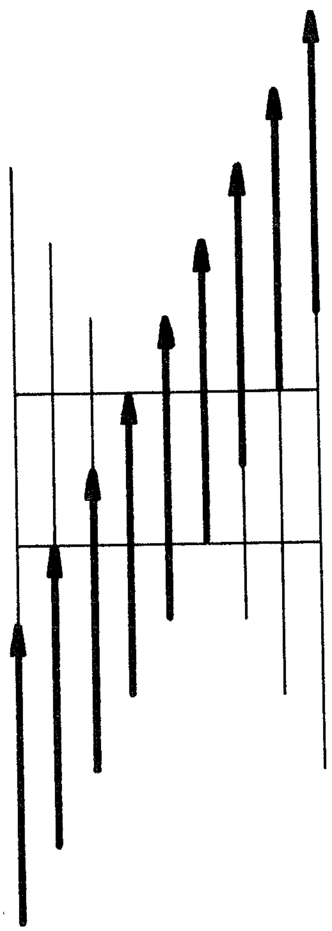
Propositions

3

L'outil vectoriel



Groupe d'Enseignement Mathématique

Louvain-la-Neuve

Nouveau tirage

Sous le titre général

PROPOSITIONS

le GEM diffuse des textes divers à l'intention des professeurs de mathématiques des écoles secondaires. Ces textes sont des documents de travail préparés pour être discutés, améliorés, complétés. Les lecteurs sont cordialement invités à envoyer leurs critiques et commentaires au GEM, chemin du Cyclotron 2, 1348 Louvain-la-Neuve.

Ce n° 3 des Propositions résulte de la collaboration de Bendekia Benmerad, Jeannie Bretton, Anne Chevalier, Michel Coyette, Suzanne D'Addato, Colette Dambly, Christine Docq, Françoise Goffin, Olga Gose, Hugues Masy, Nicolas Rouche, Maggy Schneider, Françoise Van Dieren-Thomas et Christiane Vandeputte.

Août 1981 Prix : 60 FB.

Table des matières

Introduction

Peu d'élèves du secondaire s'approprient les vecteurs au point de pouvoir les utiliser pertinemment dans des problèmes. Un vecteur, c'est cet outil en forme de segment orienté, tellement souple qu'on peut l'accrocher n'importe où et qui se prête au calcul. L'abus de π_0 en donne une vue figée : sorte de bouquet de segments impossibles à décrocher de leur origine commune.

En un autre sens, l'outil vectoriel c'est aussi l'algèbre linéaire : la structure d'espace vectoriel embraye comme instrument de raisonnement sur toutes sortes de modèles. Mais cette fonction n'apparaît pas bien aux débutants, eux qui, par la force des choses, ne rencontrent que peu de modèles : les translations du plan, π_0, $\mathbb{R}^2$, ... Encore les deux premiers sont-ils si voisins que l'imagination puis la logique des élèves dérapent de l'un vers l'autre pour un oui ou pour un non.

En somme on peut dire sans exagérer beaucoup que dans l'enseignement secondaire, l'outil vectoriel est en chômage.

Or il est possible de mettre le vecteur au travail dès le moment où on le conçoit. Nous partons de quelques théorèmes de composition de transformations affines du plan, théorèmes plus ou moins familiers aux élèves. Sur le chantier des démonstrations de ces théorèmes, nous "libérons le segment de son origine" et le pourvoyons progressivement de certaines propriétés de calcul, le tout pour en faire un outil conceptuel commode dans les démonstrations.

Si les élèves connaissent par avance des démonstrations (non vectorielles) des théorèmes envisagés, le travail revient à traduire ces raisonnements dans un nouveau langage dont on fixe les règles pour aboutir au résultat attendu. S'ils n'en connaissent pas de démonstrations, alors on met au point simultanément le concept vectoriel et la démonstration (et qui plus est parfois l'énoncé du théorème !) en les éclairant l'un par l'autre. On bouleverse ainsi l'ordre habituel qui va des définitions aux énoncés et de ceux-ci à leur démonstration.

Il en résulte un beau mic-mac ! Ça se passe beaucoup moins comme dans un livre que comme dans la tête d'un mathématicien au travail. En cours de route, les statuts logiques de l'énoncé, de la preuve et du ou des concepts ne sont pas clairs. Mais faire des maths, c'est résoudre des problèmes, produire du rationnel à partir d'irrationnel. La clarté n'est pas un préalable mais un objectif. Il nous semble que les élèves mordent plus fort quand on les implique ainsi dans l'élaboration d'une théorie.

Une fois le vecteur mis au point, on s'en sert pour résoudre de nouveaux problèmes de géométrie. C'est par là que se termine le Chapitre I. Dans le Chapitre II, on s'inspire de l'idée stimulante d'analogie pour construire l'isomorphisme entre l'ensemble des vecteurs géométriques et $\mathbb{R}^2$: on code les vecteurs et on met au point un calcul sur les codes qui fonctionne parallèlement au calcul sur les vecteurs. Le Chapitre III fait sentir ce qu'est une base par des exercices du type suivant : construire un vecteur donné en combinant linéairement d'autres vecteurs donnés.

Ainsi le premier chapitre expose la création d'un concept sur un champ de problèmes. Le second résout le problème de la création d'un concept : $\mathbb{R}^2$ comme espace vectoriel. Ce concept est assez facile à motiver : il est utile de coder les vecteurs. Le troisième chapitre est de moindre portée, simplement parce que le programme du secondaire ne fournit guère de motivation à l'idée de base d'un espace vectoriel.

Nous aurions pu continuer, parler des droites vectorielles, du produit scalaire, etc. Ce sera fait. Mais il nous a paru utile, avant de revoir et compléter ce texte, d'attendre les critiques des lecteurs.

Puissent-ils ne pas se priver de nous en adresser beaucoup !

Avertissement : l'exposé ci-après est constitué de fiches destinées aux élèves et présentées dans des cadres en traits continus, de commentaires sur ces fiches et de relations du travail dans les classes.

Chapitre 1

Les variations de position et leurs propriétés

Pour ce nouveau tirage, ce chapitre reprend un article paru dans *Bulletin inter-IREM* 23 (septembre 1983).

L'OUTIL VECTORIEL

Essai de conceptualisation sur le tas

Hugues MASY
Nicolas ROUCHE*

Le présent article explique comment nous avons abordé les vecteurs avec des élèves d'une quinzaine d'années. Mais tout d'abord, expliquons d'une part pourquoi nous avons choisi d'enseigner dans un premier temps les vecteurs géométriques et non la structure linéaire (c'est-à-dire la notion abstraite d'espace vectoriel), et d'autre part pourquoi et comment nous avons construit l'instrument vectoriel sur des chantiers de démonstrations.

1. Structure linéaire ou vecteurs géométriques

Si la structure linéaire est fondamentale en mathématiques, c'est avant tout parce qu'elle joue un rôle instrumental dans un grand nombre de modèles non isomorphes: en projetant sa clarté sur chacun d'eux, elle y facilite la résolution de beaucoup de problèmes. C'est aussi parce qu'apparaissant dans des contextes si divers, elle provoque des rapprochements féconds. C'est peut-être enfin à cause de sa beauté propre, de son architecture équilibrée.

