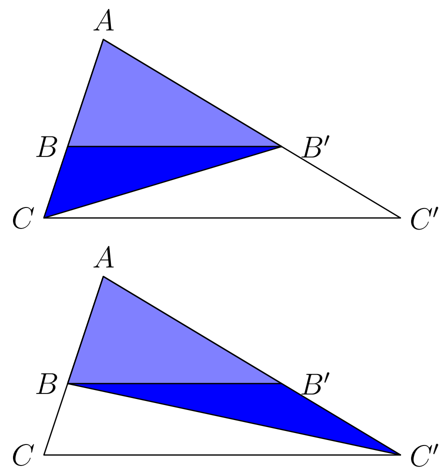
Une suite d'activités autour des triangles de 10 à 15 ans

Vers le développement d'outils de pensée en géométrie

Thérèse Gilbert et le sous-groupe *GEM 10-15 ans*



Initialement publié dans :
Losanges, n° 3, 2009

Groupe d'Enseignement Mathématique
Chemin du Cyclotron 2, B-1348 Louvain-la-Neuve
http : //www.gem-math.be/

Une suite d'activités autour des triangles de 10 à 15 ans

Article issu d'une réflexion au sein du sous-groupe *GEM 10-15 ans*

Cet article propose une suite d'activités sur les triangles, qui aboutit à une démonstration du théorème de Thalès. Cette suite d'activités constitue une occasion d'installer des images mentales et de développer des instruments de pensée propres à la géométrie, c'est-à-dire aux démarches mentales que les élèves doivent mettre en œuvre pour « faire » de la géométrie, autrement dit pour résoudre des problèmes de géométrie ou comprendre leur solution. L'objectif, outre la construction et l'utilisation de connaissances, est que les élèves acquièrent une mobilité d'esprit qui leur permettra d'utiliser ces connaissances.

Une version plus détaillée et complète de ce travail est disponible sur le site web du GEM à la rubrique *Une géométrie articulée de 10 à 15 ans*, `http://gem-math.be/spip.php?article18` .

Le Groupe d'Enseignement Mathématique

Fondé en 1978, le GEM (Groupe d'Enseignement Mathématique) regroupe une trentaine d'enseignants de la maternelle à l'enseignement supérieur, tous intéressés par l'enseignement des mathématiques.

Ils se réunissent une après-midi toutes les deux ou trois semaines, pour préparer des séquences de cours, rédiger des manuels ou des documents de formation continue, discuter de leurs enseignements. Ils forment des sous-groupes, selon les sujets qui les intéressent. La plupart des sujets choisis sont étudiés pendant au moins une année. Parmi les membres du GEM, qui sont tous bénévoles, chacun collabore à un projet et, en ce faisant, chacun donne et reçoit.

Ils produisent des brochures diverses, des livres, des manuels, des mémoires de licence et des thèses de doctorat, et assurent des animations de formations continues, des communications à des colloques et congrès en Belgique et ailleurs.

Une suite d'activités autour des triangles de 10 à 15 ans

Vers le développement d'outils de pensée en géométrie

Thérèse Gilbert et le sous-groupe GEM 10-15

Mots clés : Instruments de pensée, mouvement, changement de point de vue, triangles, théorème de Thalès, parallélogrammes

Résumé : Cette suite d'activités sur les triangles, qui aboutit à une démonstration du théorème de Thalès, constitue une occasion d'installer des images mentales et de développer des instruments de pensée utiles à la compréhension de la géométrie.

Depuis un an, notre sous-groupe du Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM) travaille sur la géométrie de 10 à 15 ans. Nous nous intéressons surtout à l'acquisition d'instruments de pensée propres à la géométrie, c'est-à-dire aux démarches mentales que les élèves doivent mettre en œuvre pour « faire » de la géométrie, autrement dit pour résoudre des problèmes de géométrie ou comprendre leur solution.

