De l'élève aux mathématiques, le chemin s'allonge(*)

Nicolas Rouche(**)

Celui qui veut repenser l'enseignement des mathématiques ne peut pas faire l'économie d'une réflexion globale sur ce qu'est cette discipline en perpétuelle évolution. Les quelques pages qui suivent vont dans ce sens. Elles sont destinées d'abord aux responsables de l'enseignement. On espère en outre que le lecteur peu enclin aux mathématiques y trouve, moyennant une bonne dose d'attention, à améliorer sa perception de cette discipline. La méconnaissance de ce que sont les mathématiques est considérable, même dans le public cultivé. Et les mathématiciens s'expliquent trop peu. Essayons[1].

Et, pour commencer, une observation essentielle. Beaucoup de gens pensent que les mathématiques sont une science d'une rigueur parfaite, constituée définitivement et donc immuable. Or il n'y jamais eu autant de recherches en mathématiques qu'aujourd'hui, et donc le volume des connaissances dans cette discipline s'accroît rapidement. Mais il y a plus étonnant : c'est qu'au cours des siècles, la connaissance mathématique a subi de profondes mutations et s'est de plus en plus éloignée de la pensée commune.

Or qu'est-ce qu'apprendre les mathématiques ? Ce n'est évidemment pas construire d'emblée, à côté de la pensée commune, un univers distinct, muni de ses propres critères d'intelligibilité, mais c'est bien plutôt utiliser la logique et les intuitions communes pour élaborer petit à petit un univers conceptuel original, soumis à un type de rationalité exigeant. Ainsi, si les mathématiques ne peuvent s'apprendre qu'au départ de la pensée commune et si elles s'éloignent sans cesse de celle-ci, cela pose un problème pour leur enseignement.

1. Un survol historique

1.1. Des mathématiques sans longues déductions

Les Assyro-Babyloniens et les Égyptiens de l'antiquité nous ont légué de nombreuses solutions de problèmes d'arithmétique portant sur des nombres particuliers. Ils ont découvert comment calculer les aires de certaines figures planes et les volumes de certains solides. Ils ont aussi mis au jour un certain nombre d'autres propriétés géométriques.

(*) L'APMEP remercie la revue LA PENSÉE ET LES HOMMES pour l'autorisation de publier ce texte, qui paraîtra aussi dans un ouvrage intitulé LA SCIENCE POUR TOUS (à paraître).

(**) Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, Belgique.

(1) Les quelques notes de bas de page précédées du signe (*) sont destinées au lecteur mathématicien.

Depuis l'antiquité et jusque tard dans l'ère chrétienne, les Chinois et les Indiens ont aussi été très actifs en mathématiques. Ils ont résolu des questions d'arithmétique. Ils ont démontré des propriétés géométriques, le plus souvent en découpant une figure polygonale en parties, puis en réassemblant celles-ci autrement. Mais aucun de ces quatre peuples n'a produit de connaissances mathématiques organisées en de longs enchaînements déductifs.

Tout à l'opposé, les Grecs de l'antiquité nous ont légué de vastes théories déductives. Examinons donc cette importante rupture dans la conception des mathématiques.

1.2. Les Grecs

Les Grecs de l'époque classique (vers le IV^{e} siècle avant Jésus-Christ) ont changé les règles de la pensée mathématique. Les *Éléments* d'Euclide en témoignent. Esquissons certains caractères fondamentaux de ce grand traité.

Démontrer des évidences. Les *Éléments* commencent par un petit nombre d'axiomes considérés comme évidents. Mais attention, il s'agit d'évidences portant sur des objets d'un monde idéalisé (le point idéal, la droite idéale, etc.), non sur leurs correspondants dans le monde sensible (la droite ou le point dessinés, etc.). Tous les axiomes étaient évidents, sauf un qui s'imposait moins que les autres, mais qui a été retenu quand même, car il était nécessaire à la construction théorique. Il s'agit du célèbre cinquième axiome, celui qui dit en substance que *par un point extérieur à une droite, on peut mener une et une seule parallèle à celle-ci.*

Une fois les axiomes choisis, la méthode consiste à en déduire *tout le reste*. Mais dans ce reste, il y aussi des évidences. Euclide n'a donc pas pris toutes les évidences comme axiomes, et même il en a pris le moins possible. Et comme il devait démontrer tout le reste, il devait donc bien démontrer certaines évidences. Or l'idée de démontrer une évidence est étrangère à la pensée commune : pour celle-ci, démontrer une propriété, c'est l'amener à l'évidence. Et donc les évidences n'ont pas besoin de démonstration. Mais alors quel est le sens du verbe *démontrer* chez Euclide ? Il veut dire *déduire des axiomes ou de propriétés déjà déduites des axiomes*. Ce qui revient à vérifier des implications(2). Pour comprendre le sens de telles opérations, il faut avoir le projet de construire une théorie axiomatique, ce qui n'est pas le fait de la majorité des élèves. Le plus souvent, ceux-ci ne comprennent pas pourquoi on leur demande de démontrer des évidences, et ils en souffrent.

Des déductions très longues. Une autre nouveauté radicale de la pensée mathématique grecque est que, partant ainsi de quelques axiomes et définitions claires, elle en tire par le seul moyen de la déduction, une chaîne (ou plutôt une arborescence) de théorèmes constituant une vaste théorie. Celle-ci n'emprunte rien à d'autres sources qu'à ses axiomes, et elle peut être développée indéfiniment, c'est-à-dire étendue à de nouveaux théorèmes, sans jamais conduire à des résultats douteux

(2) Tout énoncé de théorème a la forme « si …, alors … » Démontrer un théorème, dans le sens donné ici au verbe *démontrer*, c'est insérer entre le « si … » et le « alors … » des intermédiaires qui rendent l'énoncé indubitable. Mais quand celui-ci apparaît d'avance comme indubitable…

ou ambigus(3). C'est une *théorie déductive autonome de longue haleine*. Or c'est là la propriété principale qui caractérise la pensée mathématique encore aujourd'hui(4).

Cette propriété n'existe pas dans la pensée commune, non plus que dans les sciences humaines, car les concepts n'y ont pas l'univocité nécessaire. Après deux ou trois pas de déduction (deux ou trois implications), la pensée s'y enlise et on est obligé de préciser les conclusions à l'aide de correctifs, de nuances et d'exemples. Imaginerait-on par exemple d'engager dans une longue déduction des termes tels que la révolution, la jalousie, la religion ? C'est d'ailleurs pour soutenir ce genre de pensée dépourvue d'autonomie que le sociologue Max Weber a introduit la notion d'idéal-type(5).

Quant aux sciences de la nature – physique, chimie, biologie –, elles ne produisent des développements déductifs autonomes que dans la mesure où elles sont mathématisées. Mais au terme de leurs raisonnements, elles cherchent confirmation dans l'expérience. Une théorie physique, par exemple, est accrochée déductivement à quelques propositions de départ. Mais elle est abandonnée dès que l'une ou l'autre des propositions qu'elle démontre s'avère contredite par une expérience reproductible(6).

Retenons donc cet événement historique majeur qu'a été l'irruption, dans la pensée scientifique, de théories déductives autonomes de longue haleine. Avec la nuance toutefois que, *jugé selon les critères de rigueur actuels*, le traité d'Euclide présentait quelques (rares) lacunes. Nous reviendrons sur ce dernier point au moment où nous dirons quelques mots de la réforme des « mathématiques modernes » (voir la section 3.1).

