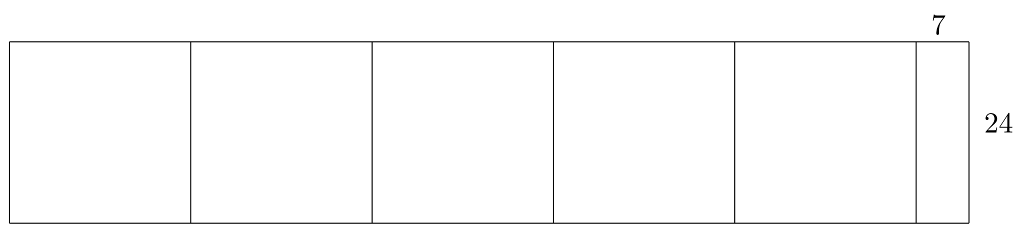


Fig. 1.2 – Dallage du rectangle 127×24

• Deuxième étape : le rectangle de 24 par 7 peut être couvert partiellement par 3 carrés de côté 7 et il restera un rectangle de dimensions 7 et 3 (Fig. 1.3). Ce complément de dallage se traduit par l'égalité

$$24 = 3 \times 7 + 3.$$

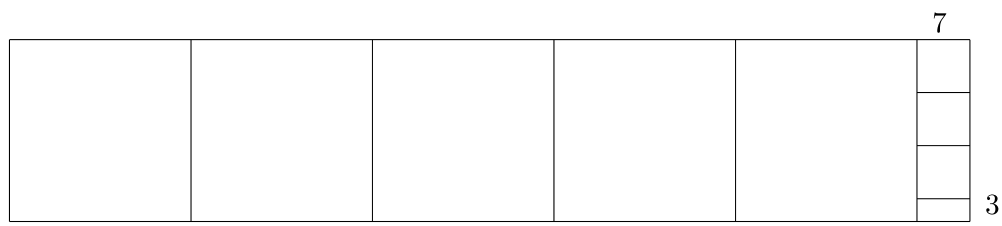


FIG. 1.3 – Dallage du rectangle 24×7

• Troisième étape : le rectangle de dimensions 7 et 3 peut être couvert partiellement par 2 carrés de côté 3 et il restera un rectangle de dimensions 3 et 1 (Fig. 1.4). Ce dallage du rectangle restant se traduit par l'égalité

$$7 = 2 \times 3 + 1.$$

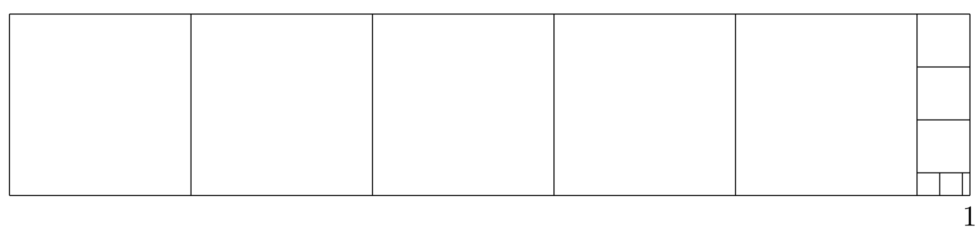


FIG. 1.4 – Dallage du rectangle 7×3

• Quatrième étape : le rectangle de dimensions 3 et 1 peut être couvert totalement par 3 carrés de côté 1 (Fig. 1.5). Ce dallage du rectangle restant se traduit par l'égalité

$$3 = 3 \times 1.$$

Le rectangle initial étant entièrement couvert, le dallage est terminé.

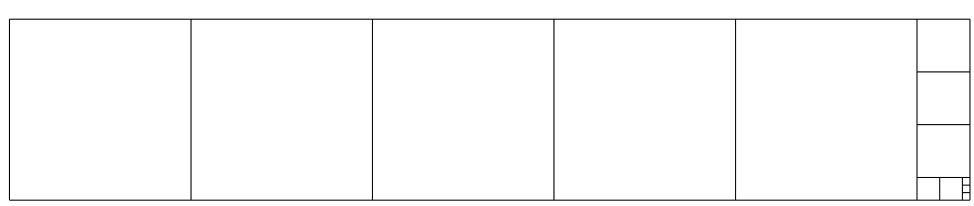


FIG. 1.5 – Dallage du rectangle 3×1

Reprenons les quatre égalités précédentes et écrivons-les sous forme de fractions

$$\begin{array}{lll} 127 = 5 \times 24 + 7 & \text{ou} & \dfrac{127}{24} = 5 + \dfrac{7}{24} \\[2ex] 24 = 3 \times 7 + 3 & \text{ou} & \dfrac{24}{7} = 3 + \dfrac{3}{7} \\[2ex] 7 = 2 \times 3 + 1 & \text{ou} & \dfrac{7}{3} = 2 + \dfrac{1}{3} \\[2ex] 3 = 3 \times 1 & \text{ou} & \dfrac{3}{1} = 3 + 0 \end{array}$$

Ces fractions peuvent être regroupées en une seule :

$$\frac{127}{24} = 5 + \frac{7}{24} = 5 + \cfrac{1}{\cfrac{24}{7}} = 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{3}{7}} = 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{3}}} = 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}} \tag{1.1}$$

Une telle expression s'appelle une *fraction continue simple*[1] *ou fraction continue arithmétique* (car les numérateurs de toutes les fractions sont égaux à 1). Les nombres 5, 3, 2 et 3 qui la caractérisent correspondent aux nombres entiers de carrés qui, au cours du dallage, ont pu être successivement placés dans chaque rectangle et s'appellent les *quotients partiels*.

Cette fraction à quatre étages mène à deux calculs possibles :

- soit effectuer les opérations indiquées de bas en haut jusqu'à retrouver à la fin la fraction de départ.
- soit effectuer les calculs de haut en bas en s'arrêtant aux quotients partiels successifs, ce qui donne

$$5, \quad 5 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3}, \quad 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}} = \frac{37}{7}, \quad 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}} = \frac{127}{24}.$$

Les nombres rationnels ainsi obtenus sont des approximations de plus en plus précises de $\frac{127}{24}$. Ils forment une suite (de quatre éléments dans ce cas-ci), appelée la suite des *réduites* de la fraction continue.

Remarquons au passage que les réduites sont des fractions non simplifiables ou *irréductibles*. Il en est toujours ainsi et cette propriété des réduites sera démontrée à la fin de ce document.

[1] Nous n'envisagerons pas d'autres fractions continues que celles-ci.

Pour faciliter ultérieurement le calcul des réduites, observons dès maintenant comment les numérateur et dénominateur d'une réduite peuvent s'obtenir de façon systématique à partir des numérateurs et dénominateurs des deux précédentes et du nouveau quotient partiel concerné :

$$\frac{5}{1}; \quad 5+\frac{1}{3}=\frac{16}{3}; \quad \frac{16\times 2+5}{3\times 2+1}=\frac{37}{7}; \quad \frac{37\times 3+16}{7\times 3+3}=\frac{127}{24}.$$

Cet algorithme sera généralisé à la fin de la section 1.3.

1.3 L'horloge astronomique de Strasbourg

L'horloge de la cathédrale de Strasbourg fut réalisée entre 1352 et 1354. On l'appelait horloge des trois rois. Elle connut trois vies. La première s'étend jusqu'au début du seizième siècle, époque où son mécanisme cessa de fonctionner. Elle fut ensuite restaurée et améliorée entre 1571 et 1574 mais s'arrêta fin 1788. Sa troisième vie, elle la doit à Schwilgué, génial autodidacte natif de Strasbourg, qui lui donna, entre 1838 et 1842, la forme qu'on lui connaît actuellement. Nous n'allons nous intéresser qu'à un de ses éléments. L'horloge en comprend en effet plusieurs : un cadran qui indique les heures, un calendrier, un relevé de différentes informations d'ordre religieux, comme la date de la fête de Pâques, et enfin un planétaire. C'est ce dernier que nous allons analyser.

Ce planétaire représente Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter et Saturne tournant autour du Soleil, ainsi que la Lune tournant autour de la Terre. Un mécanisme composé de roues dentées met en mouvement chaque planète selon sa propre vitesse en fonction de la vitesse de rotation de la Terre. Celle-ci décrit un tour complet autour du Soleil en une année tropique de 365 jours, 5 heures, 48 minutes et 48 secondes, soit 31 556 928 secondes. L'arbre moteur qui donne le mouvement fait un tour en 1 heure, soit 3 600 secondes. Le rapport entre les deux s'écrit

$$\frac{3\,600}{31\,556\,928}.$$

Il s'agit de fabriquer un engrenage formé de deux roues dentées dont les vitesses de rotation soient dans ce rapport. Or, techniquement, un engrenage ne dépasse pas cinq cents dents. Voilà pourquoi Schwilgué est contraint de décomposer la fraction en un produit :

$$\frac{3\,600}{31\,556\,928}=\frac{900}{7\,889\,232}=\frac{9}{156}\times\frac{10}{188}\times\frac{10}{269}.$$

Des rapports du produit découle le nombre de dents des trois engrenages réducteurs engendrant le mouvement de rotation de la Terre.