Pour cela, nous rassemblons ou concevons des suites d'activités sur des thèmes (par exemple, les problèmes de distances) ou des concepts (par exemple, les parallélogrammes, les angles) en étant particulièrement attentifs aux images mentales et aux démarches mentales que ces activités permettent de développer. L'objectif, outre la construction et l'utilisation de connaissances, est que les élèves acquièrent une mobilité d'esprit qui leur permettra d'utiliser ces connaissances.

1. À 10 et 11 ans, des familles de parallélogrammes

Les situations décrites dans cette section permettront au lecteur de cerner le contexte dans lequel les activités sur les triangles ont été proposées et de cerner une partie des connaissances et images mentales que les élèves sont censés posséder avant d'aborder ces activités.

Papier-ciseaux

Un rectangle est donné en plusieurs exemplaires. Les élèves, par groupe, construisent des parallélogrammes différents en donnant un coup de ciseaux à partir d'une base désignée et en assemblant les deux morceaux obtenus.

Ensuite ils les collent pour faire apparaître une famille de parallélogrammes (figure 1) ayant tous même base et coincés entre deux mêmes parallèles. C'est l'instituteur qui les amène à visualiser ces deux droites parallèles.

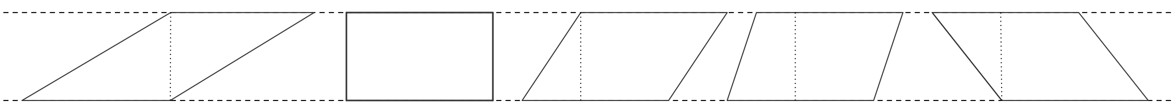


Fig. 1

On leur demande ensuite d'effectuer le même travail avec de nouveaux exemplaires de rectangles mais en prenant le point de départ de la coupure sur une autre base du rectangle. Ils construisent la famille représentée à la figure 2. La plupart des enfants effectuent le travail sans voir qu'il s'agit du même rectangle, présenté sur une autre base.

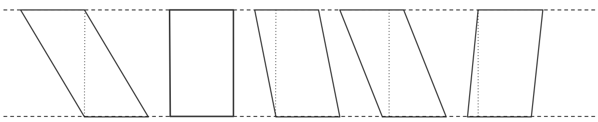


Fig. 2

En assemblant les deux suites de parallélogrammes comme à la figure 3, on impose un *changement de point de vue* qui permet de voir le rectangle de deux façons, engendrant deux familles de parallélogrammes.

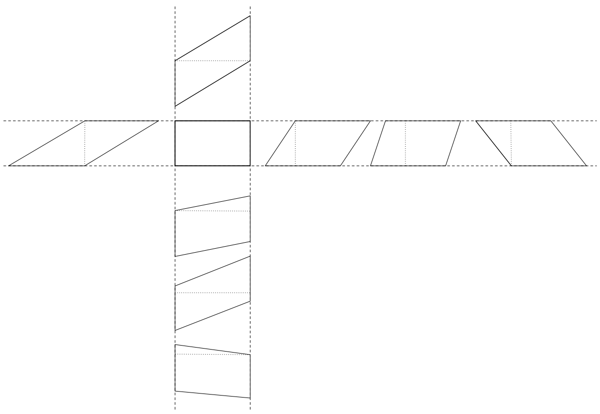


Fig. 3

Le même type de travail est effectué en partant d'un parallélogramme. Chaque fois, on demande de noter les ressemblances et les différences entre les figures d'une famille : on note que la base, la hauteur et l'aire ne varient pas.

Cette activité favorise la visualisation de *liens* entre rectangles et parallélogrammes par *décomposition* et *recomposition*.

Papier-crayon

On demande à nouveau de transformer des rectangles en parallélogrammes de même aire et vice versa, mais cette fois en dessinant.

