Rencontre avec la droite mère Un élégant problème d'origami de Kazuo Haga

Laure Ninove

Mots clés : Géométrie, pliage, origami, exploration, apprentissage de la démonstration, bissectrices, cercle inscrit, cercles exinscrits, angles, parallélisme

Dans cet article, nous présentons une activité de Kazuo Haga, alliant pliage d'un carré de papier et géométrie plane. Les surprenants résultats obtenus par K. Haga mettent en scène les bissectrices de triangles, les cercles inscrits et exinscrits, les propriétés des angles alternes-internes.

Introduction

Kazuo Haga est professeur de biologie de l'université du Tsukuba au Japon. Depuis longtemps, il s'intéresse à l'origami, l'art de plier une feuille de papier, et particulièrement à ce qu'il a baptisé les *Origamics* : les mathématiques par le biais de l'origami. Actuellement à la retraite, il anime des leçons dans des écoles avec parfois une centaine d'élèves, de classes correspondant à nos première à troisième secondaires. Son livre *Origamics : Mathematical explorations through paper folding* [1] est un petit bijou, proposant une dizaine de sujets traitant de la géométrie, et particulièrement de l'apprentissage de la démonstration en géométrie plane à partir de pliages. Les pliages proposés, contrairement à l'origami traditionnel, ne représentent pas un objet, une fleur ou un animal, et font intervenir un petit nombre de plis.

Je souhaite ici partager avec vous un des problèmes de ce livre que j'apprécie particulièrement. Une exploration de ce problème peut être proposée en deuxième secondaire, année où sont étudiées les notions géométriques abordées par ce pliage. On pourrait également proposer cette activité en troisième année dans le cadre de l'apprentissage de la démonstration en géométrie.

Dans cet article, nous commencerons par décrire les pliages. Puis nous formulerons des conjectures sur base de l'observation des plis et les démontrerons ensuite. Après quelques propositions de prolongements possibles, nous terminerons en donnant quelques pistes de mise en œuvre dans nos classes.

1. Construction d'une droite mère et de ses enfants

Pour réaliser l'activité, il faut se munir d'au moins une feuille de papier *carrée* (une feuille de bloc-note, souvent de dimensions 9 cm × 9 cm, convient très bien). Mais pour le confort de l'exploration, on peut également se servir d'autres carrés de mêmes dimensions, d'une latte, d'une équerre, de feutres ou crayons de couleur, de quelques feuilles de format A4 et de colle ou papier-collant.

Prenez votre carré de papier et faites un pli rectiligne, quelconque. Marquez bien ce pli puis dépliez votre carré. Ce premier pli est appelé la *droite mère*. On peut le surligner en couleur pour bien le distinguer des plis suivants, ou encore retourner le carré pour effectuer les plis futurs dans l'autre sens.

A présent, nous allons construire les *plis enfants* de la droite mère. Pour cela, prenez d'abord un côté du carré non coupé par la droite mère et faites un pli qui amène ce côté *le long de* la droite mère (voir figure 1). Marquez-le bien puis *dépliez*. Vous avez construit un pli enfant. Prenez à présent un côté du carré coupé par la droite mère et pliez et dépliez successivement chacune des parties de ce côté le long de la droite mère pour obtenir deux nouveaux plis enfants. Faites ensuite de même pour tous les autres côtés ou parties de côtés du carré, en dépliant à chaque fois. Il est simple de voir que si la droite mère coupe exactement deux côtés du carrés, on obtiendra six plis enfants, qu'on en obtiendra cinq si celle-ci passe par un sommet du carré et seulement quatre si la droite mère correspond à une diagonale du carré.

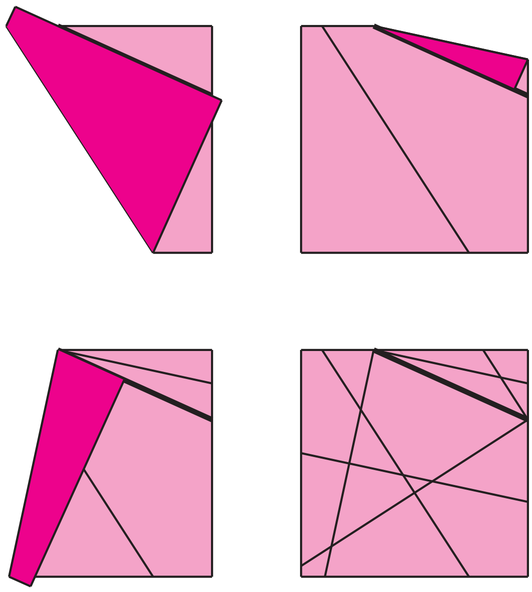


Fig 1. Pliage de côtés ou parties de côtés du carré le long de la droite mère et plis enfants obtenus.

