Boîtes qui flottent, boîtes qui coulent, d'après l'idée de Y. Chevallard

Mariza Krysinska

Mots clés : Modélisation fonctionnelle, classe de fonctions, expérimentation, variables

Introduction

Le problème des boîtes flottantes traité dans cet article est formulé et étudié dans *Arithmétique, Algèbre, Modélisation, étapes d'une recherche* en 1989. L'auteur de cette publication, Yves Chevallard, est un didacticien des mathématiques reconnu internationalement : en 2009 il a reçu le prix Hans Freudenthal qui récompense « a major cumulative program of research » en matière d'enseignement des mathématiques. En Belgique, la reconnaissance de ses travaux de recherche s'exprime par le titre de docteur honoris causa décerné le 16 octobre 2010 par l'Université de Liège.

Les problèmes dits concrets ont alimenté l'enseignement des mathématiques depuis l'Antiquité. Actuellement, l'effort de recherche du concret est demandé explicitement aux enseignants dans les programmes belges de mathématiques. Ainsi, on peut observer fréquemment dans les manuels et dans les classes un habillage concret des problèmes qui est peu crédible. Mais pourquoi attache-t-on tellement d'importance au concret ?

Dans le passé, le concret dans l'enseignement traditionnel était nécessaire suite à « *une insuffisance des outils d'expression symbolique, à l'absence d'un langage mathématique adéquat* » comme l'explique Chevallard (1989). Et il poursuit en disant que l'habillage concret fournissait « *pendant de longs siècles un substitut, sans doute peu satisfaisant, mais, à l'intérieur de certaines limites [...], relativement opératoire. L'apparition de l'algèbre et du langage algébrique, acquis dans la première moitié du XVII^e^ siècle au moins, aurait dû permettre l'introduction d'une autre manière, plus authentique, de traiter le concret des problèmes traditionnels- ce qui [...] n'aura pas lieu* » (Chevallard, 1989).

Actuellement, il existe un courant didactique dit « mathematical modelling » comme, par exemple, le projet LEMA (l'Enseignement des mathématiques dans et à travers la Modélisation et les Applications) dont l'un des objectifs est d'organiser l'enseignement des mathématiques autour des problèmes d'application à la vie réelle.

Mais l'intérêt d'une modélisation mathématique est tout autre. Selon Chevallard, la modélisation, surtout lorsqu'elle est intra-mathématique, permet d'avoir une vue d'ensemble sur l'activité mathématique, de l'école primaire à l'université. Par exemple, la modélisation du problème des boîtes flottantes n'a pas seulement comme objectif de retrouver le concret à travers la modélisation mathématique mais aussi de rencontrer la notion de fonction sous ses divers aspects. En effet, la modélisation se manifeste ici par la construction des formules paramétrées et de l'emploi de ces formules par le biais de l'étude des familles de fonctions.

Dans cet article, je propose ma propre analyse du problème qui est inspirée par les recherches que j'ai faites dans le cadre de ma thèse de doctorat.

Présentation du matériel et formulation de la question

Dans une feuille de plomb dont la masse surfacique est égale à 0,86 g/cm^2, j'ai fabriqué un jeu de boîtes en plomb à base carrée de dimensions suivantes (L représente la mesure du côté de carré, H représente la hauteur de la boîte) :

$L \times L \times H =$

$$\begin{array}{ll} 3\times3\times2 & 3,5\times3,5\times2 \\ 3\times3\times3 & 3,5\times3,5\times3,5 \\ 3\times3\times5 & 3,5\times3,5\times8 \\ \\ 5\times5\times2 & 10\times10\times1,5 \\ 5\times5\times3,5 & 10\times10\times3 \\ 5\times5\times5 & 10\times10\times10 \\ \\ 5\times5\times8 & \end{array}$$

On veut savoir laquelle parmi ces boîtes va flotter, laquelle va couler et pourquoi.