Ensuite, on sépare la classe en trois groupes. Chacun reçoit un parallélogramme accompagné de consignes différentes :

– les uns doivent le transformer en un autre parallélogramme de même base, de même hauteur, mais d'aire différente ;
– d'autres doivent le transformer en un autre parallélogramme de même base, de même aire, mais de hauteur différente ;
– et les derniers en un autre parallélogramme de même aire, de même hauteur, mais de base différente.

C'est évidemment impossible. On se convainc que chacune de ces trois grandeurs dépend des deux autres. On finit par établir la formule d'aire du parallélogramme.

Tubes et élastiques

Les enfants sont ensuite amenés à comparer les parallélogrammes que l'on voit apparaître grâce au matériel représenté à la figure 4. Il s'agit de deux tiges (ici deux tubes) parallèles sur lesquelles on fait coulisser deux tubes de même longueur reliés par un élastique.

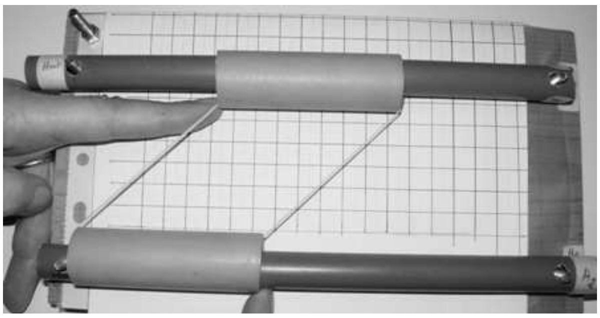


Fig. 4

On retrouve une famille de parallélogrammes de même base et de même hauteur, donc de même aire, mais cette fois-ci en *mouvement*. De plus, les parallèles sont visibles.

On peut incliner une des tiges et demander si, dans ce cas, l'aire reste encore la même lorsque l'on fait glisser un tube.

On peut aussi ôter les deux tubes de leur support et proposer aux enfants de représenter un rectangle : ils tiennent alors naturellement les tubes verticalement. Ils *changent* donc naturellement *de point de* *vue*. On leur demande aussi de changer leur rectangle en parallélogramme de même aire. Ils doivent alors déplacer les mains sur des parallèles invisibles (figure 5).

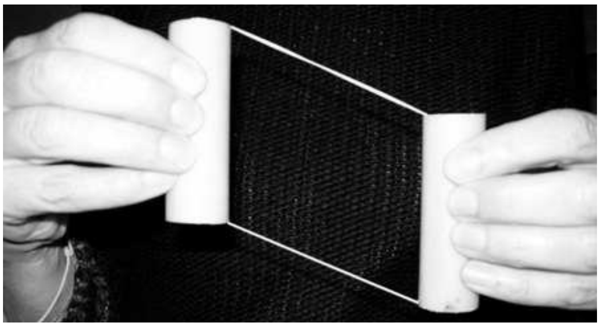


Fig. 5

Du parallélogramme au triangle

En utilisant le même matériel, il suffit d'ajouter un élastique pour faire apparaître deux triangles (figure 6). Les questions posées concernent alors les triangles que l'on engendre par le mouvement, notamment le calcul de leur aire.

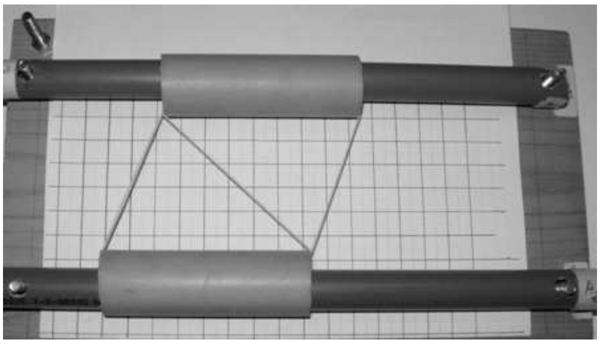


Fig. 6

2. À 10, 11, 12 et 13 ans, des familles de triangles

On dispose du matériel visible à la figure 7 et schématisé aux figures 8, 9 et 10. Il s'agit de matériel suggérant des familles différentes de triangles.