De ce que la structure linéaire est un outil primordial, certains concluent qu'il faut l'enseigner très tôt. Mais que peut vouloir dire "enseigner très tôt la structure linéaire" ? Puisqu'un discours purement formel est inaccessible aux élèves, l'idée est de leur faire reconnaître, sur quelques exemples simples, des propriétés que chacun possède et qui, n'étant le propre d'aucun, surnagent comme une forme abstraite applicable à chacun. Cette structure commune une fois reconnue est nommée *espace vectoriel.*

Quels sont ces exemples ? Quand la struture linéaire apparaît-elle comme utile ? comme nécessaire ? Certains exemples d'espace vectoriel, tel le "vectoriel des achats" (voir [3]) n'ont qu'un usage didactique. Ils illustrent la notion, mais ne servent à rien ni à personne. D'autres exemples relèvent de la géométrie ou de la mécanique élémentaires. Mais à quoi sert de rattacher tout de suite les vecteurs géométriques à l'idée abstraite de structure linéaire ? Ils n'ont pas besoin de cela pour manifester leur triple utilité(1) : ce sont des objets directement liés aux figures qu'on étudie, sans la médiation d'un repère arbitraire; ils permettent un calcul en géométrie; ce calcul est plus concis que celui de la géométrie analytique, puisqu'une équation en remplace trois.

Mais alors quand la structure linéaire devient-elle nécessaire, au sens où, par exemple, les réels sont nécessaires pour construire l'analyse, ou les com plexes pour résoudre les équations algébriques ? Sans doute quand on passe le cap(2) de la dimension 3. La perte d'intuition qu'on éprouve alors rend très difficile de construire une géométrie à n dimensions, pour ne pas parler des cas infini dimensionnels.

De toutes façons, une longue familiarisation avec des vecteurs géométriques nous paraît seule susceptible de développer les intuitions qui nourriront de sens l'apprentissage ultérieur de la structure linéaire (pour ceux qui arriveront jusque-là).

Pour ces deux raisons, nous avons décidé d'enseigner les vecteurs géométriques (nous les appellerons ci-après vecteurs) et non la structure linéaire. Nous réagissons contre la formidable entreprise de conceptualisations prématurées que constitue souvent le cours de mathématiques. Nous voulons construire, avec des élèves de quinze ans, un instrument conceptuel adapté à la résolution des problèmes mathématiques que l'on rencontre aux environs de quinze ans. Cette adéquation de l'outil aux

* Tous deux du Groupe d'Enseignement Mathématique 2, Chemin du Cyclotron, B-1348 Louvain La Neuve, Belgique. L'expérience d'enseignement relatée dans l'article a été menée en collaboration avec Bendekia Benmerad, Jeannie Bretton, Anne Chevalier, Michel Coyette, Colette Dambly, Christine Docq, Françoise Goffin, Olga Gose, Maggy Schneider, Françoise Thomas-Van Dieren, Christiane Vandeputte.

(1) Utilité et non nécessité, puisque la géométrie et la mécanique se sont développées toutes deux sans vecteurs. Ces derniers sont apparus dans les cours de mécanique dans les années 30 !

(2) N'est-il pas significatif que la naissance des vecteurs remonte à Hamilton, dont les quaternions ont quatre dimensions, et à Grassmann qui a développé d'emblée sa théorie de l'extension en dimension n ?

problèmes satisfera la classe qui demande si souvent, et si légitimement, “à quoi çà sert”.

2. Conceptualiser sur le tas

Une fois prise la décision d'enseigner les vecteurs, un ordre de présentation semble bien s'imposer comme le seul qui soit logique, et il est d'ailleurs le plus commun: d'abord définir les vecteurs et en exhiber quelques exemples, établir ou tout au moins montrer leurs propriétés principales, celles qui fondent le calcul vectoriel, puis exercer les élèves à ce calcul et enfin l'appliquer avec eux à la résolution de quelques problèmes. En effet, ne faut-il pas qu'une notion soit acquise avant qu'on puisse la faire servir ?

Pourtant nous avons refusé de travailler ainsi: nous voulions pousser jusqu'au bout, exploiter jusqu'à la limite, l'idée de rapprocher la création du concept du champ problématique qui la motive. C'est pourquoi nous avons construit le concept de vecteur directement sur des chantiers de problèmes, c'est-à-dire de démonstrations. En ce faisant, nous avons pris le risque de passer avec la classe par des moments de clarté incomplète: un édifice rationnel n'est pas rationnel dans son état naissant, dans les phases où il cherche à se construire.

Donc, avant toute autre chose, nous avons posé des problèmes, et qui plus est, il n'y était pas question de vecteurs. Au départ, nos élèves étaient capables de dessiner l'image d'un motif pour les transformations affines planes les plus communes, et de représenter les éléments canoniques de celles-ci (axe, centre, direction, ...). Nous leur avons posé des problèmes de composition de transformations.

Le premier instrument conceptuel auquel ils ont recouru est la distance, laquelle s'est rapidement révélée très peu appropriée: dès le problème 1 (cf. ci-après), elle obligeait à décomposer une démonstration en une foule de cas, et les risques d'erreurs étaient grands.

Alors, les élèves aidés par le professeur, ont recouru à l'idée de *variation de position*[3]. Cette notion, avec le contenu et la forme première que lui donne l'usage quotidien, a permis de voir plus clair et de mener à bien la première démonstration.

Dans le problème traité ensuite, il s'est avéré que la *variation de position* telle qu'elle venait d'être conçue n'était déjà plus adéquate: il fallait en étendre la portée et les propriétés pour construire la nouvelle démonstration. Ce concept a donc été remis sur le métier et adapté à ce deuxième problème, ce remaniement le laissant heureusement utilisable dans le premier problème.

(3) Voir au paragraphe 3. les raisons qui poussent à ne pas introduire d'emblée la translation.

Et ainsi de suite pour les problèmes 3 et 4, jusqu'à ce que le calcul sur les *variations de position,* dont l'efficacité était éprouvée à chaque stade dans des exercices appropriés, apparaisse comme bien cerné. Les variations de position ont alors été appelées *vecteurs.*

A ce stade, une synthèse devenait possible et nécessaire. Un formulaire bien rangé dans les cahiers et les mémoires dessinait les contours du vecteur. Toutes les démonstrations pouvaient être reprises et formulées sans ambiguïté en termes de vecteurs.

On conçoit sans peine les difficultés d'une telle approche et les critiques de ceux pour qui la clarté est un préalable (et non seulement un objectif) de l'enseignement mathématique. Il est vrai qu'à travers notre travail, le statut logique de la variation de position n'a été ni stable, ni clair à tout moment. Quand on est en train de changer le sens d'un concept, il arrive que deux choses différentes s'appellent d'un même nom et qu'il faille discuter, argumenter pour se mettre d'accord. L'énoncé, la preuve et les instruments conceptuels engagés dans la preuve réagissent l'un sur l'autre en un jeu dialectique: on passe par des phases de rationalité locale, de clartés partielles, avant de construire la rationalité finale, celle qui ordonne tout le champ des problèmes en cause[4].

Nous avons pensé qu'enseigner ainsi, c'était *faire des maths* avec la classe. Et qu'à l'opposé, exposer des concepts pour les appliquer ensuite, c'est *communiquer des maths* à la classe. Par ailleurs, dans les deux cas, on n'évitera pas que chaque élève passe par de véritables crises d'irrationalité dans son apprentissage des mathématiques. On peut voir notre enseignement des vecteurs comme une tentative de prendre *partiellement* cette irrationnalité en compte dans la classe.