Voyons maintenant comment relier le mouvement d'une autre planète, Saturne par exemple, à celui de la Terre. Sa durée de révolution est de 10 746 jours, 22 heures 30 minutes 10 secondes, soit 928 535 410 secondes. Les mouvements de ces deux planètes sont dans le rapport

$$\frac{31\,556\,928}{928\,535\,410}. \tag{1.2}$$

Cette fraction est inutilisable telle quelle et doit être remplacée par une fraction à peu près égale dont les termes sont des nombres premiers pas trop grands de manière à pouvoir fabriquer les engrenages selon les techniques de l'époque.

Cherchons le développement en fraction continue de (1.2) selon la technique mise au point lors du premier dallage.

$$\frac{31\,556\,928}{928\,535\,410} = \cfrac{1}{29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{47 + \ddots}}}}}}}}$$

L'écriture complète de ce développement prendrait trop de place, mais il est certain que le nombre d'étages est fini car le membre de gauche est lui-même une fraction.

Calculons les premières réduites de cette fraction continue en suivant l'algorithme observé à la fin de la section 1.2 :

$$\frac{1}{29}; \quad \frac{2}{59}; \quad \frac{5}{147}; \quad \frac{7}{206}; \quad \frac{26}{765}; \quad \frac{33}{971}; \quad \frac{290}{8533} \ldots$$

Cette septième réduite parut intéressante à l'horloger car 8533 se décompose en seulement trois facteurs :

$$8533 = 7 \times 23 \times 53.$$

Son intuition et sa connaissance des contraintes techniques liées à la fabrication des roues dentées le conduisent à décomposer cette réduite en

$$\frac{290}{8533} = \frac{58}{161} \times \frac{20}{212},$$

où $161 = 7 \times 23$ et $212 = 4 \times 53$. Les deux rapports du produit donnent les nombres de dents de deux engrenages réducteurs engendrant le mouvement de rotation de Saturne.

La différence entre la réduite retenue et la fraction de départ vaut :

$$\frac{31556928}{928535410} - \frac{290}{8533} = -0,0000000002\ldots$$

Cette différence est tellement minime qu'on peut considérer que le mécanisme du planétaire donne un rendu quasi parfait du mouvement de Saturne.

Généralisation

Les calculs effectués sur le nombre rationnel $\frac{127}{24}$ peuvent être appliqués à tout nombre rationnel de la forme $\frac{p}{q}$ (nous nous limitons aux positifs). La division euclidienne conduit successivement aux égalités suivantes

$$\begin{array}{lll}
p = q_1 q + r_1 \quad (0 \leq r_1 < q) & \text{ou} & \frac{p}{q} = q_1 + \frac{r_1}{q} = q_1 + \cfrac{1}{\frac{q}{r_1}} \\
q = q_2 r_1 + r_2 \quad (0 \leq r_2 < r_1) & \text{ou} & \frac{q}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1} = q_2 + \cfrac{1}{\frac{r_1}{r_2}} \\
r_1 = q_3 r_2 + r_3 \quad (0 \leq r_3 < r_2) & \text{ou} & \frac{r_1}{r_2} = q_3 + \frac{r_3}{r_2} = q_3 + \cfrac{1}{\frac{r_2}{r_3}} \\
\quad\vdots & & \quad\vdots \\
r_{n-3} = q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1} & \text{ou} & \frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = q_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = q_{n-1} + \cfrac{1}{\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}} \\
\qquad (0 \leq r_{n-1} < r_{n-2}) & & \\
r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n & & \\
\qquad (r_n = 0) & &
\end{array}$$

Puisque la suite des restes est une suite d'entiers positifs de plus en plus petits, le procédé s'arrête lorsque le reste est nul. C'est le cas de r_n. Comme dans l'exemple numérique, en substituant chaque équation dans la précédente, toutes ces égalités peuvent être regroupées en une seule

$$\frac{p}{q} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}$$

Nous allons utiliser la notation $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ pour écrire cette fraction continue finie d'une manière plus compacte.

Les premières réduites sont

$$\frac{q_1}{1}, \quad \frac{q_1q_2+1}{q_2}, \quad \frac{(q_1q_2+1)q_3+q_1}{q_2q_3+1}, \quad \ldots, \frac{h_n}{k_n}, \ldots$$

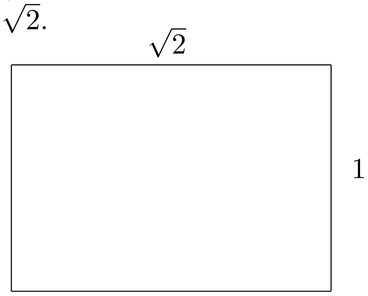
où, à partir de $n = 3$,

$$h_n = h_{n-1}q_n + h_{n-2} \quad \text{et} \quad k_n = k_{n-1}q_n + k_{n-2}.$$

Cette loi de formation sera démontrée par récurrence à la fin de ce document. Non seulement elle fournit un algorithme de calcul des réduites successives, mais encore elle montre de manière évidente que tant les numérateurs que les dénominateurs des réduites deviennent de plus en plus grands.

1.4 Développement en fractions continues de deux nombres irrationnels

Procédons maintenant au dallage du rectangle de dimensions $\sqrt{2}$ et 1 (Fig. 1.6). Le but est de trouver des fractions dont la valeur est proche de celle de $\sqrt{2}$.



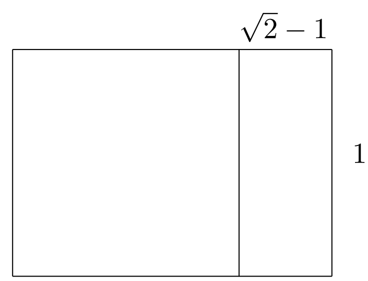


FIG. 1.6 – Rectangle $\sqrt{2} \times 1$

FIG. 1.7 – Dallage du rectangle $\sqrt{2} \times 1$

• Première étape : comme $1 < \sqrt{2} < 2$, on peut couvrir partiellement le rectangle avec un seul carré de côté 1 et les dimensions du rectangle restant sont $\sqrt{2}$ et 1 (Fig. 1.7). Cette première étape du dallage se traduit par l'égalité

$$\sqrt{2} = 1 \cdot 1 + (\sqrt{2} - 1).$$

• Deuxième étape : afin de couvrir le rectangle restant, cherchons la partie entière de $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ en rendant rationnel le dénominateur par la technique

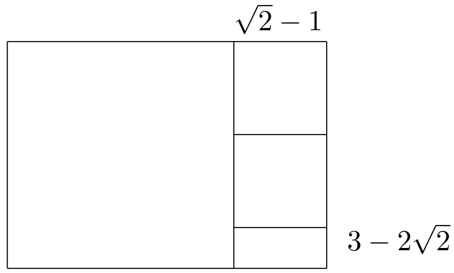


Fig. 1.8 – Dallage du rectangle $1 \times (\sqrt{2}-1)$

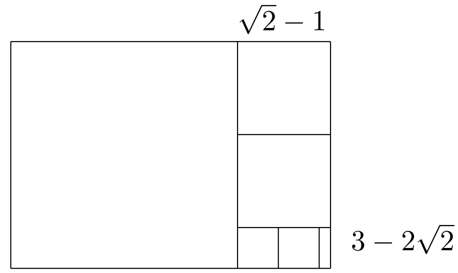


Fig. 1.9 – Dallage du rectangle $(\sqrt{2}-1) \times (3-2\sqrt{2})$

du binôme conjugué.

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1.$$

Comme $2 < \sqrt{2}+1 < 3$, le rectangle peut être couvert partiellement par 2 carrés de côté $\sqrt{2}-1$ (Fig. 1.8) et les dimensions du nouveau rectangle restant sont $\sqrt{2}-1$ et $1-2(\sqrt{2}-1) = 3-2\sqrt{2}$. Cette deuxième étape du dallage se traduit par l'égalité

$$1 = 2 \times (\sqrt{2}-1) + (3-2\sqrt{2}).$$

• Troisième étape : afin de couvrir ce nouveau petit rectangle avec des carrés, cherchons à nouveau la partie entière de $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3-2\sqrt{2}}$ en rendant le dénominateur rationnel :

$$\frac{\sqrt{2}-1}{3-2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-1)(3+2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = \sqrt{2}+1.$$

La réponse étant la même qu'à l'étape précédente, ce dernier rectangle est semblable au rectangle restant précédent. Nous pourrons donc le daller partiellement avec deux carrés de côté $3-2\sqrt{2}$ (Fig. 1.9). Les dimensions du rectangle restant sont $3-2\sqrt{2}$ et $(\sqrt{2}-1)-2(3-2\sqrt{2}) = 5\sqrt{2}-7$. Cette troisième étape du dallage se traduit par l'égalité

$$\sqrt{2}-1 = 2(3-2\sqrt{2}) + (5\sqrt{2}-7).$$

En poursuivant ce dallage, on constaterait qu'à chaque étape les rectangles restants sont semblables. On pourrait donc les daller avec deux carrés et le processus ne s'arrête jamais. Tous les quotients partiels valent 2.