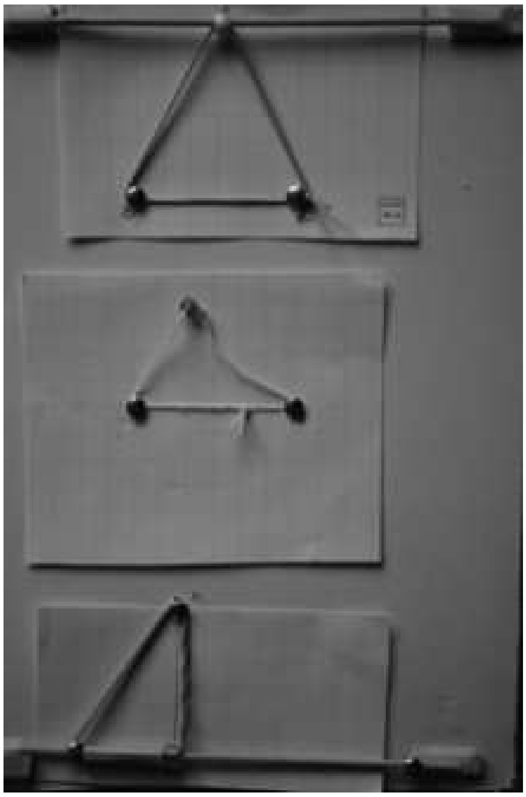


Fig. 7 a, b, c

Le premier matériel (figures 7 a et 8) est constitué d'un élastique tendu passant par deux attaches parisiennes fixées (B et C) et par une perle (A) qui peut coulisser sur une pique à brochette fixée. Cette dernière est parallèle à BC.

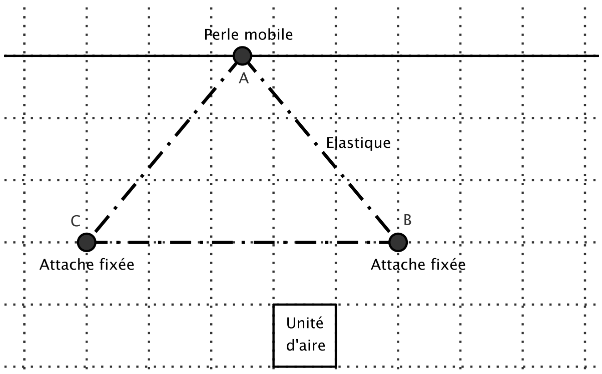


Fig. 8

Le deuxième (figures 7 *b* et 9) est constitué d'une ficelle tendue passant par deux attaches parisiennes fixes (I et J) et sur laquelle est enfilée une perle mobile (H).

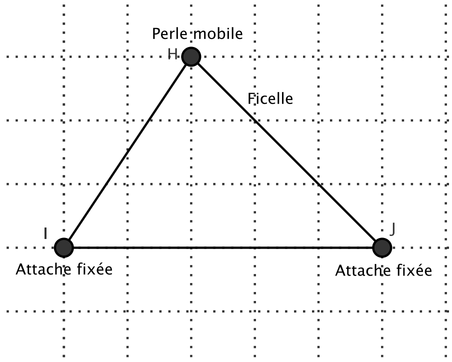


Fig. 9

Le troisième (figures 7 c et 10) comprend un élastique tendu passant par deux attaches parisiennes fixées (L et K) et par une perle (M) coulissant sur une pique à brochette fixée en L et N.

On a ajouté une paille sur la pique à brochette, pour que la perle ne se rapproche pas trop de l'attache parisienne L et pour qu'au départ (figures 7 c et 10 a), l'élastique représente un triangle rectangle.

Dans chaque cas, on a glissé du papier quadrillé sur lequel les élèves peuvent dessiner.