3. Premier Problème:
Composer deux symétries orthogonales d'axes parallèles.

Pour commencer, on a posé aux élèves la question suivante: *étant données deux droites parallèles A et B, quelle est la transformation composée de s_A, symétrie orthogonale d'axe A, et de s_B, symétrie orthogonale d'axe B ?*

(4) I. LAKATOS [2] a montré sur deux exemples historiques l'évolution concomitante de la preuve, des concepts et de l'énoncé.

Ils ont vite constaté, en expérimentant sur des dessins, qu'il s'agit d'une translation(5). Mais quelle translation ? Ce n'est qu'en multipliant les dessins qu'ils finissent par reconnaître (conjecturer ?) l'énoncé plus complet(6) : *la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles A et B est la translation de direction perpendiculaire à celle des axes de mesure double de la distance entre ceux-ci et dont le sens va de A vers B.*

Enoncé étonnant: comment est-ce que çà se fait que c'est toujours la même chose ? On va chercher une démonstration. Celle-ci ne répondra pas tellement à la question: l'énoncé est-il vrai ? (les expériences sur les dessins paraissent concluantes) qu'à cette autre question: *par quel mécanisme* se fait-il que le motif transformé avance comme l'indique l'énoncé ?

Pour entamer cette recherche, on abandonne les dessins compliqués, car on voit plus clair et on raisonne plus facilement en ne considérant qu'un seul point à la fois. Les élèves envisagent sans hésiter la situation présentée à la figure 1: le point de départ a est choisi à gauche de l'axe A, il saute en a', puis en a'', progressant dans les deux cas de gauche à droite. La figure est particulièrement claire: le seg-oo* se décompose en deux morceaux, à savoir oa' et a'o* "égal" à o*a''. Cette observation suffit à prouver que la distance de o à o*, notée d(o, o*), vaut la moitié de la distance d(a, a'').

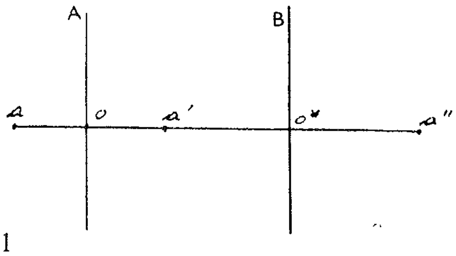


Fig. 1

Dans l'idée de motiver les élèves à démontrer tout de même qu'il s'agit d'une translation, le professeur relance le travail en disant: "et si on avait pris le point de départ a dans une position inattendue, par exemple, loin à droite de B, les sauts successifs de a à a' et de a' à a'' auraient été d'immenses sauts dans des sens opposés. Est-ce que le saut résultat de a à a'' aurait encore été le même ?

D'où la proposition de travail suivante: envisager toutes les positions possibles, par rapport aux axes d'un point et de son image finale, et indiquer chaque fois les étapes de la construction.

La recherche qui s'en suit provoque l'imagination et amène des surprises. La figure 2 est un exemple de réponse.

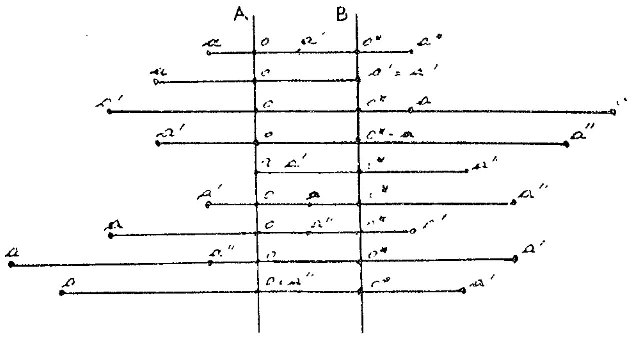


Fig. 2

La classe entreprend ensuite de démontrer que la composée est bien une translation. Il faut pour cela au moins montrer que la distance d(a, a'') est la même dans tous les cas.

Le raisonnement qui accompagne la figure 1 ne s'applique plus à l'ensemble de ceux-ci. La première réaction consiste à écrire un raisonnement spécifique à chacun d'eux.

Par exemple, pour le cas 3 de la figure 2, on a:

$$\begin{aligned} d(a, a'') &= d(a', a'') - d(a', a) \\ &= d(a', o^*) + d(o^*, a'') - d(a', o) - d(o, a) \\ &= 2d(a', o^*) - 2d(a', o) \\ &= 2\,[d(a', o^*) - d(a', o)] \\ &= 2\,d(o, o^*) \end{aligned}$$

alors que le raisonnement du premier cas envisagé était

$$\begin{aligned} d(a, a'') &= d(a, o) + d(o, a') + d(a', o^*) + d(o^*, a'') \\ &= 2d(o, a') + 2d(a', o^*) \\ &= 2\,[d(o, a') + d(a', o^*)] \\ &= 2d(o, o^*)\ . \end{aligned}$$

On voit immédiatement que la démonstration en termes de distance est fastidieuse; car, pour tenir compte des sens, il faut additionner ou soustraire les distances selon les cas. Le découragement s'installe dans la classe.

La lourdeur de ce travail est le point de départ d'une nouvelle recherche: comment alléger cette démonstration ? En trouvant un traitement qui englobe plusieurs cas.

C'est le moment propice pour montrer aux élèves que l'élaboration d'un concept plus abstrait est une démarche *utile*. Ceci s'oppose à une présentation préalable d'un tel concept pour n'en montrer qu'ensuite l'utilité ou la nécessité.

---

(5) On laisse au lecteur le soin d'imaginer l'aventure instructive qui risque d'arriver aux élèves qui ont choisi un motif possédant un axe de symétrie parallèle à A et B.

(6) Nous n'insistons pas sur cette partie du travail, non plus que sur le difficile passage, évoqué ci-après, d'une figure à un point. Cf [1] pour plus de détails sur ces phases de la recherche.

Le professeur propose d'envisager les étapes de la construction comme des *variations de position* du point de départ a, et on peut décider de les appeler ainsi. Cette façon de voir les choses est naturelle: les élèves perçoivent les isométries comme des transports d'un objet, d'une figure, plutôt que comme des applications du plan sur le plan. Dès lors, la locution variation de position n'a pas à être définie à ce stade.

Le professeur demande de décrire la succession des variations de position pour chacun des cas de la figure 2. Cette succession est toujours la même, bien que les amplitudes et sens changent d'un cas à l'autre. On peut l'écrire:

$$\overrightarrow{ao}\ ,\quad \overrightarrow{oa'}\ ,\quad \overrightarrow{a'o^*}\ ,\quad \overrightarrow{o^*a''}$$

dans une notation qui est assez naturelle. Ce qui est noté ao c'est ici le *fait de passer d'un point a à un point o.* Chaque variation de position est associée à un segment *orienté.* L'orientation est héritée de la vue cinématique des transformations[7].

On convient ensuite d'utiliser le symbole + pour noter les successions de variations de position. D'où, pour exprimer tous les cas de figure, l'unique équation

$$\overrightarrow{aa''} = \overrightarrow{ao} + \overrightarrow{oa'} + \overrightarrow{a'o^*} + \overrightarrow{o^*a''}\ . \qquad (1)$$

Ainsi la relation de Chasles apparaît et porte un certain sens, alors que les variations de position commencent seulement à prendre corps. Elles sont à l'état d'outil naissant.