Des preuves par l'absurde. La pensée euclidienne s'appuie sur la preuve par l'absurde. Dans ce type de preuve, pour démontrer une proposition (qui s'avérera vraie), on suppose (provisoirement) vraie la proposition opposée, c'est-à-dire une proposition fausse. De cette dernière, on tire par raisonnement une contradiction, ce qui suffit à prouver qu'elle est fausse, et donc que l'autre est vraie(7).

---

(3) (*) Nous mettons ici entre parenthèses le résultat de Gödel sur la limitation interne des formalismes.

(4) Ajoutons toutefois que l'on ne s'intéresse pas à tous les théorèmes possibles dans une théorie : on étudie soit ceux qui ont du sens dans la culture mathématique globale, soit ceux qui peuvent être utiles en dehors des mathématiques. Voir la section 2.2.

(5) Lorsqu'on veut évoquer une catégorie de choses possédant une certaine unité, mais dont les contours sont néanmoins indécis, on peut s'appuyer utilement sur une définition tranchée et claire, à condition de n'utiliser celle-ci qu'en l'accompagnant des correctifs, des nuances et des exemples nécessaires. On appelle *idéal-type* un concept de cette nature, comme il n'en existe pas en mathématiques.

(6) Ajoutons qu'une théorie, même contredite par l'expérience, peut demeurer utile dans la pratique, si elle fournit une approximation quantitative acceptable de la réalité. Tel est le cas de la mécanique appelée classique.

(7) Voici un exemple classique de preuve par l'absurde. On veut prouver qu'*il est impossible de trouver deux nombres naturels premiers entre eux m et n tels que* $2n^2 = m^2$. On suppose que c'est possible. Mais puisque $2n^2 = m^2$, et qu'il y a un facteur 2 dans le premier membre, il y en a un aussi dans le second. Donc m contient un facteur 2. Mais le second membre, c'est m^2.

On peut croire que le recours à la preuve par l'absurde contribue à écarter la pensée mathématique de la pensée commune. Mais on peut aussi penser le contraire.

Arguments pour :

la preuve par l'absurde est indirecte : je ne peux pas te montrer que c'est vrai, alors je vais te montrer que ce n'est pas faux ;
on est obligé de raisonner sur une proposition fausse, et donc il faut l'assumer, ce qui est d'autant plus difficile que le raisonnement est long ; on ne peut illustrer une proposition fausse d'aucun exemple.

Argument contre :

après tout, affirmer « ceci est vrai car sinon … » paraît bien naturel et même semble être le fait d'enfants très jeunes.

Ceci étant, nous en resterons donc à la question : la preuve par l'absurde fait-elle ou non difficulté au sens commun ?(8).

Des figures, pas de représentation numérique du continu. Dans la géométrie d'Euclide, il est principalement question de grandeurs : longueurs, aires, volumes et angles. Or les grandeurs apparaissent dans des figures, et quasiment chaque théorème est illustré par une figure. Certes, les énoncés sont formulés de façon générale, indépendamment de toute figure particulière. Mais ils sont ensuite reformulés sur une figure. Ce qui par exemple est annoncé *pour tout triangle* est montré sur le dessin d'*un triangle*. La figure aide à voir la question posée, à deviner où on va et à suivre le raisonnement.

Euclide traite les équivalents de certaines de nos équations du premier degré et du deuxième degré, mais ce sont des équivalents géométriques, où les variables sont des grandeurs : des longueurs, des aires. Ces équations, si on ose les appeler comme cela, sont illustrées par des figures.

On trouve dans Euclide un procédé subtil(9) pour comparer deux rapports de grandeurs de même nature, même dans les cas difficiles, comme par exemple lorsqu'il s'agit du côté et de la diagonale d'un carré. Par contre, on n'y trouve pas la notion de mesure d'une grandeur dans une unité donnée.

Expliquons cela en détail. Quand Euclide parle de nombres, il s'agit toujours de nombres naturels(10) 2, 3, 4, … Or les nombres naturels sont insuffisants pour mesurer les grandeurs. Prenons l'exemple des longueurs, même si tout autre type de grandeur ferait l'affaire. Les longueurs sont *continues*. Entre deux longueurs, il y en a une infinité d'autres. Or les nombres naturels sont *discontinus* : on saute de 2 à 3, de 3 à 4, etc. Entre deux naturels successifs, il n'y en a pas d'autres. Les naturels sont donc insuffisants pour mesurer toutes les longueurs. Pour pouvoir doter chaque

Et donc le second membre contient au moins deux facteurs 2. En revenant au premier membre, on voit que n contient aussi un facteur 2. Donc m et n ont 2 pour facteur commun. Ils ne sont donc pas premiers entre eux. Ceci est l'absurdité cherchée.

(8) (*) Dans le raisonnement présenté à la note précédente, on a considéré comme évidente l'unicité de la décomposition d'un nombre naturel en facteurs premiers.

(9) Il s'agit de la cinquième définition du Livre V.

(10) Pas encore 0, ni même 1, car pour faire un nombre, il faut être plusieurs.

longueur d'une mesure, il faut inventer de nouveaux nombres. L'élaboration des nombres réels, qui prendra plus de deux millénaires après Euclide, apportera une solution. Nous en reparlerons aux sections 1.6 et 1.7.

Mais retenons ce fait important : *Euclide ne disposait pas d'une représentation numérique du continu*[11]. Chez lui, les grandeurs sont traitées sur des figures (et non à l'aide de mesures), ce qui fait qu'on les voit. De ce point de vue, la pensée euclidienne demeure proche de la pensée commune.

Une extrême longévité. Il faut savoir enfin que la géométrie d'Euclide a été enseignée soit telle quelle, soit un tant soit peu aménagée, dans presque toutes les écoles secondaires du monde jusqu'au milieu du XX^e^ siècle. Les dernières personnes qui ont suivi un tel enseignement ont aujourd'hui cinquante ans ou davantage.

1.3. L'introduction des lettres en algèbre

Quittons maintenant les Grecs et avançons à grandes enjambées dans les siècles suivants. Les Arabes du Moyen Âge ont fait fructifier et ont transmis à l'occident les connaissances des Grecs, des Assyro-Babyloniens et des Indiens, en particulier sur les équations des premier et deuxième degrés. C'est avant tout l'Italie qui a recueilli leur héritage. Les algébristes italiens ont montré au XVI^e^ siècle comment résoudre les équations des troisième et quatrième degrés.

Mais de quelle algèbre s'agissait-il à cette époque ? Tout d'abord, et contrairement à ce qui se passait chez Euclide, il s'agissait d'équations portant sur des nombres, et non plus sur des grandeurs. Par delà les nombres naturels, d'autres nombres, *issus de la mesure des grandeurs*, avaient acquis droit de cité en mathématiques : c'étaient principalement les nombres fractionnaires et les racines des nombres naturels. Et donc les coefficients et les inconnues des équations étaient des nombres.

Toutefois, ces nombres étaient toujours interprétés géométriquement : l'inconnue était vue comme une longueur, son carré comme un carré géométrique, et le produit de deux nombres était interprété comme un rectangle. Les raisonnements conduisant aux solutions étaient des raisonnements géométriques, illustrés par des figures.

Il s'agissait au départ d'équations qui s'exprimaient en phrases de la langue commune, et non comme aujourd'hui avec des symboles tels que $+$, $-$, $=$, $\times$, x, x^2, etc. On parle parfois à ce propos d'*algèbre rhétorique*. Mais bien avant la fin du XVI^e^ siècle, divers symboles et abréviations, introduits petit à petit, ont rapproché les expressions algébriques d'alors de celles d'aujourd'hui.