2. Exploration des plis et conjectures

Prenez quelques minutes pour observer et explorer votre pliage. Attardez-vous sur les plis, leurs points d'intersection, leurs positions relatives, des angles, des figures géométriques particulières, ou des points alignés que vous pourriez repérer. Prenez éventuellement d'autres carrés, avec des droites mères dans des positions différentes, y compris sur une diagonale ou médiane du carré, et testez la viabilité de vos conjectures et observations.

En formation continuée d'enseignants, je laisse réfléchir cinq minutes au plus en groupes de quatre, sans autres indications que celles signalées ci-dessus. Nous mettons ensuite en commun les observations et conjectures.

La conjecture la plus surprenante est probablement celle-ci :

1. les points d'intersection des plis enfants semblent se trouver sur des médianes ou diagonales du carré.

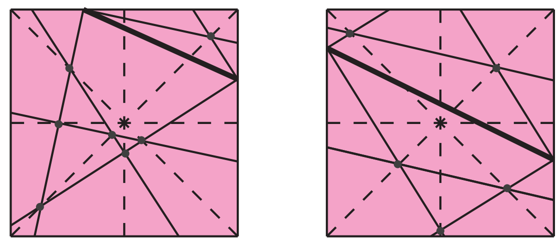


Fig. 2

Mais d'autres peuvent être proposées, comme par exemple :

2. il y a deux ou trois paires de plis parallèles selon que la droite mère coupe des côtés adjacents ou opposés du carré ;

3. pour deux de ces paires de parallèles, un pli leur est perpendiculaire (à moins d'être dans une configuration particulière où la droite mère passe par un des sommets du carré) ;

4. quand la droite mère coupe deux côtés opposés du carré, un rectangle est formé par le prolongement de certains plis ;

5. certains plis ou leurs prolongements forment des triangles rectangles isocèles.

Dans cette note, nous commencerons par démontrer la première conjecture, à savoir que les points d'intersection des plis enfants se situent sur des diagonales ou médianes du carré, puis nous nous intéresserons aux conjectures relatives à la position relative des plis. Notez qu'il n'y a pas d'ordre imposé pour démontrer ces conjectures et qu'il n'est pas non plus indispensable de les considérer toutes, puisqu'elles sont indépendantes les unes des autres. Cela aurait également du sens de commencer par les justifications concernant le parallélisme et la perpendicularité de plis car celles-ci sont probablement plus simples que celles concernant la position des points d'intersections.

3. Position des points d'intersection

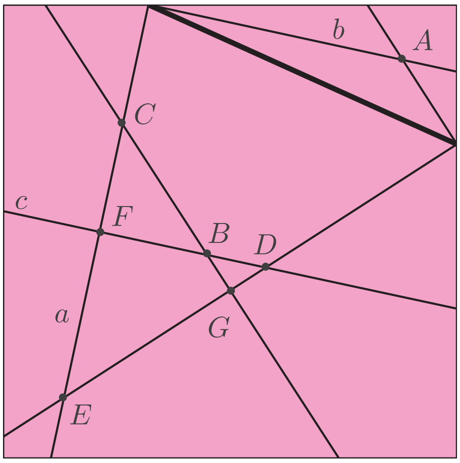


Fig 3. Configuration étudiée.

3.1. Recherche

Pour démarrer, on peut par exemple prendre une configuration où la droite mère rencontre deux côtés adjacents du carré. Considérons pour commencer le point d'intersection A situé à l'intérieur du triangle déterminé par la droite mère et les deux côtés du carré qu'elle rencontre (voir figure 3). On peut s'intéresser au mouvement qui a été fait pour construire les deux plis. Que représentent-ils géométriquement ?

Ensuite on peut envisager le point d'intersection correspondant aux deux plis amenant les côtés non coupés du carré sur la droite mère (point B sur la figure 3). Enfin, on pourra adapter l'argumentation pour démontrer que chacun des autres points d'intersection se situe également sur une diagonale ou sur une médiane du carré. Il peut être utile dans cette phase de recherche de déposer le carré sur une feuille de papier plus grande et de prolonger à la latte des plis et des côtés du carré.