Seront-elles performantes pour étudier les compositions de transformations planes ? La classe est invitée à exprimer, à l'aide de variations de position, la thèse du théorème à démontrer. Puisque la variation de position $\overrightarrow{aa''}$ subie par un point a vaut toujours deux fois l' "écart" (orienté) entre les axes, on doit avoir

$$\overrightarrow{aa''} = \overrightarrow{2oo^*}\ . \qquad (2)$$

Avec cette équation, le champ d'application, et donc le statut intuitif des variations de position s'élargit: si $\overrightarrow{aa''}$ représente le passage de a à a" par la transformation, par contre $\overrightarrow{oo^*}$ exprime l' "écart" (orienté) entre deux points distincts, bien fixes.

Mais il y a beaucoup plus. Au deuxième membre de (1), quatre segments orientés mis bout à bout reconstituent le segment $\overrightarrow{aa''}$. Dans (2) au contraire, il n'y a pas au second membre deux segments orientés bout à bout reconstituant le premier membre. Il y a deux fois le même segment. Pourtant l'équation (2) a un contenu assez clair. Implicitement ou non, l'idée de variation de position change de signification: elle n'est plus un segment orienté, elle se libère de son origine. Le segment décroche. Le caractère "différentiel" de la variation de position facilite le glissement sémantique: plusieurs objets peuvent très bien subir le même changement. Nous sommes ici à un moment crucial de la construction conceptuelle: les élèves doivent le réaliser clairement.

Cette évolution est immédiatement mise à profit. Pour faire la démonstration, on cherche à passer de (1) à (2). Or, puisqu'on considère des symétries orthogonales, la variation de position de a vers o est *la même* que celle de o vers a'. Dès lors

$$\overrightarrow{ao} = \overrightarrow{oa'}$$

et de même $\qquad \overrightarrow{a'o^*} = \overrightarrow{o^*a''}\ .$

Avec ces équations, le décrochage du segment orienté se confirme.

Le reste de la démonstration passe par les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{aa''} &= \overrightarrow{2oa'} + \overrightarrow{2a'o^*} \\ &= 2\,(\overrightarrow{oa'} + \overrightarrow{a'o^*}) \qquad (3) \\ &= 2\,\overrightarrow{oo^*}\ . \end{aligned}$$

Pour écrire (3), on a choisi, parmi plusieurs expressions d'une même variation de position (par exemple $2\overrightarrow{ao}$ et $2\overrightarrow{oa'}$), celle qui convient pour la démonstration. Il faut laisser les élèves envisager les possibilités et les faire commenter leurs choix. La recherche de la démonstration prend une heure ou davantage. Il ne faut pas se presser. Toutes les tentatives, fructueuses ou non, sont utiles, que ce soit parce qu'elles éclairent la démonstration ou parce qu'elles contribuent à préciser le statut des variations de position.

La démonstration étant ainsi achevée, on relève les propriétés des variations de position:

- elles tiennent compte de la distance et du sens[8];
- elles ne sont pas, comme un segment, liées à leurs extrémités;
- elles se prêtent à *mise en évidence* des coefficients entiers, comme dans l'équation
  $$\overrightarrow{2oa'} + \overrightarrow{2a'o^*} = 2(\overrightarrow{oa'} + \overrightarrow{a'o^*})$$
  (lue de droite à gauche, cette équation est plutôt vue comme exprimant une distributivité);

(7) Si, pour enseigner les vecteurs, nous étions partis non d'un problème de transformations, mais d'un problème de géométrie synthétique classique, nous aurions dû imposer *arbitrairement* un sens. C'est ce qui se passe, par exemple, quand on fait correspondre des vecteurs aux côtés d'un triangle.

(8) La direction n'est pas encore mise en évidence à ce stade, puisque tout le problème se déroule dans une et une seule direction.

- la succession des variations de position est *associative* (propriété présente dès le début et évidente pour les élèves). Pour l'usage ultérieur, on range ces premières propriétés dans un formulaire qui sera complété petit à petit.

Bien qu'il ne concerne encore que des "mouvements" parallèles, l'outil *variation de position* a pris quelque peu forme. A ce stade, il demeure proche de la distance. Il n'a pas encore montré toute son efficacité: il ne nous a pas épargné l'examen des cas de figure. Tout au contraire, il est né sur un champ de cas de figure. Quoiqu'il en soit, cet outil peut déjà être mis à l'épreuve dans de nouveaux problèmes: cf. les exercices placés *in fine* pour ne pas rompre l'exposé.

4. Deuxième Problème: Composer deux symétries centrales.

Le deuxième problème proposé à la classe est celui-ci: *Etant donnés deux points distincts o et o*, quelle est la transformation composée de s_o, symétrie centrale de centre o, et s_{o*}, symétrie centrale de centre o* ?*

Comme dans le premier problème, c'est en transformant un nombre suffisant de dessins que les élèves arrivent à décrire précisément la composée. Il en résulte l'énoncé suivant: *la composée de deux symétries centrales de centres respectifs o et o* (o distinct de o*) est la translation qui a la direction de la droite oo*, le sens de o vers o* et qui mesure deux fois la distance de o à o**.

Cet énoncé est suffisamment analogue au précédent pour provoquer une exploration du même type. On regarde ce qui arrive à un point a, et c'est une suite de variations de positions, qu'on peut écrire:

$$\overrightarrow{ao}\ ,\ \overrightarrow{oa'}\ ,\ \overrightarrow{a'o^*}\ ,\ \overrightarrow{o^*a''}\ . \qquad (4)$$

On aura la tentation d'explorer les cas de figure en variant la position de a. Mais ces cas sont tellement nombreux que l'imagination s'embrouille. De toutes façons, quel que soit le point de départ, la suite des variations de position s'écrit comme en (4). Qui plus est, on peut écrire la variation de position résultante sous la forme:

$$\overrightarrow{aa''} = \overrightarrow{ao} + \overrightarrow{oa'} + \overrightarrow{a'o^*} + \overrightarrow{o^*a''}\ ,$$

exactement comme dans le premier problème. Les segments représentant ces variations de position ne sont plus alignés. C'est un fait naturel mais dont il faut prendre conscience. On se met à combiner, avec le signe + , des variations de position non parallèles. La relation de Chasles, qui avait été découverte sur une droite (equ. (1)), s'étend maintenant au plan.

Comme dans le premier problème, la classe est invitée à exprimer la thèse du théorème à l'aide des variations de position. Et cette thèse prend à nouveau la forme

$$\overrightarrow{aa''} = 2\overrightarrow{oo^*}\ . \qquad (5)$$

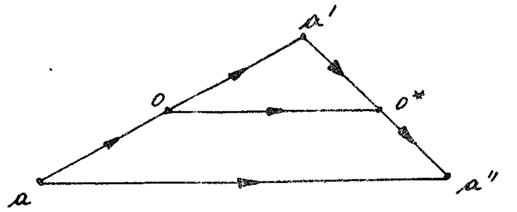


Fig. 3

Accepter cette équation, c'est admettre d'étendre le champ d'application et le statut intuitif des variations de position. Le segment orienté se libère davantage encore: on peut le déplacer parallèlement à lui-même sans qu'il cesse de représenter la même variation de position (en termes plus techniques, deux segments orientés équipollents représentent la même variation de position).