Il s'agissait d'équations particulières, du type $2x^2 + 7x = 3$ (en écriture moderne), et non du type $ax^2 + bx = c$. Toutefois, ces équations particulières avaient valeur d'exemple : étant donné le traitement d'une équation particulière, il était entendu qu'on devait traiter de la même façon les autres équations du même type.

Il est revenu à Viète, dans la deuxième moitié du XVI^e^ siècle, d'introduire les coefficients littéraux, ce qui revenait à étudier des équations générales comme

(11) Certes, la cinquième définition du Livre V fait usage des nombres naturels. Ce que nous voulons dire, c'est qu'Euclide n'associe pas un nombre à chaque longueur, non plus qu'une longueur à chaque nombre.

$ax + b = c$, plutôt que des équations particulières telles que $3x + 2 = 5$. La portée de cette innovation est immense. Pour le comprendre, il faut réaliser que les lettres a, b et c (ci-dessus) peuvent être remplacées chacune par un nombre quelconque. Or il existe une infinité de nombres. Et donc étudier une équation telle que $ax + b = c$, c'est en fait étudier d'un seul coup une infinité d'équations. Il faut bien saisir cette brusque montée en généralité des mathématiques. Le maniement des nombres un par un n'est déjà pas si simple, or il s'agit dorénavant de manier ces lettres dont chacune représente un nombre quelconque, et qui ont les propriétés des nombres sans en avoir les apparences. C'est depuis cette époque que l'on dit, en parlant d'une chose obscure : c'est de l'algèbre pour moi. Ce qui est équivalent à : c'est du grec, de l'hébreu ou du chinois.

Notons enfin que si les nombres fractionnaires et les racines étaient admis à cette époque en mathématiques, ils ne faisaient pas encore l'objet d'une théorie unifiée, comme le sera notre théorie des nombres réels. Il restait des difficultés à résoudre pour que, une unité de longueur étant choisie, à tout nombre corresponde une longueur, et à toute longueur corresponde un nombre, à savoir sa mesure. En d'autres termes, *la représentation numérique du continu n'était pas encore au point*.

1.4. La géométrie peut s'algébriser

Au XVIIe siècle, Fermat et Descartes inventent la géométrie analytique. De quoi s'agit-il ? Jusque-là, quasiment toute réflexion géométrique se pratiquait sur une figure. En géométrie, on avait sous les yeux, d'une certaine manière, l'objet même de son étude. Certes, chaque figure n'est qu'un exemple, et elle en représente une infinité d'autres (on raisonne sur un triangle pour démontrer une propriété de tous les triangles). Mais la figure-exemple n'est pas un graphisme arbitraire, elle fait voir des relations qui guident la pensée. Or les travaux de Descartes et Fermat ont conduit à montrer que beaucoup de figures – droites, courbes – peuvent être représentées sans ambiguïté chacune par une équation(12). Une équation est un assemblage de lettres, de chiffres et de symboles purement arbitraires, qui ne renvoie à une figure visible que moyennant de laborieuses opérations de décodage. Ainsi la géométrie s'algébrise.

Ce va-et-vient des équations aux figures est un va-et-vient des nombres aux grandeurs. Or les nombres disponibles à Fermat et Descartes ne constituaient pas encore une représentation totalement fidèle du continu. Ils étaient néanmoins des instruments de pensée assez élaborés pour sous-tendre une méthode algébrique en géométrie. Ceci illustre le fait que la pensée créative marche à l'avant-garde, tandis que la pensée logique suit et nettoie le terrain conquis.

Ajoutons que le passage de la géométrie aux méthodes algébriques n'a pas été radical. En effet, d'une part – nous l'avons dit –, non seulement on enseignera la géométrie des *Éléments* d'Euclide jusqu'au XXe siècle, mais encore tout un courant de recherches géométriques continuera à se passer de la représentation algébrique des figures par des équations.

(12) Une fois que l'on a choisi un système d'axes, une figure est constituée de tous les points dont les coordonnées satisfont à une équation.

1.5. L'intrusion des quantités négatives

Pour mettre au point la géométrie analytique, il fallait pouvoir repérer tous les points d'une droite par un nombre. Pour cela, on commence par convenir d'un point origine sur la droite, puis on associe à chaque point sa distance à l'origine. Mais force est bien de distinguer les points qui se trouvent d'un côté de l'origine de ceux qui se trouvent de l'autre. On désigne les uns comme positifs et les autres comme négatifs. Cette idée qu'il puisse y avoir des nombres négatifs – des nombres considérés comme plus petits que zéro – heurte le sens commun. C'est que les nombres proviennent d'abord de la mesure des grandeurs. Or, selon un argument de bon sens, il n'y a pas de grandeurs qui soient moindres que rien. Descartes lui-même n'acceptait pas les nombres négatifs, et ceux-ci ont soulevé des objections, en particulier en France, jusqu'au XIX^{e} siècle.

1.6. Mathématiser l'infini

Arrivés à ce point de notre parcours historique, nous sommes amenés à évoquer le traitement mathématique de l'infini. Dès l'antiquité grecque, les mathématiques ont rencontré l'infini dans des problèmes divers, impossibles à mettre à l'écart. Quels problèmes ? Par exemple, comment déterminer l'aire d'une surface qui, telle un cercle, est délimitée par une courbe ? L'aire, c'est le nombre de carrés unités qu'il faut pour recouvrir exactement la surface. Mais on a beau choisir des carrés aussi petits que l'on veut, on n'arrive jamais à recouvrir exactement un cercle avec des carrés. Il faudrait une infinité de carrés infiniment petits. Ainsi posée, la question est insoluble. Autre problème : quelle est la vitesse d'un mobile *à un instant donné* ? La vitesse d'un mobile, c'est en pratique la distance qu'il parcourt en l'unité de temps. Mais si on considère le mobile en un seul instant (et non en l'unité de temps), il ne parcourt aucune distance. Il faudrait pouvoir saisir la distance infiniment petite qu'il parcourt en un temps infiniment bref. Mais là aussi c'est l'impasse. Voici un troisième exemple. Une sécante à une courbe, c'est une droite qui passe par deux points de celle-ci. Une tangente en un point d'une courbe, c'est ce que devient une sécante passant par ce point et un autre point de la courbe, lorsque celui-ci se rapproche du premier jusqu'à se confondre avec lui. Mais lorsque les deux points sont confondus, il n'y en a plus qu'un seul, et par un seul point passent une infinité de droites. Alors, parmi celles-ci, laquelle est la tangente ?

Vers la fin du XVII^{e} siècle, Leibniz et Newton résolvent ces questions par un type de calcul extraordinairement ingénieux et efficace : c'est le calcul différentiel et intégral. Toutefois, ils n'arrivent pas à fonder ce calcul sur une base aussi peu discutable que celle des *Éléments* d'Euclide. Ils s'appuient en fait sur de subtiles intuitions et donc toute la partie des mathématiques qu'ils ont ainsi développée (on l'appellera plus tard *l'analyse mathématique*) demeure en attente d'un fondement axiomatique clair. Ce fondement se trouve dans la notion de *limite*. Il a fallu arriver à déterminer vers quoi tend (on dit la limite) l'aire totale des carrés de plus en plus petits qui recouvrent le cercle, les vitesses moyennes du mobile calculées sur des temps de plus en plus courts, les pentes des droites déterminées par deux points de plus en plus rapprochés. Or cette notion de limite dépend elle-même d'une représentation numérique du continu : on a affaire à des nombres – aires, vitesses, pentes – qui s'approchent de plus en plus d'un nombre donné. On devine la présence du continu derrière cette idée de *s'approcher de plus en plus*.