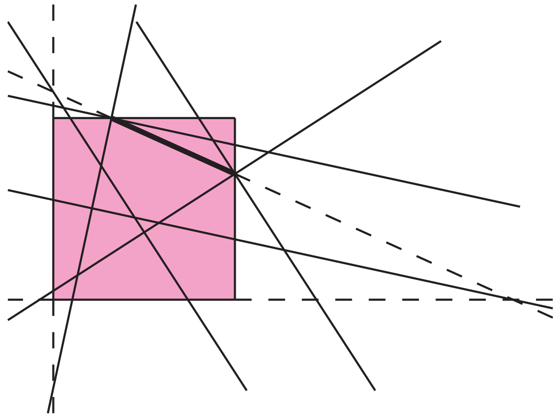


Fig 4. Prolongement des côtés du carré, de la droite mère et des plis enfants.

3.2. Explication

Venons-en aux justifications. Quand on plie pour amener une droite le long d'une autre qui ne lui est pas parallèle, le pli obtenu est la *bissectrice* de l'angle formé par les deux droites. Le point A se situe donc sur deux plis correspondant aux bissectrices de deux angles du triangle formé par la droite mère et les côtés supérieur et droit du carré. Les bissectrices d'un triangle étant concourantes, il doit également se situer sur la bissectrice du troisième angle du triangle. Cet angle étant droit, cette bissectrice est bien la diagonale du carré.

Ce raisonnement peut être transposé pour déterminer la position du point B. Celui-ci est en effet situé à l'intersection des bissectrices de deux angles d'un triangle formé par le prolongement de la droite mère ainsi que des deux côtés du carré non coupés par celle-ci (voir figure 5). Il se trouve donc sur la troisième bissectrice de ce triangle, qui est également une diagonale du carré.

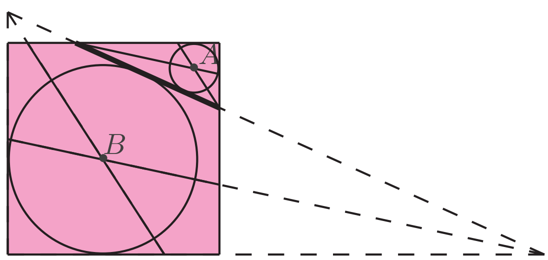


Fig 5. Les points A et B, intersections des bissectrices des deux triangles rectangles, sont les centres des cercles inscrits dans ces triangles.

Néanmoins, on ne peut plus utiliser cet argument tel quel pour les points C, D et E (notons que ces points ne sont pas tous forcément présents sur toutes les configurations). Il est alors utile de se rappeler de la caractérisation de la bissectrice comme lieu des points équidistants des deux côtés de l'angle. Autrement dit, lorsque l'on plie pour amener une droite le long d'une autre, la droite déterminée par le pli est le *lieu des points équidistants* des deux droites que ce pli superpose. Ceci est vrai pour deux droites sécantes (on obtient la bissectrice) ainsi que pour deux droites parallèles (on obtient la droite parallèle aux deux droites et équidistante de celles-ci).

Ainsi, par exemple, le point C est à égale distance du côté gauche du carré et de la droite mère et à la même distance du côté supérieur et de la droite mère (voir figure 6). Il est donc situé à égale distance du côté gauche et du côté supérieur du carré, et donc sur une diagonale de celui-ci. Cet argument peut être adapté pour les points D et E, ainsi que les points F et G, situés quant à eux sur les médianes du carré.

En outre, ce point C est l'intersection d'une bissectrice intérieure et d'une bissectrice extérieure du triangle formé par le côté supérieur et le prolongement du côté gauche et de la droite mère. Il est donc le centre d'un cercle exinscrit à ce triangle. Cette propriété est valable également pour les points D et E, mais pas pour les points F et G situés sur les médianes.

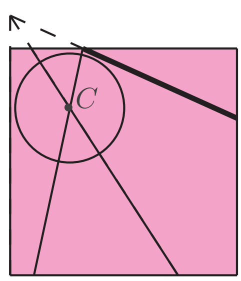


Fig 6. C est le centre d'un cercle exinscrit.

Cette activité de la droite mère peut être une occasion de proposer à certains élèves, en prolongement, de prouver la concourance de deux bissectrices extérieures et une intérieure et de découvrir les cercles exinscrits à un triangle, propriété peu connue des élèves du secondaire.