Comme à la section 1.2, reprenons les égalités de chaque étape et écrivons-les sous forme de fractions :

$$
\begin{array}{lll}
\sqrt{2} = 1 \times 1 + (\sqrt{2}-1) & \text{ou} & \dfrac{\sqrt{2}}{1} = 1 + \dfrac{\sqrt{2}-1}{1} \\
1 = 2 \times (\sqrt{2}-1) + (3-2\sqrt{2}) & \text{ou} & \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = 2 + \dfrac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 2 + \dfrac{\sqrt{2}-1}{1} \\
\sqrt{2}-1 = 2 \times (3-2\sqrt{2}) + (5\sqrt{2}-7) & \text{ou} & \dfrac{\sqrt{2}-1}{3-2\sqrt{2}} = 2 + \dfrac{5\sqrt{2}-7}{3-2\sqrt{2}} = 2 + \dfrac{\sqrt{2}-1}{1} \\
\qquad \vdots & &
\end{array}
$$

Par substitutions successives, ces fractions peuvent être regroupées en une seule expression :

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{1} &= 1 + \frac{\sqrt{2}-1}{1} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{\sqrt{2}-1}{1}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{\sqrt{2}-1}{1}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}}}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}
\end{aligned}
$$

C'est le développement de $\sqrt{2}$ en fraction continue. À la différence du premier cas rencontré, ce développement-ci est illimité. De plus, cette fraction continue est *périodique*[2], la période étant 2 dans ce cas.

Calculons les premières réduites de cette fraction continue. Cela donne la suite de fractions

$$
1; \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{3 \times 2 + 1}{2 \times 2 + 1} = \frac{7}{5}; \quad \frac{17}{12}; \quad \frac{41}{29}; \quad \frac{99}{70}; \quad \frac{239}{169} \ldots
$$

[2]Une fraction continue illimitée est périodique, lorsque, à partir d'un certain rang, la même suite de quotients partiels se reproduit indéfiniment dans le même ordre.

Écrites sous forme décimale, elles font apparaître les premiers chiffres exacts de $\sqrt{2}$.

$1;\ 1,5;\ 1,4;\quad 1,41666\ldots;\quad 1,4137\ldots;\quad 1,4142857\ldots;\quad 1,4142011\ldots;\quad \ldots$

Généralisation

Tout nombre réel positif x peut être traité comme $\sqrt{2}$. Dans l'algorithme décrit ci-dessous, la lettre q indicée désigne à chaque étape la partie entière du nombre mis entre crochets dans la notation E[ ], et la lettre r indicée, la partie décimale proprement dite (celle qui reste après avoir retranché la partie entière).

$$\begin{array}{lll}
x = q_1 + r_1 & \text{où } q_1 = E[x] & \text{et } r_1 = x - E[x] \\
 & & (\ 0 < r_1 < 1, \quad \dfrac{1}{r_1} > 1) \\
\dfrac{1}{r_1} = q_2 + r_2 & \text{où } q_2 = E[\dfrac{1}{r_1}] & \text{et } r_2 = \dfrac{1}{r_1} - E[\dfrac{1}{r_1}] \\
\dfrac{1}{r_2} = q_3 + r_3 & \text{où } q_3 = E[\dfrac{1}{r_2}] & \text{et } r_3 = \dfrac{1}{r_2} - E[\dfrac{1}{r_2}] \\
\quad\vdots & &
\end{array}$$

En regroupant les égalités précédentes en une seule expression, nous arrivons à

$$x = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Comme on l'a vu précédemment, lorsque x est un nombre rationnel, cette fraction continue est forcément finie . Et réciproquement, la valeur d'une fraction continue finie obtenue au bout d'un certain nombre fini de réductions au même dénominateur ne peut qu'être rationnelle. Par contre, l'expression en fraction continue d'un irrationnel est infinie.

L'écriture même en fraction continue d'un nombre réel permet donc de distinguer de façon univoque s'il s'agit d'un rationnel ou d'un irrationnel. Nous affinerons plus loin cette distinction pour ce qui est des irrationnels.

Appliquons maintenant à π l'algorithme décrit ci-dessus. Il est évident que les calculs ne pourront être effectués que sur une valeur, forcément approximative, de π, celle que donne une calculatrice par exemple. Celle-ci fournira quelques quotients partiels à partir desquels nous ferons quelques remarques spécifiques à cet irrationnel.
L'algorithme se déroule comme suit :

• Première étape : on distingue dans π sa partie entière 3 et sa partie décimale $\pi - 3$ que l'on écrit sous forme d'une fraction proprement dite de numérateur 1

$$\pi = 3 \cdot 1 + (\pi - 3) = 3 + \frac{1}{\frac{1}{\pi-3}}.$$

• Deuxième étape : on distingue dans $\frac{1}{\pi-3}$ sa partie entière 7 et sa partie décimale que l'on écrit sous forme d'une fraction de numérateur 1

$$\frac{1}{\pi - 3} = 7,0625\ldots = 7 + 0,0625\ldots = 7 + \frac{1}{\frac{1}{0,0625...}}$$

• Troisième étape : on distingue dans $\frac{1}{0,0625...}$ sa partie entière 15 etc. En introduisant ces parties entières successives dans une seule expression, on obtient

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}} \tag{1.3}$$

Au vu des premiers quotients partiels, il ne semble pas que cette fraction continue soit périodique. On n'en sera certain qu'après avoir démontré que seuls les irrationnels quadratiques admettent un développement en fraction continue périodique.

Calculons les premières réduites de (1.3)

$$3, \quad \frac{22}{7}, \quad \frac{333}{106}, \quad \frac{355}{113}, \ldots$$

On y reconnaît en deuxième position l'approximation bien connue 22/7.

Voici l'expression décimale de ces premières réduites :

$$3; \quad 3,14285\ldots; \quad 3,141509\ldots; \quad 3,14159292\ldots; \ldots$$

On y observe que les décimales se stabilisent très rapidement.

Le tableau que voici vise à comparer les approximations rationnelles obtenues en tronquant l'expression décimale de π avec les approximations rationnelles données par les réduites successives :

$\pi - 3 = 0,141592\ldots$	
$\pi - \dfrac{31}{10} = 0,041592654\ldots$	$\pi - \dfrac{22}{7} = -0,001264\ldots$
$\pi - \dfrac{314}{100} = 0,001592654\ldots$	$\pi - \dfrac{333}{106} = 0,00008322\ldots$
$\pi - \dfrac{3141}{1000} = 0,000592654\ldots$	$\pi - \dfrac{355}{113} = -0,000000266\ldots$

L'alternance de signes dans la colonne de droite montre à nouveau le caractère oscillant de la suite des réduites. Il est démontré que les réduites sont les meilleures approximations rationnelles d'un nombre irrationnel x au sens où toute fraction $\dfrac{p}{q}$ telle que $0 < q < k_n$ est plus éloignée de x que la réduite $\dfrac{h_n}{k_n}$. Cette propriété ne sera pas démontrée, mais le tableau ci-dessus permet de comparer la qualité des approximations rationnelles de π écrites sous forme de fractions dont les numérateurs et les dénominateurs comportent le même nombre de chiffres.

1.5 L'échelle musicale bien tempérée

Des instruments de musique, comme le piano ou l'orgue, ne peuvent produire qu'un nombre limité de sons (à la différence du violon ou du violoncelle par exemple). Pour cette raison, depuis des millénaires et dans toutes les civilisations, s'est posé aux concepteurs d'instruments le problème de choisir une échelle musicale. Dans la musique occidentale, l'échelle dite « bien tempérée » a été construite et intégrée dans les instruments au XVII$^{\text{e}}$ siècle seulement et les outils mathématiques afférents datent de la même époque. La difficulté de sa mise au point réside dans les deux principes suivants :

1. elle doit permettre la transposition d'une mélodie. Une voix de basse n'utilise pas les mêmes fréquences qu'une voix de soprano, mais toutes deux doivent pouvoir chanter la même mélodie. Or, si on ne tient pas compte du rythme, une mélodie est une suite de sons caractérisée par les intervalles qui les séparent. Un intervalle entre deux sons se mesure au rapport de leurs fréquences. Pour garantir la transposition d'une mélodie sans l'altérer, il faut donc que la suite des fréquences $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ des sons présents dans l'échelle musicale soit une suite

géométrique. Autrement dit, $\dfrac{f_1}{f_0} = \dfrac{f_2}{f_1} = \cdots = \dfrac{f_{n+1}}{f_n} = \cdots$, quel que soit n, la raison q de cette suite géométrique étant à déterminer. Une échelle de ce type est appelée échelle uniforme ;

2. elle doit être étagée de manière que les sons qui la composent présentent les consonances les plus harmonieuses. C'est le cas de deux sons dont la fréquence de l'un est le double de celle de l'autre. Par conséquent, l'échelle musicale doit contenir les sons de fréquences f et $2f$. L'intervalle entre deux sons de ce type s'appelle *octave*. Ont également une consonance harmonieuse deux sons dont les fréquences sont dans le rapport de deux à trois. De ce fait, l'échelle musicale doit contenir les sons de fréquence f et $(3/2)f$. L'intervalle entre deux sons de ce type s'appelle une *quinte juste*.