Il fallut attendre deux siècles encore, en fait jusqu'aux environs de 1870, pour que cette représentation du continu soit mise au point. Elle est due à quatre auteurs : Dedekind, Cantor, Weierstrass et Méray. Depuis lors donc, les grandeurs continues peuvent être représentées par des nombres. Ce sont les nombres appelés *réels*.

Mais ces nombres s'écartent à beaucoup d'égards de la pensée commune. Certes ils comprennent les nombres naturels et les décimaux, qui nous sont familiers. Mais la plupart d'entre eux s'écrivent, dans quelque système de numération que ce soit, avec une infinité de décimales sans loi apparente : on les qualifie *d'irrationnels*, un comble pour une notion mathématique ! Ces nombres ne peuvent donc être saisis qu'approximativement, car on ne peut écrire qu'un nombre fini de décimales. En outre, même leurs premières décimales sont difficiles à déterminer. Les quatre opérations usuelles qu'on peut leur appliquer sont difficiles à définir, et impossibles elles aussi à faire exactement. Néanmoins et par delà toutes ces difficultés, les nombres réels – insistons-y –, offrent un fondement théorique rigoureux à l'analyse mathématique.

1.7. L'arithmétique du continu

Continuons à faire le point sur la conception des nombres à la fin du XIX^{e} siècle. Les nombres réels sont ceux qui s'écrivent avec autant de décimales que l'on veut, même une infinité. Nous avons vu qu'ils étaient nés, au fil de nombreux siècles, de *la mesure des grandeurs*. À la section précédente, nous avons expliqué qu'ils avaient été dotés aux alentours de 1870 d'un statut théorique rigoureux.

Mais ce statut est étonnant. En effet, la théorie des nombres réels élaborée à cette époque est indépendante de la mesure des grandeurs, et plus généralement de toute référence à la géométrie(13). Elle part des nombres naturels, à partir desquels elle construit les rationnels (ceux qui peuvent être écrits sous forme de fraction) et ensuite les réels. Ceux-ci regroupent les rationnels et les irrationnels.

Voilà donc qu'apparaît en mathématiques une théorie exprimant toutes les propriétés du continu (des grandeurs), mais ne reposant que sur les nombres naturels. On a parlé à ce sujet d'une arithmétisation du continu. Cette théorie apparaît dès lors comme un substitut possible à la théorie des grandeurs : on pouvait oublier les grandeurs – que l'on voit – et ne plus parler que des nombres, qui s'écrivent avec des chiffres, c'est-à-dire des symboles arbitraires. On voit ici les mathématiques s'écarter à nouveau de la pensée commune.

1.8. Les ensembles et la mathématique unitaire algébrisée

Vers la fin du XIX^{e} siècle encore, Cantor, travaillant sur une question mathématique particulière et sans se douter de la révolution qu'il allait provoquer, mit au point les éléments de la théorie des ensembles. Pour le dire un peu vite, un ensemble, c'est une

(13) Il est vrai pourtant qu'elle est soutenue par l'intuition des abscisses de points sur une droite.

collection de n'importe quoi, les éléments de la collection étant en nombre fini ou infini. Un ensemble est ce qu'il y a de plus général en mathématiques. La théorie des ensembles a été fondée axiomatiquement.

Dans les quelques décennies qui ont suivi, il s'est alors passé une chose presque incroyable. Alors que les axiomes de la théorie des ensembles tiennent en moins d'une page, on a montré qu'on pouvait en tirer – par pure déduction – la théorie des nombres naturels. Or nous venons de voir que des nombres naturels on peut tirer – par pure déduction – la théorie des nombres rationnels, puis celle des nombres réels. De la théorie des nombres réels, on tire toute l'analyse mathématique.

Tous ces développements sont de nature algébrique, au sens où ils s'expriment par des combinaisons de symboles. Mais alors, où est passée la géométrie ? Est-elle demeurée à l'écart de cette vaste refondation des mathématiques ? Il n'en est rien. On trouve dans l'héritage logique de la théorie des ensembles, la notion, algébrique elle aussi, d'espace vectoriel[14]. Or cette notion permet de refonder la géométrie. Pour le dire brièvement, la géométrie traditionnelle – celle que nous avons héritée d'Euclide –, commence avec les notions de point, droite et plan, puis on en tire une théorie des grandeurs (longueurs, aires, volumes) et de leur mesure. Les nombres naissent ainsi, dans la géométrie, de l'idée de mesure. Or la notion d'espace vectoriel permet (n'impose pas) une inversion spectaculaire. Les nombres peuvent être tirés des ensembles, sans qu'il soit question de mesure. Ensuite avec les nombres, on fait un espace vectoriel. Les points, droites et plans viennent ensuite, puis les figures représentées par des équations. De nouveau le sens commun subit un choc. Les figures, c'est ce qu'on voit. Par abstraction, grâce aux mesures, elles conduisaient aux nombres et à l'algèbre. Dorénavant, on peut inverser le parcours : il y a les ensembles, puis les nombres traités algébriquement, puis il y a les figures définies algébriquement. On peut aussi les dessiner, mais ce n'est pas essentiel. Cette possibilité d'inversion est dans l'héritage (lointain) de Descartes et de Fermat. Il ne facilite pas la vie des élèves.

Ainsi, la géométrie ne faisant pas exception, l'édifice entier de la science mathématique se trouve accroché aux axiomes de la théorie des ensembles, qui tiennent en moins d'une page !

On le voit, les mathématiques du XXe siècle ont construit leur unité. L'un des artisans, mais qui est aussi le symbole, de cette unité, c'est Nicolas Bourbaki[15], dont le traité magistral – et ce n'est sans doute pas une coïncidence – s'appelle *Éléments de mathématiques*, rappelant ainsi les *Éléments* d'Euclide. C'est depuis lors que Bourbaki lui-même a proposé que l'on parle dorénavant de *la mathématique*, plutôt que *des mathématiques*. Ce passage du pluriel au singulier a fait bien des vagues à l'époque des « mathématiques modernes ». Quoiqu'il en soit, les mathématiques du XXe siècle ont prouvé qu'elles étaient une forme de pensée autonome : elles n'empruntent rien, en cours de route, à ce qui n'est pas déjà dans les axiomes de la

(14) Il n'est pas nécessaire de connaître précisément cette notion pour comprendre la suite de l'exposé.

(15) Nicolas Bourbaki est le pseudonyme d'un groupe de mathématiciens français du milieu du XXe siècle.

théorie des ensembles. Comme nous l'avons dit au début de cet exposé, ce qui caractérise la pensée mathématique, et c'est sans doute ce qui la rend si peu contestable, c'est qu'elle est autonome. Aucun facteur extérieur ne peut en menacer l'édifice.

1.9. Les géométries non euclidiennes : la vérité change de nature

Un autre développement historique majeur a contribué à éloigner les mathématiques de la pensée commune : il s'agit de la découverte des géométries non euclidiennes. Pour en donner une idée, il nous faut remonter à Euclide.