Le choix des dimensions de ces boîtes a été dicté par des considérations d'ordre matériel pour les construire facilement ou d'ordre mathématique pour obtenir une variété des résultats d'expérimentation et pour obtenir plusieurs conjectures.

Premières expériences suivies de quelques conjectures

Les expérimentations peuvent être initialisées par la question suivante : *Dans la collection des boîtes construites, choisissez une boîte qui va probablement couler et une autre qui va probablement flotter.*

Ensuite, on peut les structurer par la consigne suivante : *Expérimentez le comportement de toutes les boîtes, famille par famille.*

Après les expérimentations, on peut formuler les premières conjectures comme, par exemple, celles qui ont été proposées par mes élèves et reprises ci-dessous :

- Plus la hauteur est petite, plus vite la boîte va couler
- Pour la même base, on peut avoir des boîtes qui coulent et des boîtes qui flottent
- Plus la base est grande, plus la boîte a une chance de flotter
- Plus la hauteur est grande, plus la boîte a une chance de flotter
- À partir d'une certaine hauteur, la boîte va toujours flotter
- Certaines familles de boîtes coulent toujours, certaines autres flottent toujours.

Modèle mathématique général des boîtes qui flottent, de base carrée et de masse surfacique 0,86 g/cm^2

La modélisation mathématique des boîtes flottantes s'appuie sur le principe d'Archimède. Ce dernier peut être établi d'une manière primitive proposée par Chevallard (1989) dont voici le bref parcours.

- On part du principe « d'équivalence des masses égales » selon lequel l'enfoncement X d'une boîte définie par L et H fixés et qui contient un liquide ne dépend que de la masse totale qui est la somme de la masse de la boîte et du contenu de la boîte.
- On réalise l'expérience mentale suivante. On diminue progressivement la masse surfacique en remplaçant à chaque fois la masse « perdue » par une quantité de masse égale de liquide qui est versé dans la boîte. La masse totale de la boîte et du liquide est constante. Donc l'enfoncement X reste constant. On s'arrête lorsque la masse surfacique de la boîte est voisine de 0.
- On réalise l'expérience effective suivante. Avec une boîte faite dans un matériau dont la masse est négligeable par rapport à la masse de liquide qu'elle peut contenir, on observe que l'enfoncement est égal à la hauteur du liquide dans la boîte : les niveaux dans la boîte et hors la boîte coïncident.

Ainsi, on peut établir que la masse de l'eau de la « partie immergée » est égale à la masse de la boîte. D'où, avec les notations L le côté de la base, H pour la hauteur de la boîte et X la hauteur de flottaison, on obtient le modèle algébrique d'une boîte qui flotte sous forme de l'égalité suivante :

$$\underbrace{\underbrace{XL^2}_{\substack{\text{Volume}\\ \text{de l'eau}}}}_{\text{Masse de l'eau}} = \underbrace{0,86 \times \underbrace{(L^2+4HL)}_{\text{surface de la boîte}}}_{\text{masse de la boîte}}$$

Les lettres X, L et H représentent ici trois variables, le signe de l'égalité impose une contrainte sur leurs variations respectives : les grandeurs en jeu deviennent ainsi covariantes. À partir de ce modèle général pour toutes les boîtes de base carrée et de masse surfacique 0,86 g/cm^2, on pourra extraire les modèles locaux, pour chaque famille de boîtes.

Modèles mathématiques locaux

Modèle algébrique des boîtes de base 3×3

Lors de l'expérimentation, les trois boîtes $3 \times 3 \times 2$, $3 \times 3 \times 3$ et $3 \times 3 \times 5$ ont coulé. Le calcul à partir du modèle mathématique le confirme. En effet,

– dans le cas de la boîte $3 \times 3 \times 2$, on a $3 \times 3 \times X = 0,86 \times (3 \times 3 + 4 \times 3 \times 2)$, d'où $X = 3,15$;
– dans le cas de la boîte $3 \times 3 \times 3$, on a $3 \times 3 \times X = 0,86 \times (3 \times 3 + 4 \times 3 \times 3)$, d'où $X = 4,30$;
– dans le cas de la boîte $3 \times 3 \times 5$, on a $3 \times 3 \times X = 0,86 \times (3 \times 3 + 4 \times 3 \times 5)$, d'où $X = 6,59\ldots$;

Dans les trois cas, la boîte a coulé car $X > H$.