Voyons maintenant comment ces deux exigences se traduisent mathématiquement et si elles sont compatibles.

• Soit m tel que $f_m = 2f_0$. Cet indice m décide donc du nombre de degrés à l'intérieur d'une octave. Il est lié à la raison q de la suite géométrique mentionnée plus haut, puisque $f_m = q^m f_0 = 2f_0$. D'où,

$$q^m = 2 \qquad \text{ou} \qquad q = \sqrt[m]{2}.$$

• Soit k $(0 < k < m)$ tel que $f_k = (3/2)f_0$. Cet indice k est lui aussi lié à la raison q par l'égalité $f_k = q^k f_0$. D'où

$$q^k = \frac{3}{2} \qquad \text{ou} \qquad q = \sqrt[k]{\frac{3}{2}}.$$

Il s'agit donc de déterminer les nombres naturels m et k tels que

$$\sqrt[m]{2} = \sqrt[k]{\frac{3}{2}} \qquad \text{ou} \qquad 2^{k/m} = \frac{3}{2}.$$

En écrivant cette dernière égalité sous la forme équivalente $2^k 2^m = 3^m$, on se rend compte qu'il n'est pas possible de trouver ces deux nombres m et k, puisque toutes les puissances entières de 2 sont paires et toutes les puissances entières de 3 sont impaires. Le nombre x tel que $2^x = 3/2$ est forcément irrationnel et le problème revient à rechercher parmi ses approximations rationnelles la plus convenable possible à deux points de vue. Premièrement, le nombre de degrés à l'intérieur d'une octave ne peut pas être trop grand. Sur le clavier du piano, par exemple, il ne faut pas qu'il y ait trop de notes possibles entre deux touches séparées par une octave à cause des limites physiques de la taille d'une main et du nombre de doigts disponibles. Deuxièmement, la différence entre la fréquence $2^x f_0$ et $3/2 f_0$ ne peut pas être perçue par l'oreille humaine, c'est-à-dire ne peut pas dépasser la fréquence d'un Hertz. Tel est en effet, pour des fréquences allant jusqu'à 1000 Hz et à un niveau sonore modéré, le seuil de perception.

Comme les réduites du développement en fraction continue du nombre irrationnel x en fournissent les meilleures approximations rationnelles, le problème de l'échelle musicale conduit à la question suivante :

Comment développer en fraction continue la solution de l'équation $2^x = \dfrac{3}{2}$, *habituellement écrite* $x = \log_2 \dfrac{3}{2}$?

- Comme $2^0 < \frac{3}{2} < 2^1$, le nombre x est compris entre 0 et 1 et peut être écrit sous la forme $x = \frac{1}{x_1}$. L'équation devient

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x_1} = 2. \tag{1.4}$$

- Comme $(\frac{3}{2})^1 < 2 < (\frac{3}{2})^2$, le nombre x_1 est compris entre 1 et 2 et peut s'écrire sous la forme $x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$. L'équation (1.4) devient

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1+\frac{1}{x_2}} = 2$$

ou

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x_2}} = 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3},$$

ou encore

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x_2} = \frac{3}{2}. \tag{1.5}$$

- Comme $(\frac{4}{3})^1 < \frac{3}{2} < (\frac{4}{3})^2$, le nombre x_2 est compris entre 1 et 2 et peut s'écrire sous la forme $x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}$. L'équation (1.5) devient

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{1+\frac{1}{x_3}} = \frac{3}{2},$$

ou

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x_3}} = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{8},$$

ou encore

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{x_3} = \frac{4}{3}. \tag{1.6}$$

– Comme $(\frac{9}{8})^2 < \frac{4}{3} < (\frac{9}{8})^3$, x_3 est compris entre 2 et 3 et peut s'écrire sous la forme $x_3 = 2 + \frac{1}{x_4}$. L'équation (1.6) devient

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{2+\frac{1}{x_4}} = \frac{4}{3},$$

ou

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{x_4}} = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{64}{81}\right) = \frac{256}{243},$$

ou encore

$$\left(\frac{256}{243}\right)^{x_4} = \frac{9}{8}. \tag{1.7}$$

– Comme $(\frac{256}{243})^2 < \frac{9}{8} < (\frac{256}{243})^3$, le nombre x_4 est compris entre 2 et 3 et peut donc s'écrire sous la forme $x_4 = 2 + \dfrac{1}{x_5}$ etc.

Nous avons ainsi calculé quatre termes de la fraction continue cherchée et nous nous arrêtons ici :

$$x = \frac{1}{x_1}$$

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x_2}}$$

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x_3}}}$$

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_4}}}}$$

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_5}}}}}$$

Les réduites de cette fraction continue valent :

$$\frac{1}{1}=1, \qquad \frac{1}{1+\frac{1}{1}}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}=\frac{3}{5}, \qquad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}=\frac{7}{12}.$$

Comme nous le savons, c'est cette dernière réduite qui a été retenue. L'octave est divisée en 12 intervalles et la quinte comprend 7 de ces intervalles.

L'octave la plus employée va de la note Do_3 du piano de fréquence 262 Hz à la note Do_4 de fréquence double. Sur cette échelle, la fréquence de la quinte (do-sol) est :

$$262\mathrm{Hz}\cdot 2^{\frac{7}{12}} = 392,55\ldots\mathrm{Hz}.$$

Or, la fréquence de la quinte juste est $262 \cdot \frac{3}{2} = 393$. L'écart, inférieur à 1 Hz, est acceptable.

En conclusion, l'échelle musicale uniforme est composée de 12 intervalles, appelés demi-tons, répartis sur l'intervalle d'une octave. Elle contient des quintes très proches des quintes justes.

La création de cette échelle ne s'est faite que très progressivement. Elle fut proposée par l'organiste, féru de mathématiques, Andreas Werckmeister dès 1691. Cette échelle est le résultat d'un compromis comme expliqué plus haut, entériné par Jean-Sébastien Bach, comme le prouvent ses préludes et fugues extraits du premier livre du clavier bien tempéré. À partir de cette époque, tous les instruments à clavier (piano-forte, orgues, clavecin...) ont connu un essor bien compréhensible.

Remarque : ce problème tiré du domaine musical justifie l'usage, souvent incompris, de puissances irrationnelles dont la valeur ne peut qu'être approchée par encadrement.

1.6 Conclusion

Cette première partie a montré comment construire les développements en fractions continues de nombres réel, rationnel ou irrationnel, et d'observer les caractères finis ou non et périodiques ou non de ceux-ci. Elle a aussi permis d'observer que le calcul des réduites ne comportent que des opérations élémentaires sur des fractions tout en fournissant très rapidement de très bonnes approximations d'un nombre quelconque. La fraction continue constitue donc un outil d'approximation particulièrement efficace, apprécié depuis longtemps comme en témoigne l'exemple des engrenages de Schwilgué.

En soi, cette première partie qui se limite à construire des fractions continues finies ou infinies par l'algorithme d'Euclide, illustré par le dallage de rectangles, peut être abordée dès le début de l'enseignement secondaire.

Partie 2

Les fractions continues au service des nombres réels et de la notion de limite

BERNARD François, CITTA Micheline, KRYSINSKA Maria

2.1 Introduction

La notion de limite figure dans tous les programmes de mathématiques de la fin de l'enseignement secondaire et sa définition formelle (dite en ϵ-δ) apparaît dans certains manuels destinés à ce niveau. Or, celle-ci recèle de nombreux non-dits, comme par exemple, l'unicité de l'objet défini qui devrait précéder la définition et non la suivre ou le caractère complet de l'ensemble des réels sur lesquelles la définition s'appuie implicitement. D'où, sans un long travail de mise en place d'images mentales liées à l'infini, au continu, aux nombres réels, à la convergence, elle ne peut pas être véritablement comprise. Ce manque de travail préparatoire est longuement dénoncé et commenté dans un ouvrage collectif d'un groupe d'enseignants-chercheurs, attaché à l'Université de Parme (ZEROALLAZERO, 2005). Comme eux, nous estimons qu'à travers cet outil mathématique aujourd'hui négligé que sont les fractions continues, il est possible de contribuer à une meilleure compréhension de la notion de limite.