Rappelons que celui-ci, bien qu'il ait cherché à s'appuyer sur le moins d'axiomes possible, avait tout de même adopté l'axiome des parallèles (le cinquième, celui qui est moins évident que les autres(16)), parce qu'il n'arrivait pas à s'en passer. Ceci dit, pendant des siècles, on a cherché à déduire le cinquième axiome des autres. En vain.

Alors, après tant d'efforts sans résultat, un événement extraordinaire s'est produit au début du XIX^e^ siècle. Trois mathématiciens, Gauss, Bolyai et Lobatchevski, ont essayé de remplacer l'axiome des parallèles par un autre qui le contredisait : par exemple, par un point pris hors d'une droite, il ne passe aucune parallèle à celle-ci, ou encore il en passe une infinité. Ils n'ont rien changé aux autres axiomes. Partant de là, ils ont développé plusieurs géométries contradictoires. Elles étaient forcément contradictoires, puisque partant d'axiomes contradictoires. Toutefois, aussi loin que ces trois auteurs aient poussé leurs déductions, ils n'ont rencontré aucune contradiction *à l'intérieur de chacune de ces géométries prise séparément*.

Il y avait là de quoi ébranler des certitudes. Les axiomes d'Euclide exprimaient des propriétés de base de la nature (idéalisée). Or voilà qu'on pouvait en changer, sans menacer la cohérence de la science. D'où la question : les axiomes d'Euclide expriment-ils bien des propriétés du monde physique idéalisé, ou bien faut-il leur substituer les axiomes de l'une ou l'autre géométrie non euclidienne ? Et si oui, laquelle ? L'expérience a prouvé, avec la théorie de la relativité (début du XX^e^ siècle) que l'univers n'était pas euclidien. Mais il l'est presque, en tout cas au niveau des observations quotidiennes, et il faut toute l'ingéniosité des physiciens expérimentateurs pour voir la différence.

Comment les mathématiques ont-elles évolué à partir de là ? Le statut des axiomes devait changer : ils ne pouvaient plus exprimer des évidences du monde physique. En effet, ou bien ils paraissaient évidents (ceux d'Euclide), mais ils n'étaient pas nécessairement vrais, ou bien ils étaient conformes à la vérité physique, mais ils n'étaient plus évidents. La physique, elle, a suivi son cours en puisant ses outils mathématiques là où ils lui apparaissaient appropriés. En mathématiques, le choix des axiomes est devenu libre : on peut choisir les axiomes qu'on veut et y accrocher la théorie qu'ils impliquent. Mais ils ne sont plus des propriétés évidentes de la nature, et pour cause !

Mais alors qu'est-ce que la vérité mathématique ? Elle n'est rien d'autre, depuis lors, que *l'absence de contradiction à l'intérieur de chaque théorie*. C'est un constat étonnant, car ce statut de la vérité est totalement opposé au sens commun : pour celui-

(16) Rappelons son énoncé : par un point pris hors d'une droite passe une et une seule parallèle à celle-ci.

ci en effet, la science dit (ou s'efforce de dire) la vérité sur quelque chose d'extérieur à elle, quelque chose qui est son objet. La science mathématique ne dit la vérité sur rien d'extérieur à elle-même : elle garantit la cohérence de ses raisonnements, et s'arrête là.

Une conclusion à ce point radicale pourrait faire peur. Toutefois, elle ne concerne que les théories mises en forme, celles que les traités exposent. Comme nous allons le voir, la pensée mathématique n'est pas confinée dans les traités. Ceux-ci sont des aboutissements de la pensée mathématique, ils sont importants, nécessaires, mais ils ne représentent pas la pensée mathématique vivante et extravertie.

2. Les mathématiques sont aussi autre chose

2.1. Les mathématiques ne sont pas (seulement) déductives

Ce serait une dangereuse méprise de croire que les mathématiques sont une science uniquement déductive, au sens où faire des mathématiques serait nécessairement et tout le temps raisonner par déduction. Il est vrai que le corpus des mathématiques constituées est un édifice déductif, mais la pensée mathématique vivante travaille sur des problèmes et progresse comme elle peut, s'appuyant sur des intuitions, des analogies, des images dont l'origine importe peu, des erreurs analysées, des rêves. Elle vise certes à produire un raisonnement sans défaut, mais elle emprunte pour y arriver les chemins les plus divers et parfois les plus inattendus.

Pourquoi en est-il ainsi ? Pourquoi la pensée mathématique ne peut-elle se passer d'intuitions, de démarches non rigoureuses ? Attardons-nous un moment sur cette question essentielle. L'aboutissement d'une activité mathématique est un raisonnement déductif sans faute. Mais celui-ci ne va pas de soi, il faut le construire pas à pas. Les choses se passent comme lors d'une expédition vers un but. On sait à l'avance où on va (ou voudrait aller), tout en étant disposé à changer quelque peu l'objectif en cas d'impasse. Mais on ne sait pas à l'avance par où aller. Alors, comment faire ? Chaque chaînon du raisonnement final doit être absolument éprouvé. C'est pourquoi on est attentif à chacun de ses pas : on regarde où on met les pieds. Mais on ne peut s'en tenir là, car le raisonnement en construction doit conduire quelque part. Il faut donc bien lever le regard pour considérer, à moyenne et grande distance, le paysage où on se meut, pour voir si le raisonnement mis au point pas à pas garde bien la direction voulue. Ce regard à plus grande portée ne saurait être de nature déductive. La déduction est analytique, elle procède pas à pas. Considérer un paysage vaste relève nécessairement de l'intuition, d'une prise de conscience globale et instantanée.

La nécessité du recours à l'intuition dans la pensée mathématique peut aussi se comprendre en analysant ce que veut dire *comprendre un théorème*. Même si on a vérifié soigneusement chaque chaînon de la preuve, on peut n'avoir pas encore compris celle-ci. Pour la comprendre vraiment, il faut en discerner les points clés, sans s'attarder aux détails, et saisir sa marche générale dans une vue quasi instantanée[17]. Cela est de l'ordre de l'intuition. Une loupe est un instrument très

(17) Rapprochons cela de la définition de *comprendre* dans la langue commune : embrasser par la pensée, le sens, la nature, la raison de quelque chose, les paroles de quelqu'un.

utile, mais elle ne permet pas de voir le paysage. Celui qui s'arrête aux détails sans aller jusqu'à la vue d'ensemble ne peut pas situer le théorème dans son contexte. Sa pensée demeure immobile et sans objectif. Le théorème n'a pas pris place dans sa culture mathématique.

2.2. Les mathématiques ne sont pas une tour d'ivoire

Notre survol de l'histoire des mathématiques peut conduire à une deuxième méprise. On pourrait croire en effet que les mathématiques, telles qu'arrivées à leur maturité au XX^{e} siècle, sont une discipline monolithique, toute entière prédéterminée dans les axiomes de la théorie des ensembles, et qui ne dit rien sur rien, sauf sur elle-même. Il s'agirait donc d'une sorte de conteneur étanche – ou plus poétiquement de tour d'ivoire – sans lien avec quoi que ce soit d'autre. Or il n'en est rien.

En effet, d'autres disciplines – la physique, la chimie, la biologie, l'économie, … –, d'une part empruntent aux mathématiques des modèles qui leur servent d'instruments de pensée, et de l'autre alimentent les mathématiques en questions nouvelles. Car les mathématiciens n'ont pas pensé à tout, et l'histoire montre qu'ils sont souvent relancés par des questions venues d'ailleurs.