Les résultats des expérimentations suggèrent la question suivante : *peut-on déterminer une hauteur de la boîte correspondant à $L = 3$ pour qu'elle flotte ?* .

Le modèle mathématique des boîtes est sous la forme de l'équation avec les variables X et H :

$$9X = 0,86(9 + 12H)$$

d'où

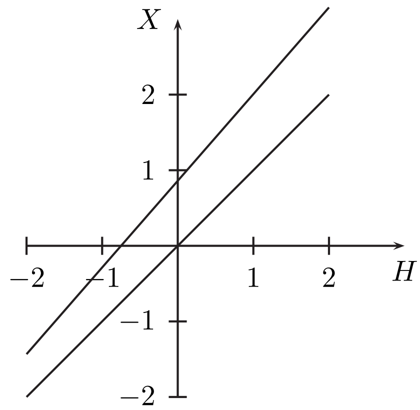
$$X = 0,86(1 + \frac{4}{3}H) \quad \text{ou} \quad X = 0,86 + 1,14666H$$

et donc

$$X > H.$$

En conclusion, la boîte de base 3×3 ne flottera jamais quelle que soit sa hauteur H.

Le résultat obtenu peut être interprété graphiquement. Pour cela, représentons la fonction du premier degré $X = 0,86 + 1,14666H$; où la variable H est une variable indépendante donc représentée sur l'axe horizontal et la variable X est une variable dépendante et donc représentée sur l'axe vertical. On sait que la droite passe par le point sur l'axe vertical correspondant à la valeur $0,86$ et que sa pente est égale à $1,14666$. Pour pouvoir comparer les différentes valeurs de X aux valeurs correspondantes de H, on y ajoute la droite de la fonction identique $X = H$. Les deux droites ne se coupent pas dans le premier quadrant, la droite de la fonction $X = 0,86 + 1,14666H$ reste bien au dessus de la droite de la fonction identique (voir figure ci-dessous). Ce fait confirme que $X > H$ quelle que soit la valeur de H.



Modèle algébrique des boîtes de base $3,5 \times 3,5$

Lors de l'expérimentation, les trois boîtes $3,5 \times 3,5 \times 2$, $3,5 \times 3,5 \times 3,5$ et $3,5 \times 3,5 \times 7$ ont coulé. Ces résultats font penser à la famille des boîtes de base 3×3 dont aucune boîte n'a pu flotter. D'où la question qui s'impose : *peut-on prouver que les boîtes correspondant à $L = 3,5$ coulent toujours ?* Pour y répondre, établissons le modèle mathématique des boîtes de la base $3,5 \times 3,5$.

Pour $L = 3,5$ le modèle général devient $3,5^2X = 0,86 \times (3,5^2 + 4 \times 3,5 \times H)$. D'où

$$X = 0,86 + 0,98H$$

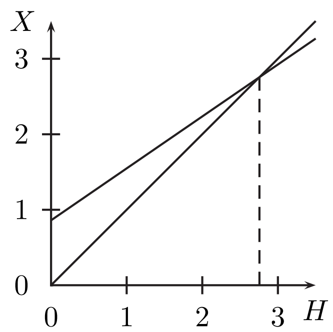
La boîte flotte pour une valeur de H telle que $0,86 + 0,98H < H$ d'où $H > 50,1666\ldots$ qui est la condition de flottaison pour les boîtes de base $3,5 \times 3,5$. Cette condition explique pourquoi les trois boîtes considérées ont coulé.