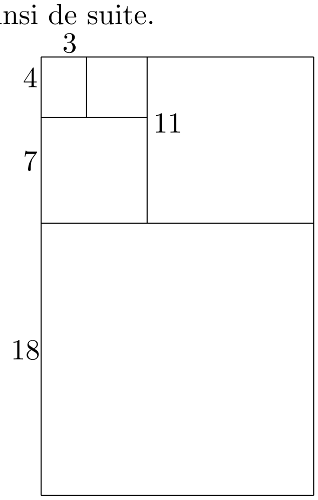
À cette fin, nous avons élaboré un canevas d'enseignement basé sur le développement en fraction continue du nombre d'or. Celui-ci nous permet d'aborder le problème du sens d'une fraction continue infinie et immanquablement la structure de l'ensemble des nombres réels et ses axiomes fondateurs, celui des intervalles emboîtés[1] et celui d'Archimède[2]. Les axiomes interviendront ici comme des évidences sur lesquelles seront validées des conjectures.

2.2 Le nombre d'or

2.2.1 Le rectangle d'or

Dans la première partie de cet article, nous nous sommes servi du dallage de rectangles pour obtenir pas à pas les quotients partiels d'une fraction continue. Nous proposons maintenant de construire un dallage à l'envers, c'est-à-dire de juxtaposer un carré sur le plus long des deux côtés d'un rectangle de départ (qui peut même être carré) de manière à former un nouveau rectangle dont nous calculons le coefficient de forme. Puis de recommencer la juxtaposition etc.

• Dessinons par exemple un rectangle de longueur 4 et de largeur 3. Avec le carré de côté 4 qui lui est juxtaposé, il forme un nouveau rectangle de longueur 7 et de largeur 4. Ce dernier, avec le carré de côté 7 qui lui est juxtaposé forme un nouveau rectangle de longueur 11 et de largeur 7, et ainsi de suite.



Les dimensions des rectangles successifs sont

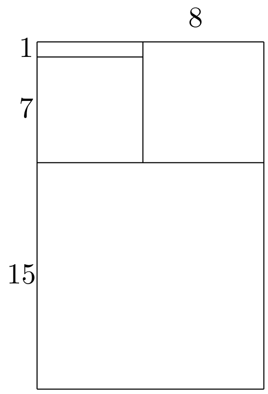
$$3 \times 4$$
$$4 \times 7$$
$$7 \times 11$$
$$11 \times 18$$
$$18 \times 29$$
$$\vdots$$

• Prenons maintenant un autre rectangle de départ, par exemple de longueur 7 et de largeur 1 et effectuons les juxtapositions successives.

---

[1] 'Etant donné une suite d'intervalles fermés $[a_n, b_n]$ tels que, pour tout entier n, $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_n \geq b_{n+1}$, l'intersection de cette suite n'est pas vide.

[2] Pour tout couple x, y de nombres réels, tels que $0 < x$, $0 \leq y$, il existe un entier n tel que $y \leq nx$.



Les dimensions des rectangles successifs sont

$$1 \times 7$$

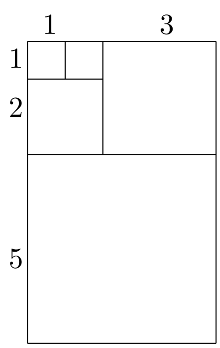
$$7 \times 8$$

$$8 \times 15$$

$$15 \times 23$$

$$\vdots$$

• Enfin, prenons le cas particulier d'un rectangle qui soit un carré de côté 1 et appliquons-lui les juxtapositions successives.



Les dimensions des rectangles successifs sont

$$1 \times 1$$

$$1 \times 2$$

$$2 \times 3$$

$$3 \times 5$$

$$5 \times 8$$

$$\vdots$$

Dans les trois cas, les rectangles ont l'air de devenir de la même forme. Cette impression visuelle est confirmée par le calcul du rapport des côtés

$$\begin{array}{ll} \text{pour la première figure} & 4/3 = 1,3333\ldots \\ & 7/4 = 1,75 \\ & 11/4 = 1,5714\ldots \\ & 18/11 = 1,6364\ldots \\ & 29/18 = 1,6111\ldots \\ & 47/29 = 1,6207\ldots \\ & 76/47 = 1,6170\ldots \end{array}$$

pour la deuxième figure $7/1 = 7\ldots$
$8/7 = 1,1428\ldots$
$15/8 = 1,875$
$23/15 = 1,5333\ldots$
$38/23 = 1,6521\ldots$
$61/38 = 1,6052\ldots$
$99/61 = 1,6229\ldots$

pour la troisième figure $1/1 = 1$
$2/1 = 2$
$3/2 = 1,5$
$5/3 = 1,6666\ldots$
$8/5 = 1,6$
$13/8 = 1,625$
$21/13 = 1,6153\ldots$

De plus, on dirait que ces suites de rapports s'approchent d'un nombre dont les premiers chiffres sont $1,61\ldots$. Cela confirme que les rectangles sont de plus en plus semblables et ce, semble-t-il, indépendamment du rectangle initial.

Y aurait-il un rectangle initial qui engendre des rectangles qui lui soient tous semblables ?

Supposons qu'un tel rectangle existe et appelons a et b les longueurs de ses côtés (soit $a < b$). Le premier rectangle construit sur celui-ci par la juxtaposition d'un carré de côté b est de longueur $a+b$ et de largeur b. Pour qu'il soit semblable au rectangle initial, il faut que

$$\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}$$

ou

$$b^2 - ab - a^2 = 0.$$

La solution positive de cette équation du second degré en b est

$$b = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Le coefficient de forme du rectangle cherché est donc $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La figure (2.1) montre comment construire à la règle et au compas un tel rectangle initial. On prend un carré de côté a, on le divise en deux rectangles égaux en joignant les milieux de deux côtés opposés, puis on mène par le milieu du côté de base un arc de cercle dont le rayon est la diagonale d'un des rectangles. On complète le rectangle dont le grand côté est ainsi déterminé. C'est le rectangle d'or cherché. Le rapport de forme de ce rectangle et de

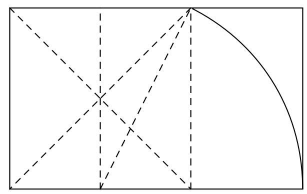


FIG. 2.1 –

tous ceux qu'il engendre par juxtaposition de carrés sur leur plus grand côté est appelé le *nombre d'or* , souvent noté Φ, et une calculatrice en donne comme valeur approchée $1,61803398\ldots$. Tous les rectangles semblables à celui-là sont appelés rectangles d'or. Leur rapport de forme est proche de la valeur vers laquelle semblaient évoluer les suites de rapports calculés à la page 23.

2.2.2 La fraction continue associée à un rectangle d'or

Reprenons le processus de dallage comme dans la première partie, à savoir dans le sens où il conduit à un développement en fraction continue. Au départ d'un rectangle d'or, le recouvrement partiel se compose d'un seul carré, puis d'un seul carré dans le rectangle restant (puisqu'il est semblable au rectangle initial) et ainsi de suite, sans fin. Les égalités correspondantes aux trois premières étapes du dallage sont rassemblées dans l'expression :

$$\Phi = \frac{b}{a} = \frac{b+a}{b} = 1 + \frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{\frac{b}{a}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{b}{a}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{b}{a}}}}$$

Étant donné que ce processus ne s'arrête jamais et que tous les quotients partiels sont égaux à 1, on pourrait écrire la fraction continue infinie suivante

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}} \tag{2.1}$$

Il importe de rappeler ici le sens de cette écriture, à savoir la limite, SI ELLE EXISTE, de la suite (x_n) des réduites

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{1} = 1 + \frac{1}{x_1}, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{x_2}, \quad \cdots$$

Il convient donc de s'attacher à vérifier si cette suite a une limite.

2.2.3 Convergence de la suite des réduites de la fraction continue associée au nombre d'or

• Commençons par une exploration graphique de cette suite qui a pour trame les courbes des fonctions $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ et $g(x) = x$.

Au départ de $x_1 = 1$, on repère sur la courbe $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ l'ordonnée $f(x_1) = 1 + \frac{1}{x_1}$, qu'on appelle x_2 et qu'on reporte sur l'axe Ox à l'aide de la bissectrice, graphique de $g(x) = x$. Puis on recommence à partir de x_2 et ainsi de suite.