Mais les échanges de bons procédés entre les mathématiques et les autres sciences ne sont qu'une manifestation d'une relation plus profonde entre la pensée mathématique et la pensée en général. Nous avons opposé ci-dessus les domaines où, par défaut d'univocité des concepts, la pensée déductive s'enlise au bout de quelques pas, et les domaines où, au contraire, les définitions sont assez claires pour soutenir une chaîne d'implications d'une certaine longueur. Quel que soit son objet, dès que la pensée est capable d'un raisonnement déductif de longueur non négligeable, elle est mathématisée. C'est sans doute à cette observation de forme que l'on reconnaît la présence des mathématiques dans la pensée, plutôt qu'au recours à telle ou telle notion appartenant au corpus des connaissances mathématiques. Et donc, de ce point de vue, *les mathématiques sont une forme de pensée, caractérisée par sa capacité de produire sans dérailler des raisonnements déductifs autonomes*.

Sans dérailler, cela veut dire en l'occurrence sans faute logique ni contradiction. Par ailleurs, si un raisonnement mathématique se rapporte à une situation réelle dûment modélisée, il peut dérailler dans un autre sens : sans contenir de faute logique, il peut s'écarter des phénomènes réels qu'il était supposé expliquer. Dans un tel cas, ce n'est pas le raisonnement qui doit être revu, mais bien le modèle choisi pour représenter la réalité.

Ajoutons, et c'est essentiel, que si les mathématiques sont une forme de pensée, elles ne sont pas d'application universelle. Savoir reconnaître quand la pensée mathématique est pertinente, et quand elle ne l'est pas, devrait faire partie de la culture de tous.

2.3. Les mathématiques sont diverses

L'existence même de la mathématique unitaire tirée de l'axiomatique des ensembles risque de provoquer une autre illusion. On pourrait croire en effet que, quelle que soit la partie des mathématiques où l'on travaille, on pense toujours de la même façon, avec des schémas mentaux qui se ressemblent, des intuitions analogues les unes aux autres. Or il n'en est rien. L'histoire des mathématiques nous a légué une division de cette science en divers chapitres, principalement l'arithmétique (la théorie des nombres), la géométrie, l'algèbre, l'analyse, les probabilités. Chacun de ces chapitres correspond à une forme de pensée originale et productive. Pour le dire (trop) rapidement, l'arithmétique est le domaine du discret, des choses que l'on nomme une à une comme les nombres naturels ; la géométrie c'est là où on voit des figures ; l'algèbre développe une intuition des formules et de leurs transformations ; l'analyse est le domaine du continu ; et enfin les probabilités, comme leur nom l'indique, sont le chapitre des mathématiques où l'on dit des choses certaines, non pas sur des événements probables, mais sur des probabilités d'événements(18). La mise au point de la mathématique unitaire n'a nullement rendu obsolète cette division des mathématiques en chapitres spécifiques. Mais elle a eu le grand mérite de tisser entre eux des liens souvent insoupçonnés, facilitant des uns aux autres ce que l'on a appelé les *transferts d'intuitions*. Ainsi les mathématiques sont heureusement multiples et heureusement unes (si on peut ainsi s'exprimer).

3. Parlons de l'enseignement

3.1. Des mathématiques vers l'élève : les « maths modernes »

Venons-en maintenant à l'objet principal de cet article : l'enseignement des mathématiques. En quoi toutes nos considérations sur la nature de la pensée mathématique et son évolution concernent-elles cet enseignement ? Les choses ne sont-elles pas après tout très simples ? Les élèves doivent, à la fin du secondaire, connaître les éléments de l'arithmétique et de la géométrie, un peu d'algèbre, d'analyse, de probabilités et de statistique. Tout cela est-il vraiment si difficile ? Que veut-on au juste ?

Deux réponses à cela. D'abord, il faut bien poser la question du rapport de la science enseignée à la science en développement. Les mathématiques, comme les autres disciplines, appartiennent au patrimoine de l'humanité, que chaque génération doit transmettre aux suivantes. Or elles évoluent. Comment l'enseignement doit-il s'adapter ? On ne peut pas ignorer la question, même si on suspecte que les réponses seront difficiles.

Ensuite, non seulement la question doit être posée, mais elle l'a déjà été. Les promoteurs de la réforme des « mathématiques modernes », qui étaient des mathématiciens renommés, ont dit clairement et de façon circonstanciée comment ils pensaient qu'il fallait faire. Rappelons succinctement(19) leurs positions principales.

> Il fallait mettre à jour l'enseignement donné dans les écoles, car il avait pris un grand retard sur les mathématiques du XX^{e} siècle.

(18) On peut trouver une analyse un peu plus poussée des sous-disciplines mathématiques comme formes de pensée dans CREM, *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques*, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, 1995.

(19) À défaut de pouvoir expliquer plus complètement la réforme des « mathématiques modernes », nous renvoyons le lecteur par exemple à R. Bkouche, B. Charlot et N. Rouche, *Faire des mathématiques, le plaisir du sens*, Armand Collin, Paris, 1992.

Il fallait que les mathématiques enseignées soient dorénavant rigoureuses ; en particulier, il fallait les débarrasser des quelques lacunes et obscurités héritées du traité d'Euclide.

Les mathématiques enseignées devaient être axiomatiques, comme celles des chercheurs.

Elles devaient être algébrisées, les figures n'étant rien d'autre que des supports intuitifs parfois trompeurs.

Il fallait s'efforcer d'inculquer le plus tôt possible aux élèves des concepts définitifs, car c'était une perte de temps et une source de confusion que de remettre en forme en cours de route des concepts provisoires.

Il fallait commencer par les ensembles et les relations, puisque les mathématiques constituées dérivaient de là.

Le concept de nombre réel devait précéder logiquement l'introduction de la géométrie[(20)].

La géométrie devait être enseignée des théories les plus générales vers les plus particulières[(21)].

Curieusement, cette réforme, d'abord conçue pour les dernières années des lycées scientifiques[(22)], a été étendue ultérieurement, en quelques années, d'abord à tout l'enseignement secondaire, et ensuite aux enseignements primaire et même maternel. Il eut sans doute été préférable, s'agissant d'une réforme globale et radicale, de la penser d'abord à son début, c'est-à-dire pour les petits enfants. C'est le contraire qui s'est passé. Et cette marche descendante des grandes classes vers les petites témoigne de ce que cette réforme a été pensée *de la science vers les élèves*, et non en sens inverse. Il ne pouvait guère en être autrement, puisque, comme nous l'avons dit, c'étaient des mathématiciens qui avaient l'initiative entière. Ils n'avaient pas d'expérience de l'enseignement dans les écoles maternelles, primaires et secondaires.

Quoiqu'il en soit, la réforme des « mathématiques modernes » obéissait à un dessein clair et proposait, à chaque niveau d'enseignement, un programme cohérent : même chez les enfants trop jeunes pour suivre des démonstrations au sens le plus rigoureux du terme, l'ordre des matières était celui des mathématiques accrochées déductivement à la théorie des ensembles. Pour l'essentiel donc, cet enseignement progressait *du général au particulier*, même si les manuels étaient illustrés de nombreux exemples tirés de la vie quotidienne (mais ce n'étaient que des exemples).

(20) (*) Sur cette position fortement argumentée, voir les propositions d'enseignement de G.D. Birkhoff et R. Beatley, *Basic geometry*, Chelsea, New York, 1940, de G. Choquet, *L'enseignement de la géométrie*, Hermann, Paris, 1964 et J. Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, Paris, 1964.