On demande ensuite à la classe de démontrer le théorème. L'analogie avec le premier théorème est évidente. Elle est tellement forte que les équations qu'on écrit pour faire la démonstration sont les mêmes dans les deux cas. *En suivant la démarche sur les dessins,* on perçoit cependant ce qui diffère d'un problème à l'autre, et on apprécie l'extension brusque de la notion de variation de position dans le passage du premier problème au second.

Une fois la démonstration terminée, on s'avise qu'on vient de la faire sans explorer à fond les cas de figure. Si on munit les variations de position de propriétés adéquates, on peut en tirer la démonstration par le jeu de quelques équations simples. On voit donc l'outil *variation de position* prendre forme sur des chantiers de démonstrations.

Le formulaire mentionné à la fin du paragraphe 3 est étendu aux variations de positions de directions quelconques.

Cet outil manifeste à la fois son abstraction et sa puissance si on remarque qu'étant donné les propriétés qu'on lui a attribuées, on peut reprendre la démonstration du premier théorème sans passer par l'examen des cas de figure.

Au passage, on demandera aux élèves de comparer la composée de s_A et s_B à celle de s_B et s_A. A cette occasion, on pourra noter au formulaire l'existence d'une opération qui, en transformant une variation de position ab en ba , en change le sens. Pour que la loi de Chasles reste applicable à de tels couples de variations de position, il faut introduire la *variation de position nulle.* Elle sera notée $\vec{aa}, \vec{bb}, \ldots$ Elle se différencie des autres variations de position par le fait qu'elle n'a ni direction, ni sens, et une mesure nulle. Il faut évidemment préciser son comportement par rapport aux opérations définies jusqu'ici.

Les propriétés d'existence d'un élément neutre et de symétrisabilité sont inscrites au formulaire. On y définit également la soustraction des variations de position. De plus, on y inscrit aussi la définition des variations de position: les variations de position non nulles sont les triplets constitués chacun d'une direction, d'un sens sur cette direction et d'une mesure qui est un réel positif non nul; la variation de position nulle n'a ni direction, ni sens et a une mesure nulle. Si on désire changer la dénomination *variation de position* en celle de *vecteur*, on fera bien d'attendre d'avoir établi l'ensemble des propriétés des variations de position qui en feront des éléments d'un espace vectoriel.

5. Troisième problème: Composer deux homothéties de même centre.

Le troisième problème est le suivant: *Etant donnés un point o et deux nombres réels α et β, quelle est la transformation composée de h_1 et h_2, homothéties de centre o et de rapports respectifs α et β ?*

La conjecture du résultat sur des dessins est très facile: *la composée de deux homothéties de même centre o est l'homothétie de centre o dont le rapport vaut le produit des rapports des deux homothéties composées.*

Dans ce cas-ci, si a est un point quelconque et a'' son image par la composée de h_1 et de h_2, la thèse s'écrit:

$$\overrightarrow{oa''} = (\beta\alpha)\,\overrightarrow{oa} \quad . \qquad (6)$$

Dans cette équation, les connotations des variations de position ne sont pas les mêmes que dans les équations (2) et (5). Dans ces dernières, $\overrightarrow{aa''}$ renvoyait à un mouvement de a vers son image par la composée, et $\overrightarrow{oo^*}$ renvoyait à deux points "fixes". Dans (6), le point o est fixe et apparaît dans les deux membres. L'équation exprime plutôt la transformation du segment oa.

La justification de la propriété conjecturée est simple: si a' est l'image de a par h_1,

$$\overrightarrow{oa''} = \beta\,\overrightarrow{oa'} = \beta\,(\alpha\,\overrightarrow{oa}) = (\beta\alpha)\,\overrightarrow{oa} \; .$$

Dans ce problème, la multiplication scalaire a franchi une étape: afin de décrire les homothéties, elle a abandonné son statut antérieur de somme itérée (les scalaires étaient jusque-là des entiers, comme dans l'équation (2)). On peut dorénavant recourir à des coefficients numériques plus généraux. Ils forment corps, mais nous ne voyons pas de raison d'insister sur ce fait dans le présent contexte.

Enfin, ce problème, qui ne met en jeu que des variations de position dont les représentants sont alignés, ajoute l'associativité mixte à la liste des propriétés des variations de position.

6. Quatrième problème: Composer une homothétie et une translation.

Le troisième problème a permis de préciser le calcul sur des variations de position: elles sont munies d'une opération d'addition interne et d'une opération de multiplication externe adéquate.

Voici un quatrième problème qui permet de compléter les propriétés des variations de position: *étant donnés un point o, un nombre réel α et une translation t, quelle est la transformation composée de h, homothétie de centre o et de rapport α et de la translation t ?*

Après expérimentation, la classe voit facilement qu'il s'agit d'une homothétie de rapport α. Mais quel en est le centre ? La mise en commun des expériences montre encore que sa position dépend du rapport de l'homothétie et de t. Par exemple, un élève qui aurait choisi $\alpha = 5/2$ constatera que le centre d'homothétie "a glissé dans la direction indiquée par t". Si o* est le centre de la composée, on le trouve en appliquant $-2/3$ t à o .

On proposera à chaque élève de traiter la situation particulière qu'il a choisie. Ainsi, dans notre exemple, si $h(a) = a'$ et $(t \circ h)(a) = a''$, il faut montrer que

$$\overrightarrow{oo^*} = -\frac{2}{3}\,\overrightarrow{a'a''} \, . \qquad (7)$$

Puisque h est une homothétie, nous savons que $\overrightarrow{oa'} = 5/2\,\overrightarrow{oa}$. Pour voir que la composée $t \circ h$ est une homothétie de rapport $5/2$ et de centre donné par (7) , nous allons montrer que si $t \circ h$ est une homothétie de rapport $5/2$, alors son centre o* est donné par (7) . Nous supposons donc que $\overrightarrow{o^*a''} = 5/2\,\overrightarrow{o^*a}$.

Dès lors

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{oo^*} &= \overrightarrow{oa'} + \overrightarrow{a'a''} + \overrightarrow{a''o^*} \\
&= \frac{5}{2}\,\overrightarrow{oa} + \overrightarrow{a'a''} - \frac{5}{2}\,\overrightarrow{o^*a} \\
&= \frac{5}{2}\,\overrightarrow{oa} + \overrightarrow{a'a''} + \frac{5}{2}\,\overrightarrow{ao^*} \\
&= \frac{5}{2}\,\overrightarrow{oa} + \frac{5}{2}\,\overrightarrow{ao^*} + \overrightarrow{a'a''} \\
&= \frac{5}{2}\,(\overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ao^*}) + \overrightarrow{a'a''} \\
&= \frac{5}{2}\,\overrightarrow{oo^*} + \overrightarrow{a'a''}
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\left(1 - \frac{5}{2}\right)\overrightarrow{oo^*} = \overrightarrow{a'a''} ,$$

c'est-à-dire

$$\overrightarrow{oo^*} = \frac{1}{1 - \frac{5}{2}} \overrightarrow{a'a''} ,$$

ce qui fournit bien le résultat désiré.