4. Positions relatives des plis

4.1. Perpendicularité

Considérons sur la figure 3 les plis a et b, respectivement construits en amenant les parties gauche et droite du côté supérieur du carré sur la droite mère. Pourquoi sont-ils perpendiculaires ?

Il s'agit des deux bissectrices d'un couple de droites sécantes. La *perpendicularité des bissectrices d'un couple de droites* sécantes se démontre simplement en s'appuyant sur le partage d'un angle plat en deux paires d'angles de mêmes amplitudes. On peut le visualiser par le pliage simultané selon a et b.

4.2. Parallélisme

Considérons à présent les plis b et c de la figure 3, respectivement construits en amenant la partie droite du côté supérieur ainsi que le côté inférieur du carré sur la droite mère, qui semblent parallèles. On peut essayer de visualiser la situation en pliant simultanément selon b et c ou encore déposer son carré sur une feuille plus grande et prolonger la droite mère, les côtés et les plis en question.

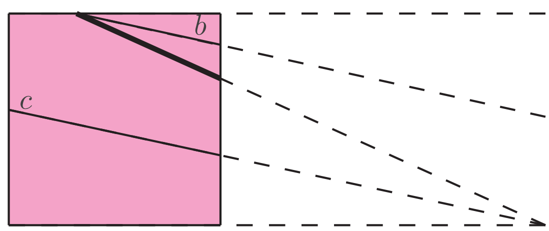


Fig. 7

Pour la justification, on utilise encore le fait que les plis formés correspondent à des bissectrices. Dans ce cas, on exploite également la propriété des *angles alternes-internes* déterminés par deux parallèles et une sécante. Remarquons que nous avons ici l'occasion d'utiliser cette propriété *dans les deux sens* :

- les côtés du carré sont parallèles donc les angles alternes-internes déterminés par ces côtés et la droite mère ont même amplitude ;
- les bissectrices b et c de ces angles les partagent en angles de même amplitude ;
- les angles alternes-internes formés par les bissectrices b et c et la droite mère ont même amplitude donc les bissectrices sont parallèles.

4.3. Angles de $45°$

La présence de triangles rectangles isocèles (par exemple le triangle CBF sur la figure 3) m'a été suggérée pour la première fois par des participants à une formation. Elle n'est pas discutée dans le livre de Haga [1] ni dans l'ouvrage de Hull [2] qui présente également cette activité. En fait, si on a déjà démontré la perpendicularité de certains plis, on est ramené à démontrer que les plis amenant deux côtés adjacents sur la droite mère forment des angles de $45°$ et $135°$ (par exemple les plis se coupant en B à la figure 5). On peut donc trouver des angles de $45°$ dans chaque configuration, y compris dans le cas où la droite mère coupe deux côtés opposés du carré. Cette propriété géométrique de notre pliage peut faire émerger l'énoncé général suivant : « *Dans tout triangle MNP rectangle en M, l'angle formé par les bissectrices intérieures de sommets N et P mesure $45°$.* »

Une preuve, simple, est basée sur la somme des amplitudes des angles d'un triangle et le partage d'un angle en deux angles de même amplitude par une bissectrice. Notons qu'il peut être plus aisé de s'intéresser à l'angle obtus formé par les deux bissectrices.

Les observations concernant les plis parallèles, perpendiculaires ou la présence de rectangles ou de triangles rectangles isocèles peuvent être formulés synthétiquement de la manière suivante :

« *Deux plis enfants quelconques sont soit parallèles, soit perpendiculaires, soit sécants formant un angle de $45°$.* »

5. Prolongements possibles

Nous n'avons pas fini de faire le tour du problème de la droite mère. Dans son livre [1], Haga propose de prolonger tous les plis à l'extérieur du carré et de s'intéresser à leurs points d'intersection, y compris ceux se trouvant à l'extérieur du carré. En considérant que le carré fait partie d'un pavage de carrés de mêmes dimensions, on peut démontrer que tous les points d'intersection des plis enfants se situent sur des diagonales et médianes de carrés du pavage. Hull [2] propose quant à lui de s'intéresser à des feuilles de papier polygonales…

6. Pistes de mise en œuvre

6.1. Exploitation possible en secondaire

L'activité de la droite mère, on l'a vu, fait intervenir de nombreux contenus de géométrie de deuxième secondaire.