(21) (*) Il nous faut bien renoncer à préciser davantage ce point, car, pour le faire, nous devrions, en parlant de la théorie des groupes et du Programme d'Erlangen de Felix Klein, évoquer des notions qui dépasseraient trop le niveau de technicité de cet exposé.

(22) Lors de deux célèbres colloques tenus à Royaumont (France) et Dubrovnik (Yougoslavie) aux environs de 1960.

Cet enseignement n'a pas porté les fruits que l'on en attendait. Une minorité d'élèves y a pris le goût de la science déductive, mais la plupart n'ont pas compris où on les menait, ni par quel chemin(23). Mettons maintenant en évidence, parmi les causes de cet échec, l'une des plus frappantes et qui tient à la nature même de la matière enseignée.

Lorsqu'on commence par exposer les concepts les plus généraux, chaque définition renvoie à une gigantesque multitude d'objets extrêmement divers. Par exemple, il est difficile de se faire une idée – et on ne peut espérer plus – de toutes les choses auxquelles renvoient les notions d'ensemble et de relation. On est déjà moins dépaysé par les nombres 1, 2, 3, …, ou par les rectangles, même s'il y a une infinité de nombres et une infinité de rectangles. C'est un peu, toute proportion gardée, comme si en biologie on étudiait pour commencer les êtres vivants, avant les vertébrés, les mammifères et les chevaux. Bien entendu, on peut montrer les nombres 1, 2 et 3 en disant qu'à eux trois ils forment un ensemble, ou montrer un rectangle en disant qu'il est un ensemble de points. Comme on peut montrer un cheval en disant qu'il est un être vivant. Mais alors on se demande pourquoi, si on veut parler de 1, 2 et 3, ou du rectangle, on fait un tel détour par les ensembles. L'explication, c'est qu'on voulait parler d'abord des ensembles.

En réalité, nous l'avons dit, les matières enseignées se suivaient selon le vaste plan de reconstruction ensembliste des mathématiques. Mais, tant dans sa forme globale que dans ses motivations, ce plan était inaccessible aux élèves. Et donc ceux-ci se demandaient, sans qu'on puisse leur répondre, où on les menait et par où(24).

3.2. De l'élève vers les mathématiques

Ainsi la réforme des « mathématiques modernes » suivait un plan cohérent, clair, mais inapproprié. Vers la fin des années 1970, les responsables de l'enseignement se sont mis à chercher d'autres voies pour construire un enseignement cohérent. Mais l'entreprise s'est avérée difficile et l'on constate des tâtonnements, des hésitations, des controverses. Essayons donc de puiser dans l'histoire telle que nous l'avons parcourue – celle des mathématiques et (un peu) celle de leur enseignement – quelques idées directrices utiles pour l'avenir.

Penser l'apprentissage de bout en bout. Tout d'abord, contrairement à ce qu'ont fait les promoteurs des « mathématiques modernes », il s'impose de réfléchir d'emblée à l'enseignement dans sa totalité. Un fait évident, incontournable s'impose : alors que tous les élèves doivent accéder, dans la mesure du possible, à une culture mathématique générale, certains devront recevoir une formation approfondie. Or on ne connaît pas à l'avance la profession qu'un enfant choisira. Force est donc bien de faire apprendre à tous les mêmes éléments de mathématiques, au moins jusqu'à ce moment de l'adolescence où les vocations se précisent. Il importe donc – mais est-ce compatible ? – de prendre en compte les deux objectifs :

(23) Notons que l'enseignement d'avant les « mathématiques modernes » ne réussissait pas toujours très bien non plus.

(24) Notre présentation, forcément succincte, des « mathématiques modernes » ne fait sans doute pas assez la distinction entre ceux qui ont pensé cette réforme pour les élèves des classes scientifiques de la fin du secondaire, et ceux qui l'ont étendue à toute la scolarité.

former des citoyens mathématiquement avertis et préparer convenablement les futurs scientifiques.

Pas de cloisonnements disciplinaires au départ. Une deuxième idée s'impose : l'enseignement doit aller de l'élève vers les mathématiques (et non l'inverse), c'est-à-dire *du particulier au général*, du concret vers l'abstrait et les structures.

Il faut donc partir des enfants. Or ceux-ci cherchent à comprendre le monde qui les entoure dans tous ses aspects et par tous les moyens. Il n'y a pas dans leur esprit de cloisonnements disciplinaires. Par exemple, d'une part des ensembles et des nombres qui seraient mathématiques, et de l'autre des grandeurs qui seraient physiques. L'environnement est peuplé de choses discontinues et de choses continues, de choses que l'on compte et d'autres que l'on peut couper. Il existe entre ces deux catégories, des analogies et des contrastes parfois éclairants, parfois intrigants, parfois ignorés. On ne voit en tout cas aucune raison pour que le continu soit mis en réserve tant qu'il n'est pas représentable par des nombres, c'est-à-dire tant qu'on ne peut pas le mesurer. Les grandeurs non encore mesurées non seulement font partie de l'univers intelligible des enfants, mais de plus conduisent naturellement à la notion de mesure et aux nombres plus généraux que les naturels. De même, l'univers des enfants est peuplé d'objets et de phénomènes géométriques, imbriqués avec des perceptions et des données physiques, comme la pesanteur qui détermine les directions horizontale et verticale. Les premières notions de géométrie se pratiquent donc dans un contexte qui est loin d'être cerné mathématiquement.

Intuition et rigueur à toutes les étapes. Par ailleurs, et quel que soit le caractère primitif de l'univers enfantin comparé aux mathématiques constituées, cet univers n'est pas seulement intuitif. L'apprentissage des mathématiques n'est pas un passage de la pure intuition (à l'école élémentaire) à la pure logique (à la fin du secondaire). Il faut qu'à chaque étape se joue le contrepoint de l'intuition et de la logique. Les deux facettes de l'activité mathématique doivent être sollicitées. Même au tout début de l'apprentissage, ce qui naît de l'expérience et de l'imagination doit aboutir à des enchaînements d'idées éprouvés, fussent-ils brefs, fussent-ils au début de l'ordre d'un simple *parce que*.

La géométrie comme moyen de pensée et d'expression. Si, comme nous venons de le voir, l'intuition et la rigueur doivent sans cesse s'épauler mutuellement, alors la géométrie a sa place tout au long de la scolarité. En effet, elle est une source privilégiée d'intuitions, la plupart des êtres humains clarifiant spontanément leurs pensées en les ordonnant dans l'espace, souvent un espace mental.

La réforme des « mathématiques modernes » ayant réduit la géométrie comme telle à peu de chose, il est sans doute utile que nous rappelions ici en général les rôles qu'elle remplit dans la culture mathématique et au-delà. On peut ramener schématiquement ces rôles à quatre.

D'abord, la géométrie explique l'univers des formes. Comme le dit en substance Freudenthal[(25)], elle aide à saisir l'espace où l'on vit, où l'on se meut.

(25) H. Freudenthal, *Mathematics as an educational task*, Reidel, Dordrecht, 1973.

Ensuite, elle est le premier chapitre de la physique, celle-ci se construisant à partir des propriétés de l'espace en y ajoutant d'abord le temps – qui, joint à l'espace, est une autre source d'intuitions –, puis les forces, les champs, les ondes et bien d'autres choses.

Puis, étant la seule partie des mathématiques où on voit l'objet de sa réflexion, elle est *une source d'intuitions et de représentations* en arithmétique, en algèbre, en analyse, en statistique.