Modèle algébrique des boîtes de base 5×5

Lors de l'expérimentation, parmi les boîtes de base 5×5, la boîte $5 \times 5 \times 2$ a coulé et les trois autres $5 \times 5 \times 3,5$, $5 \times 5 \times 5$ et $5 \times 5 \times 8$ ont flotté. Vu les résultats des expérimentations, on voudra déterminer toutes les hauteurs de la boîte correspondant à $L = 5$ pour qu'elle flotte. Pour cela, on considère leur modèle mathématique :
$5^2X = 0,86 \times (5^2 + 4 \times 5 \times H)$. D'où

$$X = 0,86 + 0,688H$$

La boîte de hauteur H peut flotter lorsque $0,86 + 0,688H < H$ d'où la condition de flottaison est $H > 2,756\ldots$ La boîte de hauteur de 2 cm ne la vérifie pas, elle a coulé. La condition de flottaison peut être interprétée sur le graphique de la fonction $X = 0,86 + 0,688H$: c'est la valeur de H pour laquelle $0,86 + 0,688H = H$.

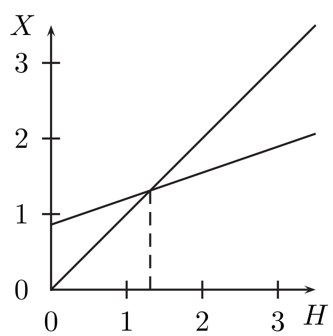


Modèle algébrique des boîtes de base 10×10

Lors des expériences, les trois boîtes $10 \times 10 \times 1,5$, $10 \times 10 \times 3$ et $10 \times 10 \times 10$, ont flotté. Vu les résultats de ces expérimentations, on voudra savoir si on peut déterminer la hauteur pour qu'une boîte correspondante coule. Le modèle algébrique de cette famille de boîtes est
$10^2 X = 0,86 \times (10^2 + 4 \times 10 \times H)$, d'où

$$X = 0,86 + 0,344H$$

La boîte flotte pour les valeurs de H telles que $0,86 + 0,344H < H$, d'où la condition de flottaison qui est $H > 1,3109\ldots$ De nouveau, la condition de flottaison peut être interprétée sur le graphique de la fonction $X = 0,86 + 0,344H$: c'est la valeur de H pour laquelle $0,86 + 0,344H = H$.



Premières conclusions

L'exploration des quatre familles des boîtes permet de formuler les premières conclusions :

– Il y a des valeurs de L pour lesquelles les boîtes ne flottent pas quelle que soit la hauteur H.
– Lorsqu'une boîte flotte pour une valeur donnée L, il existe une valeur minimale de H en dessous de laquelle la boîte coule.

Ces conclusions aboutissent aux affirmations suivantes :

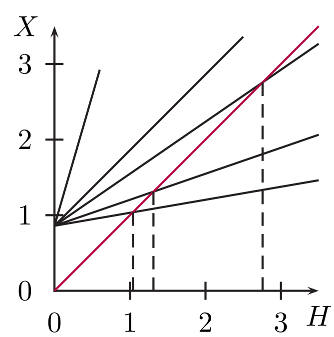
– Il existe une *condition de flottabilité* imposée à L pour une boîte de base $L \times L$.
– Il existe une *condition de flottaison* en fonction de H pour une boîte de base $L \times L$ satisfaisant la condition de la flottabilité.

Retour au modèle général : condition de flottabilité

Chercher la condition de flottabilité revient à répondre à la question suivante : quelles sont toutes les valeurs de L pour lesquelles les boîtes de base $L \times L$ peuvent flotter ? Cette question conduit au modèle général des boîtes : $XL^2 = 0,86(L^2 + 4LH)$, d'où on obtient le modèle fonctionnel paramétré pour X en fonction de H , $X = 0,86 + (3,44/L)H$; le paramètre $3,44/L$ est ici le coefficient de H. En comparant X et H, on obtient

– pour $X < H$, la boîte flotte ;
– pour $X > H$, la boîte coule ;
– pour $X = H$, la boîte flotte.