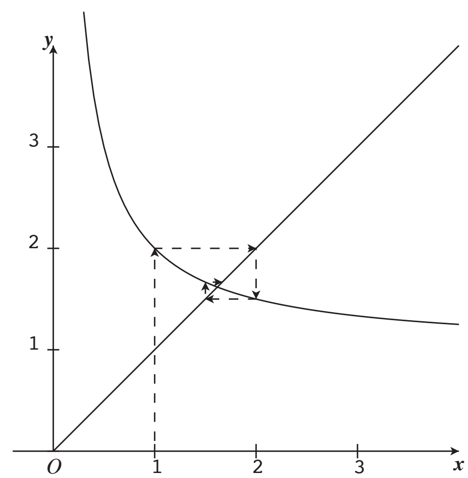


FIG. 2.2 –

Vu de loin, ce tracé conduit apparemment au point d'intersection de la droite et de la courbe. Regardé de plus près, les reports de x_1, x_2, x_3, etc sur l'axe Ox font apparaître le caractère oscillant de ces premières réduites. On peut observer que les termes de rang impair,

$$x_1 = 1, \quad x_3 = \frac{3}{2}, \quad x_5 = \frac{8}{5}, \cdots$$

sont de plus en plus grands tandis que les termes de rang pair

$$x_2 = 2, \quad x_4 = \frac{5}{3}, \quad x_6 = \frac{13}{8}, \cdots$$

sont de plus en plus petits. Mais, toujours selon le tracé fléché, les réduites de rang impair sont inférieures aux réduites de rang pair. Ces réduites forment ainsi de manière naturelle des intervalles emboîtés qui se présentent comme suit :

$$[1,2] \supset [\frac{3}{2}, \frac{5}{3}] \supset [\frac{8}{5}, \frac{13}{8}] \supset \ldots. \tag{2.2}$$

Les longueurs des intervalles emboîtés (1.9),

$$2-1=1; \quad \frac{5}{3}-\frac{3}{2}=\frac{1}{3\cdot 2}; \quad \frac{13}{8}-\frac{8}{5}=\frac{1}{8\cdot 5}; \quad \frac{34}{21}-\frac{21}{13}=\frac{1}{13\cdot 21}\ldots \tag{2.3}$$

sont égales à l'inverse d'un produit de deux entiers de plus en plus grands et sont donc bien de plus en plus petites.

• Continuons par une exploration numérique : en écrivant sous forme décimale les réduites ci-dessus, on obtient

$$1; \quad 2; \quad 1,5; \quad 1,666\ldots; \quad 1,6; \quad 1,625; \quad 1,61538\ldots; \quad 1,6190\ldots; \quad \ldots$$

et on observe une lente[3] stabilisation des décimales vers $1,61\ldots$. Il faut aller jusqu'à la 7e réduite pour voir se reproduire les deux premières décimales. Ces valeurs sont à comparer avec la valeur à 11 décimales du nombre d'or que donne une calculatrice, à savoir $1,61803398875$.

• Ce début de convergence observé sur les premières réduites se confirme-t-il au-delà ?

Ici seulement commence l'étude de la convergence de la suite (x_n). On remarque que cette suite n'est autre que la suite des rapports des côtés (u_n) des rectangles construits par juxtapositions successives au départ d'un carré de côté 1. La suite (u_n) des côtés obéissait par construction à la loi de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ avec $u_0 = u_1 = 1$. La relation de récurrence entre les (x_n) en découle :

$$x_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n + u_{n-1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{\frac{u_n}{u_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{x_n}.$$

Cherchons maintenant une expression de la différence entre deux réduites consécutives par rapport aux réduites précédentes.

[3] nettement plus lente que dans le cas de π ou de $\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x_n &= \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2}{u_n u_{n-1}} \\
&= \frac{(u_n + u_{n-1})u_{n-1} - u_n(u_{n-1} + u_{n-2})}{u_n u_{n-1}} \\
&= \frac{u_n u_{n-1} + u_{n-1}^2 - u_n u_{n-1} - u_n u_{n-2}}{u_n u_{n-1}} \\
&= -\frac{u_n u_{n-2} - u_{n-1}^2}{u_n u_{n-1}} \\
&= (-1)^2 \frac{u_{n-1}u_{n-3} - u_{n-2}^2}{u_n u_{n-1}} \\
&= \qquad \vdots \\
&= (-1)^{n-1} \frac{u_2 u_0 - u_1^2}{u_n u_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{u_n u_{n-1}}.
\end{aligned}$$

Observons au dénominateur le produit des dénominateurs des deux réduites concernées déjà rencontré lors du calcul des longueurs des intervalles (voir (2.3).

De plus, le $(-1)^{n-1}$ du numérateur atteste du caractère oscillant de la suite (x_n) que nous avions déjà noté sur la figure (2.2).

Enfin, la croissance stricte de la suite (u_n) assure que l'intervalle entre deux réduites consécutives est de plus en plus petit, à mesure que n augmente.

Exploitons cette expression pour vérifier l'ordre de toutes les réduites successives.
Pour $n = 1$, on a

$$x_1 < x_2$$

Pour $n = 2$, on a $x_3 < x_2$, mais avec x_3 plus proche de x_2 que ne l'était x_1. D'où,

$$x_1 < x_3 < x_2$$

Pour $n = 3$, on a $x_3 < x_4$ mais avec x_4 plus proche de x_3 que ne l'était x_2. D'où,

$$x_1 < x_3 < x_4 < x_2$$

etc

Les réduites successives se présentent donc de la manière suivante :

$$x_1 < x_3 < x_5 < \cdots < x_6 < x_4 < x_2$$

Elles forment, quel que soit n, une suite d'intervalles emboîtés fermés de plus en plus petits.

$$[x_1, x_2] \supset [x_3, x_4] \supset \cdots \supset [x_{2n-1}, x_{2n}] \supset \cdots$$

Intéressons-nous maintenant à l'intersection de ces intervalles emboîtés. Compte tenu de la croissance de la suite u_n dont le premier terme vaut 1, on a successivement

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{u_n u_{n-1}} < \frac{1}{u_n u_0} < \frac{1}{n}.$$

Autrement dit, sachant que n peut devenir aussi grand que l'on veut, ces intervalles de longueurs inférieures à $1/n$ peuvent devenir aussi petits que l'on veut. L'évidence qui vient d'être énoncée n'est qu'une forme de l'axiome d'Archimède. De là, la suite des intervalles emboîtés formés par les réduites définit, dans $\mathbb{R}$, un nombre unique x qu'on appelle la limite de la suite des réduites ou la valeur de la fraction continue (2.1). Cette conclusion dont l'évidence est amenée par l'illustration graphique de la figure 2.2 est une expression de l'axiome des intervalles emboîtés.

Ce nombre satisfait à

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

D'où $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, c'est le nombre d'or, noté Φ.

2.2.4 Retour aux suites de rectangles construites sur les rectangles 3×4 et 1×7

À la section 1.2.1, nous avions aussi construit des rectangles, à la manière d'un dallage à l'envers, sur les rectangles 3×4 et 1×7 et nous avions constaté que, visuellement, ces rectangles successifs prenaient progressivement le même coefficient de forme. Grâce à l'étude plus approfondie du cas du rectangle 1×1, nous sommes maintenant en mesure de confirmer cette conjecture. Dans le cas du rectangle 3×4, la suite (x_n) satisfait à la même relation de récurrence que celle du nombre d'or, $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ où $x_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, mais avec $u_0 = 3$ et $u_1 = 4$. L'écart entre deux réduites consécutives devient alors

$$x_{n+1} - x_n = (-1)^{n-1} \frac{u_2 u_0 - u_1^2}{u_n u_{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{5}{u_n u_{n-1}}.$$

Cette expression conduit à ordonner les réduites de la même façon que précédemment pour former des intervalles emboîtés qui définissent le nombre d'or.

Dans le cas du rectangle 1×7, la suite (x_n) est toujours construite sur la même relation de récurrence, mais avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 7$, ce qui donne

$$x_{n+1} - x_n = (-1)^{n-1} \frac{u_2 u_0 - u_1^2}{u_n u_{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{-41}{u_n u_{n-1}}.$$

Ici, les réduites de rang pair sont inférieures aux réduites de rang impair, mais cela ne change rien quant à la convergence vers Φ.

2.2.5 Approximations rationnelles du nombre d'or

La fraction continue associée au nombre d'or étant particulièrement simple (rien que des 1), ses réduites successives sont faciles à calculer et leur degré de précision en tant qu'approximations rationnelles de Φ peut être estimé grâce à la relation

$$|\Phi - x_n| < |x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{u_n u_{n-1}} < \frac{1}{u_{n-1}^2}.$$

Cette même relation permet aussi de rechercher le rang de la réduite qui fournira une précision souhaitée. Par exemple, la précision de $1/100$ ou $1/10^2$ sera atteinte dès que le dénominateur de la réduite sera supérieur à 10. C'est le cas de la 7è réduite comme nous l'avions déjà fait remarquer précédemment.