En remplaçant 5/2 par α dans ce raisonnement, on obtient facilement la thèse dans le cas général: *la composée d'une homothétie (de centre o et de rapport α) et d'une translation t est une homothétie de centre o^* et de rapport α. Le centre o^* est le translaté de o par* $\frac{1}{1-\alpha} t$. En termes de variations de position,

$$\overrightarrow{oo^*} = \frac{1}{1 - \alpha} \overrightarrow{a'a''} .$$

Ce problème, difficile, a fait intervenir de nombreuses propriétés du calcul sur les variations de position:

- la commutativité de l'addition,
- la distributivité de l'addition des scalaires sur la multiplication scalaire,
- l'unitarité du neutre multiplicatif des scalaires.

Enfin, la mise en évidence d'un scalaire apparaissant dans les deux termes d'une somme, déjà rencontrée précédemment, s'étend maintenant aux sommes de variations de position dont les représentants sont non alignés, et à des coefficients non nécessairement entiers.

A partir de ce moment, les variations de position peuvent prendre le nom de *vecteurs.*

7. Exercices

Les transformations affines planes usuelles fournissent facilement un grand nombre d'exercices. Par exemple, en voici deux qu'on peut intercaler entre les problèmes 1 et 2:

- *la composée d'une symétrie orthogonale d'axe A et d'une translation de vecteur t orthogonal à A est la symétrie orthogonale dont l'axe est le translaté de A par t/2 ;*
- *la composée de trois symétries orthogonales d'axes parallèles A, B, C, est la symétrie orthogonale dont l'axe est le translaté de A par la translation qui amène B sur C.*

Bien sûr, ce dernier exercice est un corollaire du précédent et du problème 1. Mais gageons que, dans la classe, quelques élèves ne le remarqueront pas. On pourra les laisser s'enfoncer dans la recherche des cas de figure, qui sont très nombreux. Cette recherche fastidieuse pourra alors être évoquée au problème 2, au moment où la classe constate que l'utilisation des variations de position permet de s'en passer (voir paragraphe 4).

8. Bibliographie

[1] *L'archipel des isométries, essai de redécouverte.* Groupe Enseignement Mathématique. Louvain-la-Neuve, 1982.

[2] I. LAKATOS, *Proofs and refutations, the logic of mathematical discovery,* Cambridge Univ. Press, 1976.

[3] G. PAPY, Introduction aux espaces vectoriels, *Mathématiques du XXème siècle, cours internationaux post-universitaires du perfectionnement pour docteurs et licenciés en mathématique,* deuxième année, Bruxelles, 24-30 août 1961, Ministère de l'Education Nationale et de la Culture, 151-183.

Remerciement: Christine DOCQ a relu le manuscrit avec beaucoup de soin et contribué à l'améliorer. Qu'elle soit ici cordialement remerciée.

Chapitre 2

Les codages

1. Ce travail nous fournira un deuxième modèle d'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, en tant qu'espace des composantes des variations de position.

Fiche 1

Dessinez une variation de position $\vec{u}$.

Inventez une description codée de $\vec{u}$. Transmettez-la à votre voisin pour qu'il puisse dessiner un représentant de cette variation sur sa feuille.

A votre avis, en quoi est-il utile de disposer d'un codage des variations de position ?

La richesse d'imagination des élèves rend cet exercice de communication très fructueux. Une mise en commun est faite avec toute la classe après les échanges. A titre d'exemples, voici trois messages retenus :

- "Vous prenez l'horizontale, un point sur l'horizontale. Vous dessinez un angle de 29° vers le haut. A partir de l'origine, vous prenez 5 cm".

- "Tracez une horizontale. Vous prenez 34° N.E. et 3 cm depuis l'origine".

- Tracez une horizontale et une verticale. a se situe à l'intersection des deux droites, b se situe à 5,5 cm sur la droite des x et je monte de 1,5 cm".

Il y reste des imprécisions sur lesquelles il faudra revenir : l'orientation des angles et l'usage des termes "horizontale" et "verticale" qui désignent un repère associé aux bords de la feuille. Pour ce qui est de ces deux termes, nous les conserverons tant que le besoin d'un repère quelconque ne se fait pas sentir. De façon générale, les messages ne font pas jouer un rôle déterminant à l'origine de $\vec{u}$. Cela indique que la notion de variation de position semble acquise. Il faut souligner que le codage polaire a été plus souvent présenté que le codage cartésien. Il semble donc plus naturel que l'autre : en codage polaire, on "suit" la flèche, en codage cartésien, on "fait un détour".

Les trois arguments suivants sont susceptibles de motiver le codage (ils pourraient être utilisés explicitement au moment de son introduction) :

1) certaines variations de position débordent la feuille;
2) l'expression numérique des variations de position peut être plus précise que l'expression graphique;
3) dès qu'on passe à l'espace à 3 dimensions, il devient plus difficile de dessiner.

2.

Fiche 2

Nous savons additionner des variations de position et les multiplier par des réels. Que deviennent ces opérations au niveau des codages choisis ?

Il arrive souvent qu'on dégage l'isomorphisme entre l'espace des vecteurs géométriques et celui des couples de réels présentés séparément, ou aussi qu'on les identifie directement. Ici nous avons utilisé le ressort de l'analogie pour faire construire le second comme structure isomorphe au premier. Au cours de cette recherche, les élèves se donnent des variations de position, les codent, codent leur somme et analysent le comportement des composantes autant pour le codage cartésien que pour le codage polaire. Nous avons voulu leur laisser découvrir l'inefficacité du codage polaire pour l'addition. Après quoi, ils ont abandonné ce codage malgré son bon comportement pour la multiplication par un scalaire. Ultérieurement, la recherche d'un passage d'un codage à l'autre a été une excellente motivation à la trigonométrie.

3. Nous mettons tout de suite l'isomorphisme en oeuvre dans les exercices suivants qui provoquent un aller-retour entre les deux modèles.

Fiche 3

1) Voici trois points donnés par leurs coordonnées :
a : (1, 1) b : (2, -1) c : $(\frac{7}{2}, 2)$. Cherchez les coordonnées de chacun des points qui forme avec a, b et c un parallélogramme.

2) Voici trois points donnés par leurs coordonnées :
d : (2, -2) f : (-2, 2) g : (-4, -4). Y a-t-il moyen de former un losange ayant d, f et g pour sommets ? Si oui, calculez les coordonnées du $4^{\text{ème}}$ sommet h.

3) Quelles sont les coordonnées des points f' et g' obtenus par translation des points f et g de l'exercice 2, si on sait que les coordonnées de l'image de d sont (o, o) ?

4) Quel est le milieu du segment ayant pour extrémités les points r : (1, -1) et s : (2, 4) ?

5) Quelle est l'image de la variation de position $\overrightarrow{rs}$ ci-dessus par une homothétie de centre (o, o) et de rapport 12 ?

6) (Si le théorème de Pythagore est connu). Quelles sont les coordonnées des sommets du carré dont une diagonale a pour extrémités les points t : (3, 5) et u : (7, 5) ?

Ces exercices ne sont pas faciles. En particulier, beaucoup d'élèves n'auront pas réalisé avant de les commencer que le codage cartésien d'une variation de position s'obtient en soustrayant les coordonnées de l'origine de celles de l'extrémité.

4. Nous envisageons maintenant les propriétés des opérations dans $\mathbb{R}^2$.

Fiche 4

Nous avons vu que les opérations géométriques sur les variations de position se transfèrent fidèlement aux opérations algébriques sur les codages. Démontrons que chaque propriété du formulaire sur les variations de position est valable dans $\mathbb{R}^2$, en utilisant les définitions des opérations sur $\mathbb{R}^2$ et les propriétés des opérations sur $\mathbb{R}$.