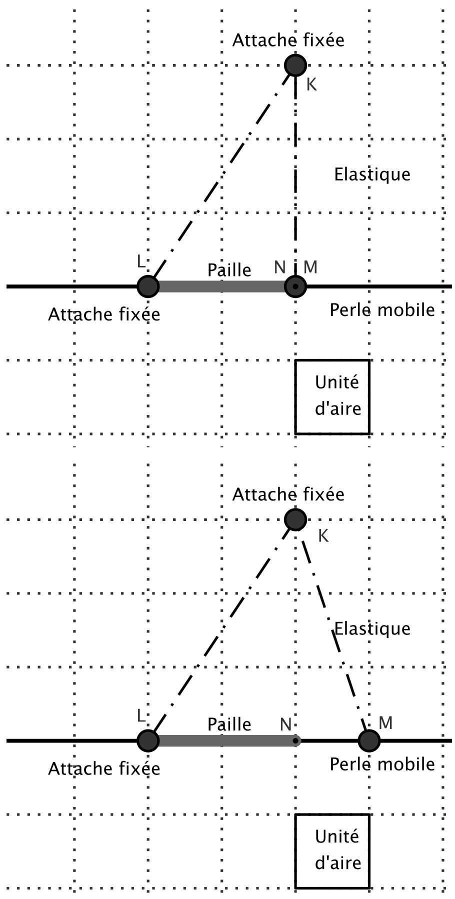


Fig. 10 a, b

Comparaison libre

1. Observez le matériel. Pour chaque matériel, comparez les divers triangles que l'on peut obtenir. Notez vos constatations.

Cette activité de constatation libre permet à l'enseignant de voir ou de revoir beaucoup de notions telles que les caractéristiques des triangles liées aux angles ou aux côtés, l'aire des triangles, leur périmètre, leur hauteur.

Dans un deuxième temps, on propose une consigne plus précise pour chacune des maquettes.

Comparaison ciblée

2. Reprenez la première maquette (figures 7 a et 8).
a) Placez la perle en A. Tracez un parallélogramme ou un rectangle qui vous permet de calculer l'aire(^{0}) du triangle ABC. Quelle est-elle ?
b) Déplacez la perle. Comment varient l'aire et le périmètre du triangle ?

3. Reprenez la deuxième maquette (figures 7 b et 9).
a) Comment obtenir le triangle de périmètre le plus petit ? Le plus grand ?
b) Comment obtenir le triangle d'aire la plus grande ? La plus petite ?

4. Reprenez la troisième maquette (figures 7 c et 10).
a) Placez la perle en N. Tracez un parallélogramme ou un rectangle qui vous permet de connaître l'aire du triangle LKM. Quelle est-elle ?
b) Où placer M pour doubler l'aire du triangle ? Tracez un parallélogramme ou un rectangle qui le montre.
c) Où placer M pour tripler l'aire du triangle ? Tracez un parallélogramme ou un rectangle qui le montre.

(^{0}) C'est-à-dire la mesure de l'aire. Il ne nous semble pas indispensable d'utiliser ce vocabulaire, correct mais lourd, à ce stade de l'apprentissage.

Les élèves ne sont pas censés connaître la formule de l'aire du triangle avant d'aborder cette activité.

Par contre, celle-ci permet de construire cette formule à partir de celle de l'aire du parallélogramme. C'est une des raisons pour lesquelles nous amenons les élèves à *compléter* le triangle en un parallélogramme. Cette démarche qui consiste à *enrichir* une figure en la complétant nous paraît aussi intéressante en soi dans la mesure où elle intervient assez souvent dans la résolution de problèmes géométriques.