On représente graphiquement la famille de fonctions $X = 0,86 + (3,44/L)H$ où H est une variable indépendante, X est une variable dépendante et L est un paramètre. On obtient des droites qui peuvent être sécantes ou non dans le premier quadrant avec la droite de la fonction identité. Si, pour une valeur donnée de L, une telle droite est sécante avec la droite de la fonction identité, alors les boîtes de base $L \times L$ flottent à partir d'une certaine valeur pivot de la hauteur H. Pour que cela soit le cas, il faut et il suffit que, dans la formule $X = 0,86 + (3,44/L)H$, le coefficient de H soit plus petit que 1. On obtient ainsi la condition de flottabilité pour une boîte de base $L \times L$ donnée : $3,44/L < 1$ d'où $L > 3,44$.



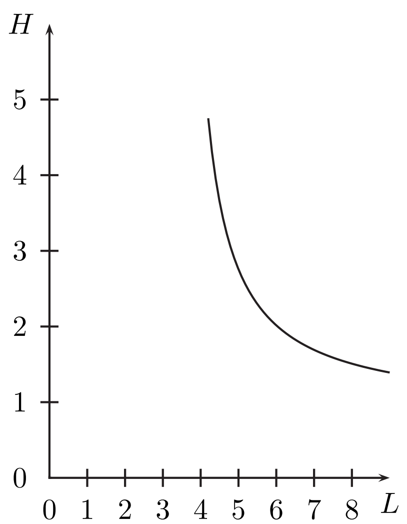
Modèle algébrique des boîtes cubiques

Dans le cas des boîtes cubiques, le modèle général devient $XL^2 = 0,86(L^2 + 4L^2) = 0,86 \times 5L^2 = 4,3L^2$, d'où $X = 4,3$. Cela signifie que les boîtes cubiques flottent à partir de $L \geqslant 4,3$ et qu'il y a le même enfoncement $X = 4,3$ quelle que soit la taille de la boîte.

Existe-t-il d'autres familles de boîtes caractérisées par un même enfoncement ? Pour y répondre, reprenons le modèle algébrique général pour l'enfoncement : $X = 0,86 + (3,44/L)H$ ou encore $X = 0,86 + 3,44(H/L)$. La dernière formule met en évidence le fait que l'enfoncement X est une fonction du rapport H/L. Ainsi, toutes les boîtes caractérisées par un même rapport de H/L auront un même enfoncement.

La valeur minimale de la hauteur pour qu'une boîte flotte

La hauteur minimale $H^\star$ requise pour qu'une boîte de la largeur donnée L flotte doit satisfaire la condition $H^\star = 0,86 + (3,44/L)H^\star$ ou bien la condition $H^\star = 0,86L/(L - 3,44)$. On y reconnait une fonction homographique représentée à la figure 5. À partir de la formule $0,86L/(L-3,44)$, on déduit directement que le graphique de la fonction sera une branche d'hyperbole, que cette fonction sera décroissante, caractérisée par deux asymptotes : horizontale $H^\star = 0,86$ et verticale $L = 3,44$.



Le domaine de la validité de la fonction est déterminé par la condition $L > 3,44$, ce domaine est le même que le domaine de la flottabilité.

L'asymptote horizontale $H^\star = 0,86$ signifie que la hauteur minimale nécessaire pour que la boîte continue à flotter s'approche de 0,86. En dessous de cette hauteur, toutes les boîtes vont couler.

L'asymptote verticale $L = 3,44$ signifie que lorsque L s'approche de 3,44, la hauteur minimum requise $H^\star$ tend vers l'infini (elle s'envole).