Ce travail a été réparti en équipes; chacune d'elles s'est occupée d'une démonstration pour que la tâche ne soit pas fastidieuse. Cela a été exécuté assez facilement.

5. Nous sommes maintenant en possession de deux ensembles distincts munis d'opérations vérifiant les mêmes propriétés. C'est le moment de faire une synthèse qui globalise les résultats. Nous présentons la <u>structure d'espace vectoriel</u> et le terme général <u>vecteur</u> dont les élèves connaissent maintenant deux exemples : les variations de position et les couples de réels.

Chapitre 3

Les bases

1. Les bases peuvent être bien motivées dès qu'on aborde des espaces vectoriels plus généraux ou bien la théorie des transformations. Les bases sont au programme de quatrième mais ne débouchent à ce niveau que sur l'existence de repères pour le plan, ce qui est une notion déjà connue par ailleurs.

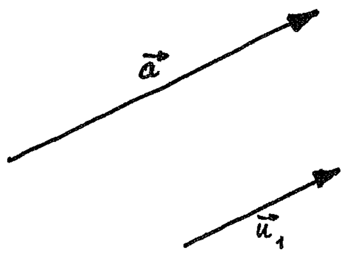
Nous dégageons progressivement les idées de base et de dimension d'exercices dans lesquels un vecteur donné est engendré à partir d'une famille de vecteurs donnés.

Fiche 1

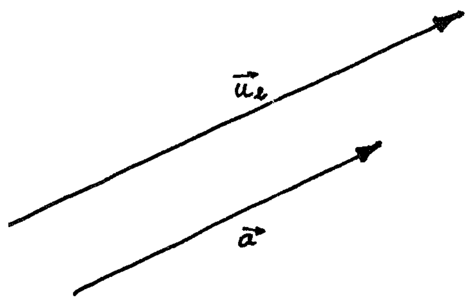
L'addition de vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel nous permettent de construire des vecteurs.

Pouvez-vous dans chaque cas ci-dessous construire $\vec{a}$ à partir des autres vecteurs donnés ? Si oui, écrivez $\vec{a}$ en fonction de ceux-ci.

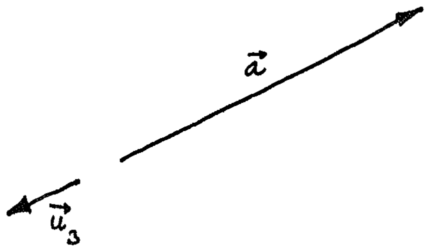
1)



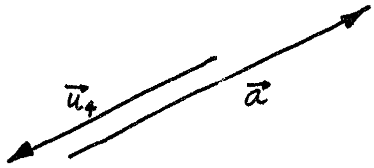
2)



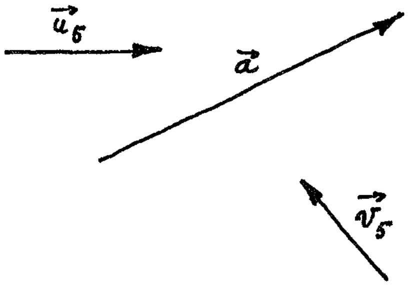
3)


$\vec{a}$
$\vec{u}_3$

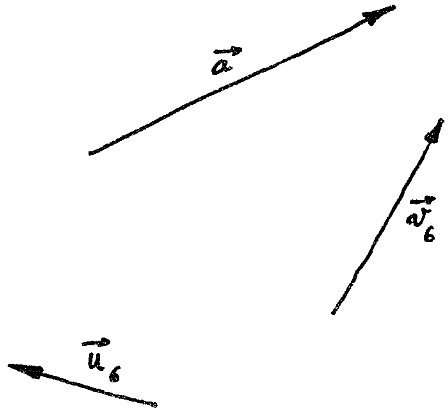
4)


$\vec{u}_4$
$\vec{a}$

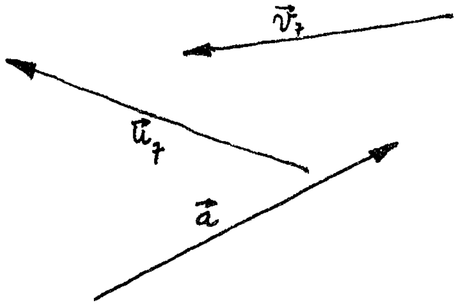
5)


$\vec{u}_5$
$\vec{a}$
$\vec{v}_5$

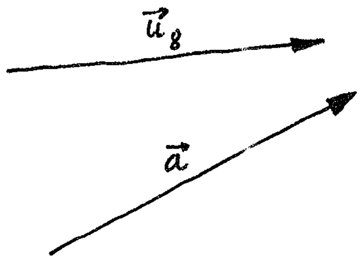
6)


$\vec{a}$
$\vec{v}_6$
$\vec{u}_6$

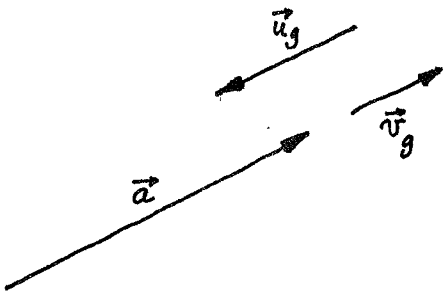
7)


$\vec{v}_7$
$\vec{u}_7$
$\vec{a}$

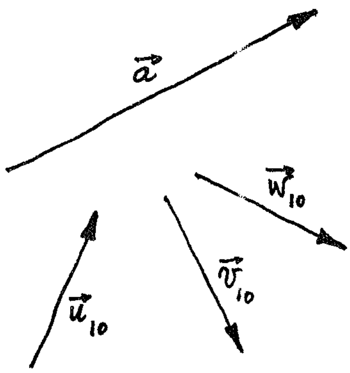
8)


$\vec{u}_8$
$\vec{a}$

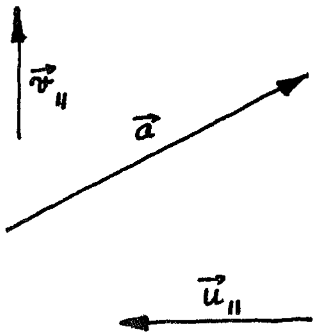
9)


$\vec{u}_9$
$\vec{v}_9$
$\vec{a}$

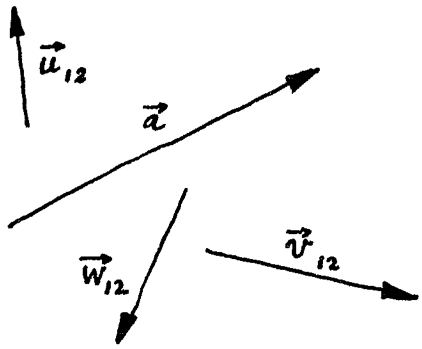
10)


$\vec{a}$
$\vec{w}_{10}$
$\vec{v}_{10}$
$\vec{u}_{10}$

11)

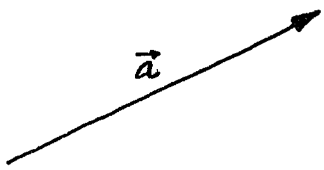


12)



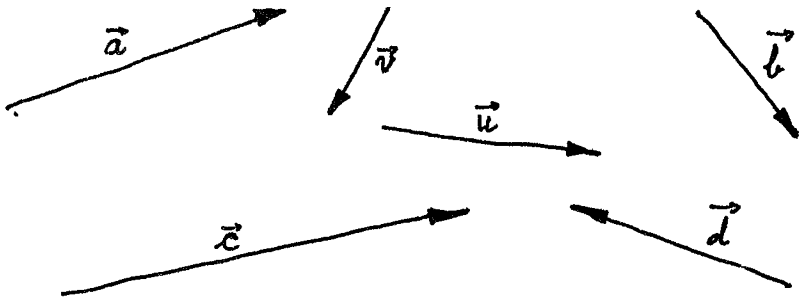
Fiche 2

Trouvez des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{a} = \frac{1}{2}\,\vec{u} + 2\,\vec{v}$.