1. La bissectrice d'un angle le partage en deux angles de même amplitude.
2. La bissectrice d'un angle est le lieu des points équidistants des côtés de cet angle.
3. Les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes. Leur point d'intersection est le centre du cercle inscrit au triangle.
4. Des angles alternes-internes formés par deux droites parallèles et une sécante ont même amplitude.
5. Des angles alternes-internes de même amplitude sont formés par deux droites parallèles et une sécante.
6. La somme des amplitudes des angles intérieurs d'un triangle vaut $180°$.

Cependant, on peut difficilement espérer que les élèves de ce niveau trouvent seuls toutes les preuves des conjectures présentées dans cette note. Mais l'exploration du pliage et la recherche collective et orale d'arguments – pour l'une ou l'autre conjecture soigneusement sélectionnée – ainsi que l'organisation de ceux-ci, avec l'aide du professeur, peuvent constituer une initiation à la démonstration en deuxième année.

Comme nous l'avons déjà souligné, il n'est pas nécessaire de s'atteler à la justification de toutes les conjectures émises, celles-ci étant indépendantes les unes des autres. On pourrait par exemple choisir de s'intéresser uniquement à :
- la justification que les plis correspondant aux deux parties d'un côté du carré coupé par la droite mère sont des bissectrices perpendiculaires d'un couple de droites ;
- la justification du parallélisme de certains plis ;
- la justification que le point A dans la configuration de la figure 5 est bien sur la troisième bissectrice du triangle rectangle formé ;

ou aménager cette liste en fonction de la classe concernée.

Il peut être confortable pour aborder l'activité de la droite mère, mais pas indispensable, d'avoir déjà dans sa boîte à outils la propriété de la concourance des bissectrices intérieures d'un triangle. Cependant, à condition d'avoir déjà vu que la bissectrice est le lieu des points équidistants des côtés d'un angle, il est possible d'introduire cette propriété par la recherche de la justification de la position du premier point sur la diagonale.

L'activité de la droite mère pourrait également être exploitée en troisième générale et donner l'occasion de plusieurs exercices de construction et de rédaction de démonstrations réactivant des contenus de l'année précédente. On pourrait par exemple faire émerger de l'activité et démontrer les propriétés générales suivantes :

1. Les bissectrices d'un couple de droites sécantes sont perpendiculaires.
2. Deux bissectrices extérieures d'un triangle sont concourantes avec la bissectrice intérieure du troisième angle de ce triangle. Leur point d'intersection est le centre de l'un des trois cercles exinscrits au triangle.
3. Dans tout triangle ABC rectangle en A, l'angle formé par les bissectrices intérieures de sommets B et C mesure 45°.

6.2. Déroulement possible

On peut grouper les élèves par quatre environ, autour d'une table. Le professeur commence par présenter le pliage oralement devant la classe, en utilisant un grand carré sur lequel il surligne sa droite mère en même temps que ses élèves le font sur leur papier. Une manière de vérifier que le pliage des élèves est correct est de leur demander le nombre de plis enfants, qui doit être de six, sauf dans les cas où la droite mère passe par un sommet du carré. Les élèves qui en ont moins ont généralement oublié de plier le long de la droite mère la plus courte des deux parties d'un côté intersecté par celle-ci.

J'aime particulièrement la phase d'exploration du pliage à la recherche de conjectures ou d'affirmations, en petits groupes. Elle ne doit durer que quelques minutes mais permet aux élèves d'entraîner leur créativité, qualité essentielle du chercheur, et pourquoi pas de se laisser émerveiller par ce qu'ils observent et qui semble magique au premier abord. Pour bien exploiter la mise en commun et favoriser la participation de tous, on peut commencer par demander à *chaque* groupe de partager *une* observation qu'il aurait faite.

Vient ensuite la phase de construction de démonstrations. Pourquoi ne pas laisser les élèves choisir eux-mêmes ce qu'ils souhaitent démontrer parmi les conjectures faites, en les guidant éventuellement pour s'intéresser en priorité aux plus accessibles ? Un ou deux groupes pourraient s'intéresser à la position des points d'intersection, un autre à la perpendicularité et au parallélisme des plis, un autre encore à l'angle de 45° formé par des paires de plis. Les groupes pourraient ensuite être amenés à présenter leurs découvertes au reste de la classe. Ce serait une occasion de mettre en œuvre ou de développer le travail en équipe et la communication au cours de mathématiques.