La première maquette montre une famille de triangles de même aire. On peut s'en persuader en doublant le triangle obtenu pour construire un parallélogramme. Ici une des deux droites parallèles qui bornent ces parallélogrammes ou ces triangles est visible. Elle est représentée par la pique à brochette dont il faut s'assurer qu'elle est parallèle à la base du triangle. Cette activité mène à la proposition suivante :

> (1) *Deux triangles de même base et dont les sommets opposés sont situés sur une droite parallèle à la base ont la même aire.*

Le mouvement physique de la perle, prolongé par un *mouvement mental*, permet de parcourir la famille visée. On peut imaginer des triangles très « longs » mais ayant tous la même aire que le triangle initial ABC, ce qui ne va pas de soi.

Une question de relance possible pour mettre en évidence l'importance du parallélisme pourrait être : et si on incline un peu la pique, comment varie l'aire des triangles que l'on obtient ?

La deuxième maquette présente une famille de triangles de même périmètre. C'est la notion même de périmètre que l'on travaille donc ici. Le fait que l'aire varie peut être comprise par *l'examen de deux cas extrêmes*, lorsque la perle (H) est presque alignée avec les deux attaches (I et J) vers la gauche ou la droite. Le fait qu'elle soit maximale pour le triangle isocèle (de base $[IJ]$) peut être simplement constaté. Notons qu'avec de plus grands élèves, on pourrait évoquer l'ellipse, lieu des points H.

La troisième maquette montre une famille de triangles dont l'aire et le périmètre augmentent à mesure que la perle (M) est tirée vers la droite. Les questions 4. b) et 4. c) (qui pourraient également être adressées à des plus grands) mènent à la proposition suivante :

> (2) *Si deux triangles ont même hauteur, le rapport de leurs aires égale celui de leurs bases.*

Une question de relance possible pour éprouver la connaissance de ce qu'est la hauteur du triangle pourrait être : et si on incline un peu la pique, tout ce que l'on a dit reste-t-il vrai ?

Remarquons que les images mentales que l'on installe ici dépendent de l'horizontale : une des bases des triangles reste horizontale. Il nous semble important de nous baser sur les intuitions liées à ces directions privilégiées que sont la verticale et l'horizontale et d'installer, dans un premier temps, des images mentales liées à ces directions. Mais il faut aussi pouvoir s'en dégager. C'est ce que nous essayerons de faire dans la suite des activités.

3. À 12 et 13 ans, des constructions de triangles

Construction de triangles de même périmètre

> 1. Sur la figure 11, construisez quatre points C tels que le triangle ABC ait un périmètre de 15 cm.

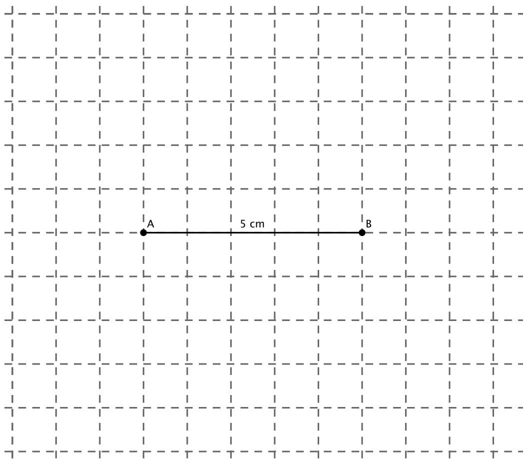


Fig. 11

Comme le périmètre est de 15 cm et la base de 5 cm, il reste 10 cm pour les deux autres côtés. On peut prendre par exemple 5 cm pour $\overline{AC}$ et 5 cm pour $\overline{BC}$ et trouver le point C en utilisant le compas. L'activité constitue une occasion d'aborder la construction de triangles avec le compas. Le cas du triangle équilatéral est probablement celui pour lequel cette technique de construction est la plus connue des élèves.