La décroissance de la fonction signifie que les valeurs de $H^\star$ diminuent lorsque les valeurs de L augmentent.

Contribution de l'activité de la modélisation des boîtes à l'appréhension du concept de fonction lui-même

La modélisation fonctionnelle joue un rôle moteur dans l'apprentissage du concept de fonction tout en instrumentalisant cette notion dans les problèmes impliquant la dépendance des variables. Plus particulièrement, la modélisation des boîtes qui flottent contribue à l'appréhension du concept de la fonction par plusieurs de ses aspects, comme cela est montré ci-dessous.

La nécessité de discriminer la variable indépendante de la variable dépendante

Pour connaître l'enfoncement X d'une boîte en fonction de la hauteur H pour une base $L \times L$ donnée, on doit exprimer la variable X en fonction de la variable H, ce qui impose la transformation de la formule $XL^2 = 0,86\left(L^2 + 4HL\right)$ en la formule $X = 0,86 + \frac{3,44}{L} \times H$. Pour une valeur fixée de L, on y reconnaît la formule d'une fonction du premier degré en H.

La nécessité de repartir des rôles des lettres entre les variables et les paramètres

Dans la formule $X = 0,86 + \frac{3,44}{L} \times H$, la variable L joue le rôle d'un paramètre parce qu'à chaque valeur de L, il correspond une fonction différente. Grâce à cette variable-paramètre, une seule formule rassemble toute une famille de fonctions paramétrée ce qui permet d'étudier toutes ces fonctions d'un seul coup au lieu de les étudier une par une.

La nécessité d'avoir une convention de la représentation graphique d'une fonction

La formule fonctionnelle $X = 0,86 + \frac{3,44}{L} \times H$ n'a pas d'écriture standardisée en x et en y. Cela pose le problème de sa représentation graphique lorsqu'on a admis que les x sont représentés sur l'axe horizontal et les y sur l'axe vertical. Or, la convention de la représentation indispensable ici met en évidence le statut différent des variables dans une relation fonctionnelle : la variable indépendante est représentée sur l'axe horizontal et la variable dépendante est représentée sur l'axe vertical. De plus, les valeurs de la variable dépendante sont représentées par les longueurs des segments placés verticalement au bout des segments horizontaux de même origine et dont les longueurs correspondent aux valeurs de la variable indépendante.

L'intérêt d'étudier les fonctions par classes (ici la classe de fonctions du premier degré et la classe de fonctions homographiques)

Un enseignement des fonctions, classe par classe, favorise le processus de modélisation. La paramétrisation pour la modélisation fonctionnelle est fondamentale. Elle permet en effet

- de catégoriser les fonctions spécifiques en classes de fonctions ou modèles fonctionnels ;
- d'adapter et d'ajuster le modèle pour déterminer une fonction sous contraintes, ce qui nécessite la reconnaissance du modèle fonctionnel, le choix de son expression et de ses paramètres, l'ordre de prise en compte des contraintes qui permettent de déterminer les valeurs des paramètres et de les ajuster.
- de généraliser et, de ce fait, de réaliser une économie de pensée.

Pour en savoir plus

[1] Chevallard Y., *Arithmétique, Algèbre, Modélisation, étapes d'une recherche*, 1989, ed. IREM Aix-Marseille.

[2] Krysinska M., Schneider M., *Emergence de modèles fonctionnels*, 2010, Les éditions de l'Université de Liège.

Mariza Krysinska est membre du GEM à l'UCL et du Ladimath à l'ULg,
✉maria.krysinska@belgacom.net.

Des carrés qui s'attachent. . .

$$\begin{aligned}
12^2 + 33^2 &= 1233\\
88^2 + 33^2 &= 8833\\
9412^2 + 2353^2 &= 94122353\\
74160^2 + 43776^2 &= 7416043776\\
876712^2 + 328768^2 &= 876712328768\\
883212^2 + 321168^2 &= 883212321168
\end{aligned}$$