On termine par une synthèse des différentes propriétés utilisées ou démontrées. Pour mobiliser ou évaluer les apprentissages, on peut proposer en exercice de considérer le cas où la droite mère rencontre deux côtés opposés du carré, le cas où elle passe par un sommet du carré ou encore les cas où elle est une médiane ou une diagonale du carré. En effet, le point A de la configuration de la figure 5 est sans aucun doute le plus simple à localiser et on a donc tendance à surtout étudier le cas où la droite mère coupe deux côtés adjacents du carré. Les arguments développés restent néanmoins valables dans toutes les autres configurations.

6.3. Indications possibles aux élèves

Selon les classes, on peut ou non faire prendre conscience préalablement à l'activité que les plis amenant une droite sur une autre qui lui est sécante correspondent à une bissectrice de l'angle formé.

Pour la position des points d'intersection, il est utile de suggérer l'ordre dans lequel on va considérer les points (d'abord le point A de la configuration de la figure 5).

En règle générale, il est utile de proposer aux élèves de refaire le mouvement de pliage : cela permet de réaliser qu'on plie suivant une bissectrice ou encore de visualiser la perpendicularité des bissectrices de deux droites sécantes.

Il peut également être judicieux pour le professeur de simplifier des figures ou de prolonger certains traits au tableau ou avec un rétroprojecteur afin de faire apparaître des figures-clés. Par exemple, pour la justification du parallélisme, on peut représenter au tableau le prolongement des côtés du carré, de la droite mère et des plis considérés et ainsi faire apparaître des figures-clés d'angles alternes-internes (figure 7). De même, la preuve de l'existence d'angles de 45° n'est pas difficile à construire, à condition d'épurer le dessin, pour ne garder que le triangle rectangle et ses deux bissectrices considérées, en prolongeant éventuellement les côtés et les plis en dehors du carré.

6.4. Matériel utile

L'utilisation d'un rétroprojecteur et de transparents peut être utile. J'utilise en formation quelques transparents colorés, à superposer selon ce qu'on veut démontrer, il s'agit principalement des figures présentées dans cet article mais on pourrait en ajouter d'autres. Pour montrer le pliage, l'enseignant peut se munir d'un grand carré découpé dans une feuille A4. Pour les élèves, il vaut mieux prendre des carrés plus petits afin de pouvoir les déposer sur une feuille plus grande pour la réflexion. Les feuilles d'un bloc-note conviennent bien. Pour le reste, le matériel usuel des élèves suffit.

Pour en savoir plus

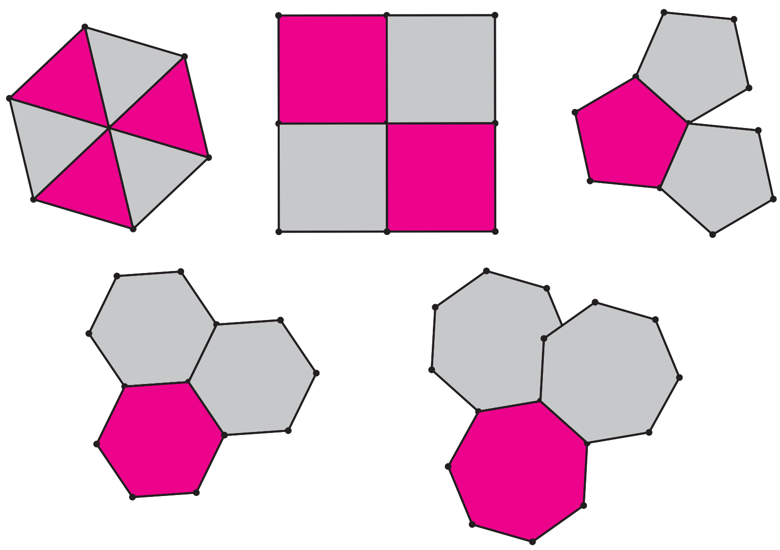
[1] Haga K., *Origamics : Mathematical explorations through paper folding*, édité et traduit par J.C. Fonacier et M. Isoda, World Scientific, Singapore, 2008.

[2] Hull Th., *Project Origami. Activities for Exploring Mathematics*, A K Peters, Wellesley, MA, 2006.

Laure Ninove est maître-assistante à l'ENCBW, haute école Vinci. Adresse privée : Rue des Fusillés 24, 1340 Ottignies, laure.ninove@gmail.com.

Une fiche de travail

Un jeu de Ressemblances--Différences (1)



Comparer les figures entre elles. Sont-elles toutes construites de manière analogue ? Chacune a-t-il une particularité spécifique ? A-ton envie d'en regrouper certaines ? . . . ? ? ?

Des commentaires à propos de cette fiche de travail sont disponibles p. 67