Enfin, mais ce dernier aspect de la géométrie concerne surtout les spécialistes, certaines structures géométriques algébrisées fournissent un cadre théorique approprié à d'autres parties des mathématiques(26).

Le rôle des structures. Continuons à considérer l'éducation mathématique globalement. Les élèves apprennent au fil des années de plus en plus de choses, de phénomènes, de relations. Au fur et à mesure que s'étend le champ de leurs connaissances, il faut que celui-ci s'ordonne, se structure, sous peine de ne plus pouvoir être maîtrisé. C'est ici qu'interviennent les structures au sens mathématique du terme. Des concepts tels que l'associativité, la commutativité, la distributivité, les fonctions, la proportionnalité, etc., tissent des liens entre des objets et des phénomènes disparates et, assimilés progressivement, contribuent à la formation de la pensée abstraite. Celle-ci n'est pas une forme autonome, à contempler en elle-même. Elle est l'architecture de ce qui ne serait sans elle qu'accumulation et qu'elle rend intelligible. Les structures assurent la mobilité et l'efficacité de la pensée. Elles ne sont pas réservées aux seuls mathématiciens, et l'échec des « mathématiques modernes » n'a nullement démontré qu'il fallait en débarrasser l'enseignement élémentaire.

Des concepts appropriés, pas prématurés. La question fondamentale qui se pose alors est celle de l'adéquation, à tous les âges de l'école, entre les contextes, les champs de phénomènes, les problématiques étudiées, et les moyens conceptuels (les structures) mis en œuvre pour les étudier. Les concepts qui rendent intelligible le monde des enfants ne sont pas ceux, beaucoup plus techniques, qui servent dans la pensée mathématique arrivée à maturité, celle qui procède par longues chaînes déductives. Et donc on ne saurait inculquer aux enfants des concepts définitifs. Il est perturbant pour un élève de devoir assimiler des concepts dont la généralité et la technicité n'ont pas de pertinence dans son univers intellectuel. D'où la question si fréquente et si juste : à quoi ça sert ? Un concept, ça sert à comprendre et à prouver, plus qu'à dire ce qu'est exactement une chose(27).

Il importe donc de bien identifier et bien situer les mutations des concepts au long de la scolarité. Voici quelques exemples de concepts souvent inculqués prématurément : la somme et le produit des fractions, dont les premiers usages

(26) (*) Exemple : les espaces de fonctions en analyse fonctionnelle.

(27) H. Freudenthal appelle *objets mentaux* ces notions qui, moins techniques que les concepts mathématiques avancés, sont néanmoins de bons instruments pour organiser une classe de phénomènes.

pertinents se situent sans doute en calcul des probabilités[28] ; le produit des nombres relatifs avec la règle des signes, qui ne joue pas de rôle important avant le début de la géométrie analytique ; la notion de limite d'une fonction réelle en un point d'abscisse finie tant que les fonctions étudiées sont continues.

Rôle de certains concepts historiquement tardifs. Le souci de ne pas inculquer des concepts prématurés a-t-il pour conséquence qu'il faille rejeter vers la fin ou au-delà des études secondaires tous les concepts historiquement tardifs ? Certainement pas. L'histoire montre quelques exemples de concepts dont on se demande – sans doute naïvement – pourquoi ils ont mis tant de temps à apparaître, et qui néanmoins s'avèrent non seulement abordables, mais dotés d'un grand pouvoir éclairant. Par exemple, il a fallu attendre les XV^e^ et XVI^e^ siècles pour voir naître les décimaux à virgule, aujourd'hui enseignés à l'école primaire. La notion de probabilité a priori a vu le jour au XVII^e^ siècle et on peut commencer à en parler, en termes familiers, aux enfants qui jouent aux dés ou tirent les cartes. Le concept de fonction[29], dont la maturation va du Moyen Âge au XIX^e^ siècle, est aujourd'hui un outil indispensable et accessible de toute la pensée mathématique même élémentaire. Plus particulièrement, les transformations du plan et de l'espace ainsi que les vecteurs sont aujourd'hui inscrits dans les programmes d'études.

Nous l'avons dit, les « mathématiques modernes » avaient pour objectif de mettre l'enseignement des mathématiques à jour. Réaliser ce projet, n'est-ce pas donner la place qu'ils peuvent prendre naturellement dans l'enseignement à ces concepts qui, paradoxalement, sont historiquement tardifs et s'avèrent néanmoins assimilables et utiles ?

Des fils conducteurs. Revenons à l'idée de penser l'apprentissage des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte. Envisager ce long parcours pour l'ordonner au mieux, c'est chercher des fils conducteurs qui montrent comment une structure naît dans le concret (c'est-à-dire les grandeurs, les nombres naturels, les propriétés géométriques élémentaires) et comment elle mute et s'enrichit tout au long de la scolarité.

Un bon exemple est celui de la *structure linéaire*, ou structure de proportionnalité. Présente dès l'école maternelle lorsqu'un enfant dit « j'ai fait une tour deux fois plus haute que la tienne ! », elle passe par la notion de mesure, les rapports et la règle de trois, elle s'étend aux nombres relatifs, aux équations de droites et de plans, et elle se généralise aux vecteurs, là où la notion de combinaison linéaire se substitue à celle de rapport[30]. Bien entendu, la structure linéaire prend tout son sens lorsqu'elle est contrastée avec des phénomènes non linéaires.

(28) Nous mettons à part les opérations sur les fractions possédant pour numérateur et dénominateur de tout petits nombres (et bien entendu celles qui possèdent pour dénominateur une puissance de dix). Il est bon qu'un enfant sache par exemple ce qu'est la moitié d'un tiers.
(29) Ce concept donne une forme mathématique nette à la notion commune de dépendance d'une chose par rapport à une autre : par exemple, l'aire d'un carré dépend de la longueur de son côté, ou la distance parcourue par un mobile dépend de sa vitesse.
(30) Le fil conducteur de la structure linéaire a été longuement étudié dans N. Rouche, coord., *Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme fil conducteur*, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, 2002.

Sur ce chemin, il y a des paliers de rigueur, il y a aussi des mutations de la notion de preuve. Ou peut-être faudrait-il dire des moyens de convaincre ? C'est une fausse question de se demander à partir de quel âge il faut démontrer dans le cours de mathématiques. Lorsqu'on la pose, on se réfère à une définition unique, canonique, de la démonstration. Mieux vaut se demander comment évoluent, par paliers, non seulement les moyens de convaincre, mais encore la nature des choses que l'on veut prouver (la vérité d'un phénomène, une filiation logique).

Ci-dessus, nous évoquions l'idée du double parcours : celui qui aboutit à une bonne culture mathématique générale et celui qui prépare à la recherche scientifique. Et nous nous demandions si ces deux objectifs étaient compatibles. Exprimons pour terminer le souhait qu'en offrant à tous les élèves un enseignement respectueux de la nature profonde de la pensée mathématique et de sa genèse, on aboutisse aux deux objectifs, au moins raisonnablement.

Remerciements. Je remercie Michel Ballieu et Marie-France Guissard pour m'avoir aidé à serrer la vérité historique et à clarifier cet exposé. Merci aussi à Jeanette Bartholomé, Christine Docq, Jean-Yves Gantois, Pascaline Gevers, Thérèse Gilbert, Christiane Hauchart et Rosane Tossut, pour beaucoup de critiques essentielles. Pour le reste, je prends la triste responsabilité de toutes les incongruités qui pourraient encore subsister dans le texte.