Fiche 3

Pouvez-vous construire $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ à partir des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnés ?



$\vec{a}$ =

$\vec{b}$ =

$\vec{c}$ =

$\vec{d}$ =

Fiche 4

Soient a, b, c trois sommets d'un hexagone régulier. Exprimez tous les côtés de l'hexagone ainsi que les diagonales issues du sommet a au moyen de $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{bc}$.

2. A part quelques difficultés de mesure de vecteurs, les six premiers exercices de la fiche 1 s'effectuent aisément. Dans les exercices suivants, les élèves réalisent que certaines situations sont impossibles. D'autres donnent des résultats multiples : toutes les équipes n'obtiennent pas la même chose. Au cours de cette recherche, nous avons introduit le terme combinaison linéaire, en reconnaissant dans chaque cas si le vecteur $\vec{a}$ est ou non combinaison des autres.

Nous n'avons pas fait intervenir le vecteur $\vec{o}$ dans ces fiches. Est-ce une lacune ? La question reste posée mais il nous a semblé préférable de n'introduire ce cas particulier que dans la synthèse. En effet, on ne tire rien de $\vec{o}$: avec $\vec{o}$, on n'engendre que $\vec{o}$. De plus, il nous reste encore à définir explicitement le vecteur $\vec{o}$. Il nécessite un traitement à part, car il lui manque une direction et un sens pour répondre à la définition choisie : direction, sens, amplitude.

3. La synthèse s'est déroulée en trois étapes.

a) On est revenu à la fiche 1 en posant pour chaque cas les trois questions suivantes :

- Peut-on construire le vecteur $\vec{a}$ avec les vecteurs donnés ?
- De combien de manières ?
- Quels autres vecteurs peut-on construire ?

b) A ce moment, il paraît naturel aux élèves que si on cherche à construire tous les vecteurs à partir d'une famille donnée, le plus raisonnable est de choisir celle-ci de sorte que le résultat soit unique : ainsi "tout le monde arrive à la même chose". D'où la définition :
Une <u>base</u> est une famille de vecteurs tels qu'on puisse, à partir d'eux, construire tous les vecteurs d'une et une seule manière. Ici, pour satisfaire au programme, on peut définir partie génératrice et partie libre. Les élèves reconnaissent alors qu'une base est une famille contenant exactement deux vecteurs non parallèles.

c) Que peut-on construire à partir de $\vec{o}$? Si le vecteur $\vec{o}$ est dans la famille, est-elle encore une base ?

4. L'isomorphisme entre l'ensemble V des vecteurs du plan et $\mathbb{R}^2$ a été établi précédemment. Les élèves concluent naturellement qu'une base de $\mathbb{R}^2$ est constituée aussi de deux vecteurs non "parallèles". Mais comment voir si deux couples de nombres sont des vecteurs parallèles ? On repart des codages des vecteurs et on exprime le fait que si deux vecteurs de V sont parallèles, on obtient l'un en multipliant l'autre par un nombre approprié. Les élèves déterminent la règle suivante :

$$(x_1, y_1) \parallel (x_2, y_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

Le parallélisme dans $\mathbb{R}^2$ n'est plus intuitif comme il l'était pour les variations de position. On fait ici un saut en abstraction. Il faut attirer l'attention sur les précautions à prendre si certains

x_i ou y_i sont nuls. En fait, ce cas particulier ne perturbe pas beaucoup les élèves; ils trouvent que le parallélisme ou le non-parallélisme est immédiat dans ce cas. Des exercices concernant les combinaisons linéaires dans $\mathbb{R}^2$ peuvent être présentés à ce moment.

Une autre recherche ramène les élèves à une situation semblable à celle de la fiche 1 : donner un vecteur (a,b) et une base $\{(x_1, y_1),(x_2, y_2)\}$; demander de construire (a,b) dans cette base. Par analogie avec V, les élèves "sentent" qu'il y a une solution à ce problème mais ne savent pas comment l'aborder. On remarque ici que leur attention était plus attirée par la construction graphique dans V que par la recherche des coefficients réels.

On définit les coordonnées d'un vecteur dans une base comme les réels qui multiplient les vecteurs de la base, en attirant l'attention sur l'importance de l'ordre des vecteurs. On fait de nombreuses applications de recherche des coordonnées de vecteurs de V et de $\mathbb{R}^2$.

Dossiers du GEM

n° 1 : *Une expérience d'enseignement mathématique à l'école professionnelle*; 22 pages, 1979, 40 FB.
n° 2 : *Une géométrie pour tous les jours*; 104 pages, 2e éd. 1981, 130 FB.
n° 3 : *L'archipel des isométries, Essai de redécouverte*; 270 pages, 1982, 480 FB.

Propositions du GEM

n° 1 : *Le Groupe d'Enseignement Mathématique*; 13 pages, 1981, 30 FB.
n° 2 : *Rencontres avec l'infini*; 44 pages, 1981, 100 FB.
n° 3 : *L'outil vectoriel*; 21 pages, 1981, 60 FB.
n° 4 : *Les fonctions, c'est aussi autre chose...* ; 44 pages, 1981, 100 FB.
n° 5 : *Fouetter un chat avec une droite*; 24 pages, 1981, 75 FB.
n° 6 : *Une isométrie de l'espace vue à basse, moyenne et haute altitude*; 25 pages, 1982, 80 FB.
n° 7 : *Activités géométriques pour les écoles professionnelles... et les autres*; 59 pages, 1982, 150 FB.
n° 8 : *Ecrire des maths*; 24 pages, 1983, 100 FB.
n° 9 : *Des élèves responsables... c'est possible*; 10 pages, 1984, 30 FB.

Autres documents

M. Peltier, N. Rouche, M. Manderick, *Contremanuel de statistique et probabilité*; 196 pages, 1982, 530 FB.
La géométrie sur le terrain des élèves. Actes du colloque inter-IREM de géométrie. Louvain-la-Neuve, mai 1983; 163 pages, 1984, 250 FB.

Diffusion

Pour recevoir un de ces documents, il suffit d'en virer le prix (majoré des frais de port et d'expédition : 30 FB pour la Belgique et 60 FB pour l'étranger) au compte n° 068-0845670-51 du GEM, Chemin du Cyclotron 2, B-1348 Louvain-la-Neuve (Belgique), en n'oubliant pas de préciser : Dossier n° ... ou Propositions n° ...

Dépot légal : D/1984/3599/4