D'une manière générale, pour toute précision ε donnée, on cherche le rang n tel que $|\Phi - x_n| < \frac{1}{u_{n-1}^2} < \varepsilon$. Il est donné par u_{n-1} tel que $u_{n-1} > 1/\sqrt{\varepsilon}$. Un tel u_{n-1} existera toujours car la suite (u_n) est strictement croissante et peut de ce fait dépasser n'importe quel nombre donné, si grand soit-il.

2.3 Vers la définition d'une fraction continue arithmétique quelconque

Les propriétés déjà annoncées à propos du développement en fraction continue du nombre d'or et souvent illustrées numériquement vont être confirmées et complétées par la question plus générale qui suit. Il est évident que cette partie plus théorique vient achever le parcours proposé sur la notion de fraction continue et n'est pas nécessairement destinée aux élèves.

Considérons une suite infinie quelconque de nombres entiers positifs

$$q_1, q_2, q_3, \ldots$$

et associons-y la fraction continue simple

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \ddots}}} \tag{2.4}$$

Cette suite d'entiers définit-elle toujours un nombre réel ?

Cette écriture revient à considérer la suite des réduites ou fractions continues finies $r_n = (q_1, q_2, \ldots, q_n) = \dfrac{h_n}{k_n}$.

Lemme 1 *Démontrons par récurrence que la loi de formation*[4] *annoncée à la page 9*

$$r_n = \frac{h_n}{k_n} = \frac{h_{n-1}q_n + h_{n-2}}{k_{n-1}q_n + k_{n-2}}$$

est vraie quel que soit n *entier supérieur à 3.*

L'amorçage de la récurrence est démontré par le calcul des trois premières réduites

$$r_1 = \frac{q_1}{1}, \quad r_2 = \frac{q_1q_2 + 1}{q_2}, \quad r_3 = \frac{(q_1q_2+1)q_3 + q_1}{q_2q_3 + 1}$$

Le pas récurrent consiste maintenant à démontrer que si la loi de formation est applicable à la réduite r_n, elle l'est à la suivante, soit

$$r_{n+1} = \frac{h_{n+1}}{k_{n+1}} = \frac{h_n q_{n+1} + h_{n-1}}{k_n q_{n+1} + k_{n-1}}.$$

Par définition,

$$r_{n+1} = \frac{h_{n+1}}{k_{n+1}} = (q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}).$$

Cette fraction continue finie peut aussi être écrite

$$r_{n+1} = \frac{h_{n+1}}{k_{n+1}} = (q_1, q_2, \ldots, q_n + \frac{1}{q_{n+1}}).$$

Il est à noter que le dernier terme n'est pas un entier, mais comme son rôle est d'être un facteur au numérateur et au dénominateur d'une formule,

[4] La démonstration fait intervenir des quotients partiels qui ne sont pas des entiers naturels (comme les q_n), mais cela ne porte pas à conséquences car cette démonstration concerne une formule de calcul dans laquelle interviennent des additions et des multiplications dont les propriétés sur les rationnels sont les mêms que sur les entiers.

cela ne pose pas de problème. À cette fraction continue ayant maintenant n termes, on peut appliquer l'hypothèse, à savoir

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{(q_n + \frac{1}{q_{n+1}})h_{n-1} + h_{n-2}}{(q_n + \frac{1}{q_{n+1}})k_{n-1} + k_{n-2}} = \frac{(q_n h_{n-1} + h_{n-2})q_{n+1} + h_{n-1}}{(q_n k_{n-1} + k_{n-2})q_{n+1} + k_{n-1}} \\ &= \frac{h_n q_{n+1} + h_{n-1}}{k_n q_{n+1} + k_{n-1}}. \end{aligned}$$

D'où $h_{n+1} = h_n q_{n+1} + h_{n-1}$ et $k_{n+1} = k_n q_{n+1} + k_{n-1}$, quel que soit $n \geq 3$.

Notons au passage le caractère strictement croissant des h_n et des k_n.

Lemme 2 *Démontrons que la différence des produits croisés entre deux réduites consécutives est égale à $+1$ ou à -1.*

Pour les réduites consécutives $\dfrac{h_{n-1}}{k_{n-1}}$ et $\dfrac{h_n}{k_n}$, la différence des produits croisés est $h_n k_{n-1} - k_n h_{n-1}$.

Calculons cette différence sur les deux premières réduites $r_1 = \dfrac{q_1}{1}$, et $r_2 = \dfrac{q_1 q_2 + 1}{q_2}$. Cela donne

$$q_1 q_2 - (q_1 q_2 + 1) = -1.$$

Voyons maintenant que chaque différence est l'opposé de la précédente.

$$h_{n+1}k_n - h_n k_{n+1} = (h_n q_{n+1} + h_{n-1})k_n - (k_n q_{n+1} + k_{n-1})h_n = -(h_n k_{n-1} - k_n h_{n-1}).$$

D'où

$$h_n k_{n-1} - k_n h_{n-1} = (-1)^n. \tag{2.5}$$

De (2.5) découle le caractère irréductible des réduites. En effet, un facteur qui serait commun à h_n et à k_n devrait aussi diviser l'unité, ce qui est impossible.

De (2.5) découle aussi une expression de l'écart entre deux réduites consécutives.

$$r_n - r_{n-1} = \frac{h_n}{k_n} - \frac{h_{n-1}}{k_{n-1}} = \frac{h_n k_{n-1} - k_n h_{n-1}}{k_n k_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{k_n k_{n-1}}.$$

Le $(-1)^n$ du numérateur atteste le caractère oscillant de la suite des réduites d'une fraction continue arithmétique quelconque.

Servons-nous de cette expression pour estimer à quelle vitesse l'écart entre deux réduites consécutives diminue :

$$|r_n - r_{n-1}| = \left| \frac{h_n}{k_n} - \frac{h_{n-1}}{k_{n-1}} \right| = \frac{1}{k_{n-1} k_n}.$$

Or, puisque $q_n \geq 1$ et la suite (k_n) strictement croissante,

$$k_{n-1}k_n = k_{n-1}(q_n k_{n-1} + k_{n-2}) > k_{n-1}(1 \cdot k_{n-2} + k_{n-2}) = 2k_{n-1}k_{n-2}.$$

D'où

$$|r_n - r_{n-1}| = \frac{1}{k_{n-1}k_n} < \frac{1}{2k_{n-1}k_{n-2}} = \frac{1}{2}|r_{n-1} - r_{n-2}|.$$

L'écart entre deux réduites consécutives est au moins divisé par 2 à chaque étape, il peut donc être rendu aussi petit que l'on veut (axiome d'Archimède).

Lemme 3 *Quatre réduites consécutives quelconques* r_{2n-1}, r_{2n}, r_{2n+1}, r_{2n+2} $(n \geq 1)$ *forment deux intervalles emboîtés au sens où*

$$[r_{2n-1}, r_{2n}] \supset [r_{2n+1}, r_{2n+2}].$$

Cet énoncé revient à démontrer les trois inégalités suivantes :

$$\frac{h_{2n-1}}{k_{2n-1}} < \frac{h_{2n+1}}{k_{2n+1}} < \frac{h_{2n+2}}{k_{2n+2}} < \frac{h_{2n}}{k_{2n}}. \tag{2.6}$$

Celle du centre est immédiate par application du lemme 2 :

$$\frac{h_{2n+2}}{k_{2n+2}} - \frac{h_{2n+1}}{k_{2n+1}} = \frac{1}{k_{2n+2}k_{2n+1}} > 0 \tag{2.7}$$

De plus, toujours par application du lemme 2 :

$$\frac{h_{2n+1}}{k_{2n+1}} - \frac{h_{2n}}{k_{2n}} = \frac{-1}{k_{2n}k_{2n+1}} < 0 \tag{2.8}$$

et

$$\frac{h_{2n}}{k_{2n}} - \frac{h_{2n-1}}{k_{2n-1}} = \frac{1}{k_{2n}k_{2n-1}} > 0 \tag{2.9}$$

Dès lors, en additionnant (2.7) et (2.8), on obtient :

$$\frac{h_{2n+2}}{k_{2n+2}} - \frac{h_{2n}}{k_{2n}} = \frac{1}{k_{2n+2}k_{2n+1}} - \frac{1}{k_{2n}k_{2n+1}} = \frac{k_{2n} - k_{2n+2}}{k_{2n}k_{2n+1}k_{2n+2}} < 0$$

C'est la troisième des inéquations (2.6). Et en additionnant (2.8) et (2.9), on obtient

$$\frac{h_{2n+1}}{k_{2n+1}} - \frac{h_{2n-1}}{k_{2n-1}} = \frac{-1}{k_{2n}k_{2n+1}} + \frac{1}{k_{2n}k_{2n-1}} = \frac{k_{2n+1} - k_{2n-1}}{k_{2n-1}k_{2n}k_{2n+1}} > 0$$

C'est la première des trois inéquations (2.6).