On aurait aussi pu prendre 4 cm pour $\overline{AC}$ et 6 cm pour $\overline{BC}$. A priori il suffit de décomposer 10 en une somme de deux termes (non nécessairement naturels) pour obtenir les mesures des deux côtés cherchés. Pourtant, si l'on essaie de construire un triangle avec certaines autres mesures, on bute sur une difficulté. Les nombres 8, 2 et 5 par exemple ne permettent pas de construire un triangle. Lorsqu'on trace les deux cercles centrés en A et B et respectivement de rayons 8 cm et 2 cm, ceux-ci n'ont pas de point d'intersection. C'est une occasion de mettre en évidence la propriété dite de l'inégalité triangulaire :

> *Dans un triangle, la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.*

On peut aussi s'intéresser au cas limite, celui où les deux cercles ont un point d'intersection mais où l'on n'a quand même pas un triangle (à moins d'accepter les triangles plats).

2. Trouvez tous les points C tels que le triangle ABC ait un périmètre de 15 cm.

Ici, plus question de construction à la règle et au compas. On peut dans un premier temps soupçonner que l'ensemble cherché de tous les points C possibles est un cercle, mais cette idée ne résiste pas à l'expérience.

Un travail sur la deuxième maquette (figures 7 *b* et 9) rencontrée à l'activité précédente (peut-être une année précédente) et le fait que l'on travaille sur un périmètre constant suggère d'utiliser une ficelle. On découvre alors une forme allongée, que l'on appelle ellipse (figure 12).

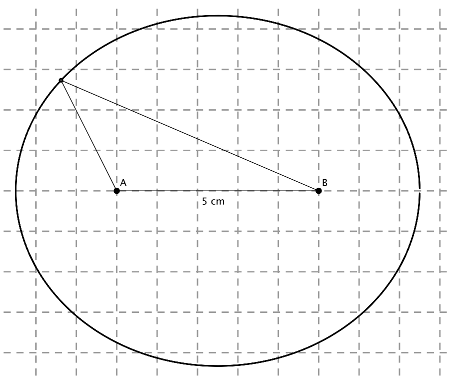


Fig. 12

À nouveau le *mouvement* intervient, cette fois pour balayer cette famille de triangles de même périmètre et de même base. Il permet aussi d'imaginer des cas où l'aire est extrêmement petite. Remarquons que, contrairement à l'activité précédente où le matériel était donné et le mouvement pratiquement imposé, ici c'est l'élève qui doit évoquer le mouvement et imaginer le matériel qui lui sera utile.

Construction de triangles de même aire

1. Sans calculer, sans utiliser les graduations d'une latte, tracez plusieurs triangles de même aire que ABC (figure 13). Soyez inventifs.

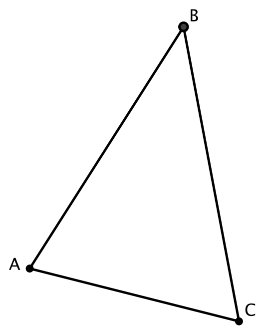


Fig. 13

Cette activité évoque le premier matériel (figure 7 *a*) et la proposition (1), quoiqu'ici ce soit plutôt sa réciproque qui intervient d'abord :

> (3) *Si deux triangles ont même base et même aire alors leurs troisièmes sommets se situent sur une même droite parallèle à la base.*

Une façon de construire les triangles demandés est de tracer une parallèle à un des côtés, pris comme base, et de faire glisser mentalement le sommet opposé sur cette parallèle. On peut ainsi construire toute une famille de triangles de même aire (figure 14).

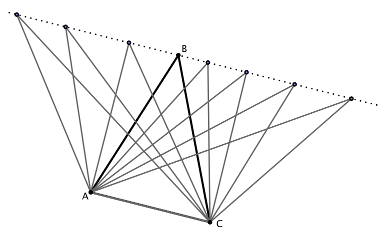


Fig. 14

Remarquons qu'en prenant un autre côté comme base, on construit une autre famille de triangles. On a ainsi trois familles de triangles, chacune correspondant à une base (figure 15 a).