Théorème Par conséquent, si on classe les réduites par ordre croissant, elles prennent la position suivante

$$r_1 < r_3 < r_5 < \cdots < r_{2n-1} < \cdots < r_{2n} < \cdots < r_6 < r_4 < r_2.$$

On y reconnaît une suite d'intervalles emboîtés (Lemme 3) fermés

$$[r_1, r_2] \supset [r_3, r_4] \supset [r_5, r_6] \supset \cdots$$

dont la longueur peut être rendue aussi petite que l'on veut (Lemme 2). Cette suite (axiome des intervalles emboîtés) définit un nombre unique noté $\lim_{n\to\infty} r_n$.

Forts de ces résultats, nous pouvons affirmer que l'écriture illimitée (2.4) a toujours du sens, à savoir

Définition Une suite infinie de nombres entiers positifs $q_1, q_2, q_3, \ldots$ détermine une fraction continue simple infinie, notée $(q_1, q_2, q_3, \ldots)$, dont la valeur est définie par la limite de la suite

$$q_1, \quad q_1 + \frac{1}{q_2}, \quad 1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}}, \cdots$$

2.4 Conclusions

Les fractions continues sont pour nous un outil qui peut aider les élèves à se familiariser avec l'ensemble des nombres réels, à maîtriser une technique d'approximation des irrationnels et à se préparer aux raisonnements liés à la formulation symbolique de la limite d'une suite.

2.4.1 Identification univoque des nombres rationnels

Nous avons établi précédemment qu'à chaque nombre rationnel correspondait une et une seule[5] représentation en fraction continue et celle-ci était finie. Autrement dit, il y a bijection entre l'ensemble des rationnels et certaines suites finies d'entiers, ceux que l'on obtient par une suite de divisions euclidiennes.

Cette unicité de représentation des rationnels par leur fraction continue simple offre un avantage par rapport à leur représentation sous forme de fraction. De plus, les réduites successives donnent les meilleures approximations

[5] A condition de refuser les fractions continues limitées dont le dernier quotient incomplet est 1. En effet, la fraction continue limitée $(1, 2, 1)$ a la même valeur que $(1, 3)$.

rationnelles d'un nombre rationnel dont les numérateur et dénominateur seraient de grands nombres (propriété mentionnée, mais non démontrée dans cet article).

2.4.2 Identification des irrationnels quadratiques et des autres

Nous avons rencontré précédemment l'écriture en fraction continue du nombre irrationnel π, qui était infinie.

Celle du nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, racine de l'équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$ était aussi infinie mais périodique.

De façon plus générale, au départ d'une équation du type $x^2 - ax - 1 = 0$ avec a entier positif, on obtient comme développement de la racine positive x une fraction continue périodique de période a :

$$x = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \ddots}}$$

Pour le voir, il suffit d'écrire l'équation sous la forme du schéma itératif $x = a + \frac{1}{x}$.

Nous avons aussi rencontré le développement en fraction continue de $\sqrt{2} = (1, 2, 2, 2, \ldots)$, racine de l'équation $x^2 - 2 = 0$, elle aussi infinie et périodique. Examinons quelques autres fractions continues périodiques afin d'identifier le type de nombres irrationnels qu'elles représentent et permettent de calculer avec une précision arbitraire.

- Soit la fraction continue illimitée périodique

$$2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}$$

Appelons x le nombre qu'elle représente (l'existence de ce nombre est certaine !). Il est tel que

$$x - 2 = \frac{1}{4 + (x - 2)}$$

ou

$$(x - 2)(x + 2) = 1$$

ou

$$x^2 - 4 = 1.$$

Ce nombre satisfait à l'équation $x^2 - 5 = 0$ dont la solution positive est $x = \sqrt{5}$.

• Sur le modèle de l'exemple précédent, nous pouvons obtenir la fraction continue de $x = \sqrt{17}$. En effet, x est tel que $x^2 - 17 = 0$ ou $x^2 - 16 = 1$. D'où $x - 4 = \dfrac{1}{4 + x}$ ou

$$x = 4 + \frac{1}{4 + x} = 4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cdots}}$$

Généralisation : Au départ de l'équation $x^2 = n^2 + 1$, on a $x^2 - n^2 = 1$. D'où

$$x - n = \frac{1}{n + x}$$

et

$$x = n + \cfrac{1}{n + n + \cfrac{1}{n + x}} = n + \cfrac{1}{2n + \cfrac{1}{n + x}}$$

On peut en déduire que tous les irrationnels de la forme $\sqrt{n^2 + 1}$ seront représenté par la fraction continue périodique de la forme $(n, 2n, 2n, \ldots)$.

• Soit la fraction continue illimitée périodique

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

Appelons x le nombre qu'elle représente. Il est tel que

$$x - 1 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + (x - 1)}}$$

ou

$$(x - 1) = \frac{x + 1}{x + 2}.$$

Ce nombre x satisfait à l'équation $x^2 - 3 = 0$ dont la solution positive est $x = \sqrt{3}$.

On pourrait encore prendre beaucoup d'autres exemples de nombres irrationnels dont la fraction continue est périodique mais ceux développés ci-dessus ont un point commun, ils sont tous racines d'une équation du second degré. On les appelle des irrationnels quadratiques.

Plus généralement, Euler a démontré en 1737 que toute fraction continue périodique est racine d'une équation du second degré à coefficients entiers. En 1769, Lagrange a démontré la réciproque de l'énoncé précédent, à savoir que toute racine d'une équation du second degré admet un développement en fraction continue périodique. Il y a donc bijection entre les irrationnels quadratiques et les fractions continues périodiques. Le tableau ci-dessous, extrait de *Au-delà de toute limite*, résume la classification des nombres réels à laquelle a conduit leur représentation en fraction continue.

Nombres rationnels	$\longleftrightarrow$	Fractions continues arithmétiques limitées
Irrationnels quadratiques	$\longleftrightarrow$	Fractions périodiques
Nombres irrationnels non quadratiques	$\longleftrightarrow$	Fractions continues illimitées non périodiques

2.4.3 Fraction continue et formulation symbolique de la limite

Considérons la définition classique de la limite d'une suite (r_n) selon laquelle il existe une nombre r tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \text{ tel que } |r_n - r| < \varepsilon.$$

et voyons quels éléments de cette définition ont été abordés dans la séquence d'enseignement proposée sur les fractions continues.

- Le rôle de la différence $|r_n - r|$ qui mesure l'écart entre une approximation r_n et une valeur fixe r.
- Le rôle de l'axiome d'Archimède pour qu'un nombre puisse être rendu aussi petit que l'on veut en l'écrivant sous la forme $1/k$ où $k \in \mathbb{N}$.
- Le rôle du ε, si petit soit-il, qui sert de degré de précision arbitraire d'une approximation r_n envisagée.
- La notion d'intervalles emboîtés dont la longueur diminue et peut même être rendue aussi petite que l'on veut.

– La notion de sous-suite croissante et décroissante.
– La convergence d'une suite (celle des réduites d'une fraction continue) dont on ne connaît pas la limite grâce à l'axiome des intervalles emboîtés.

Bibliographie

BERTHOUD F., *Histoire de la mesure du temps par les horloges*, De l'Imprimerie de la République, 1802, Paris.
BREZINSKI C., *Ces étranges fractions qui n'en finissent pas*, 2005, Université des Sciences et des Techniques de Lille.
CHILOV G., *Gamme simple (structure de l'échelle musicale)* in Vilenkine N., Chilov G., Ouspenski V., Lioubitch J., Chor L. : *Quelques applications des mathématiques*, 1973, pp 135-153, MIR, Moscou.
COMMISSION INTER-IREM ÉPISTÉMOLOGIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES, 1992, *Histoire d'infini*.
FRIEDELMEYER J.-P., Dallage de rectangles et fractions continues, A.P.M.E.P. n° 450, 2004.
GILBERT TH., ROUCHE N., *La notion d'infini*, Ellipses, 2001, Paris.
IREM de Strasbourg, Histoire et Épistémologie des mathématiques, 1987.
SCHONS N.-J.,*Compléments d'Arithmétique et d'Algèbre*, Duculot, Gembloux, 1949.
SERFATI M., *Quadrature du cercle, fractions continues et autres contes*, A.P.M.E.P., n° 86, 1992.
THOMAS FR., ROUCHE N., *Mesures, pavages et nombres irrationnels*, Proposition n° 10, GEM, 1985.
WIKIPEDIA : *Fraction continue et approximation diophantienne*.
ZEROALLAZERO, *Oltre ogni limite*, Pitagora, 2005, Bologne, traduction française, *Au-delà de toute limite*, CREM, 2009, Nivelles.
http ://www.mcs.surrey.ac.uk An introduction to Continued Fractions
http ://www.juillot.home.cern.ch/juillot/horloge–complet.htlm