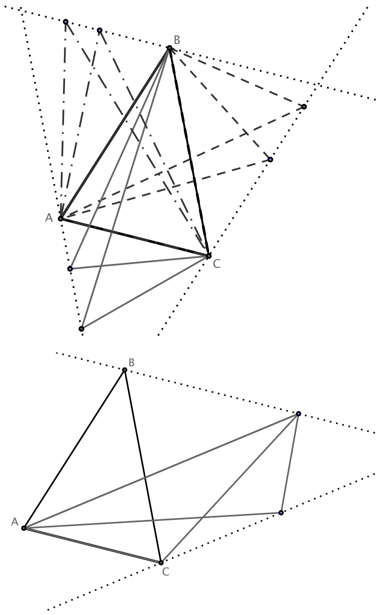


Fig. 15 a, b

On peut aussi déformer le triangle de départ d'abord en bougeant un de ses sommets parallèlement au côté opposé, puis réitérer le processus sur le triangle obtenu, mais en changeant de base (figure 15 b).

On apprend ici *à changer de point de vue*. Contrairement à la première activité où la base du triangle était toujours horizontale, celle-ci invite l'élève à choisir lui-même son point de vue.

Remarquons que la consigne laisse aussi la liberté d'imaginer d'autres procédures, à commencer par l'application d'isométries, qui laissent l'aire inchangée, ou par l'utilisation de la formule d'aire du triangle : on peut par exemple doubler un côté et diviser en deux la hauteur qui y est relative.

Le problème suivant est un prolongement, plus difficile et nettement moins à la portée d'élèves de 12 ans.

> 2. En bougeant un sommet à la fois et en vous assurant chaque fois que l'aire du triangle ne varie pas, construisez un triangle de même aire que ABC, et dont un sommet est le point D (figure 16).

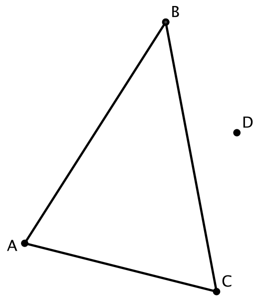


Fig. 16

On essaie d'abord d'appliquer le processus précédent. On pourrait par exemple essayer de faire glisser B sur D. Mais une condition nécessaire pour que l'aire ne change pas est que le glissement du sommet se fasse parallèlement au côté opposé (proposition (3)). Or AC n'est pas parallèle à BD. Il faut donc concevoir une *situation intermédiaire*, un triangle ABC' que l'on pourrait atteindre par ce procédé et tel que AC' soit parallèle à BD. C'est ce qu'illustrent les figures 17 a et b.

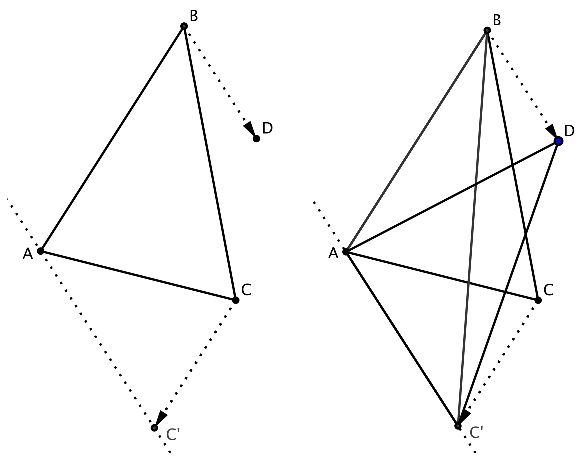


Fig. 17 *a et b*

4. À 14 et 15 ans, des comparaisons de triangles

L'activité suivante peut être proposée à partir de 12 ans car elle ne fait intervenir que des connaissances et instruments de pensée assez élémentaires, mais elle convient aussi à des élèves qui devront aborder le théorème de Thalès, car elle prépare à la compréhension d'une de ses démonstrations.

1. Pour chacune des figures ci-dessous, comparez les aires des cinq triangles qui y apparaissent. Vous pouvez supposer égales les longueurs des segments alignés séparés par de gros points.

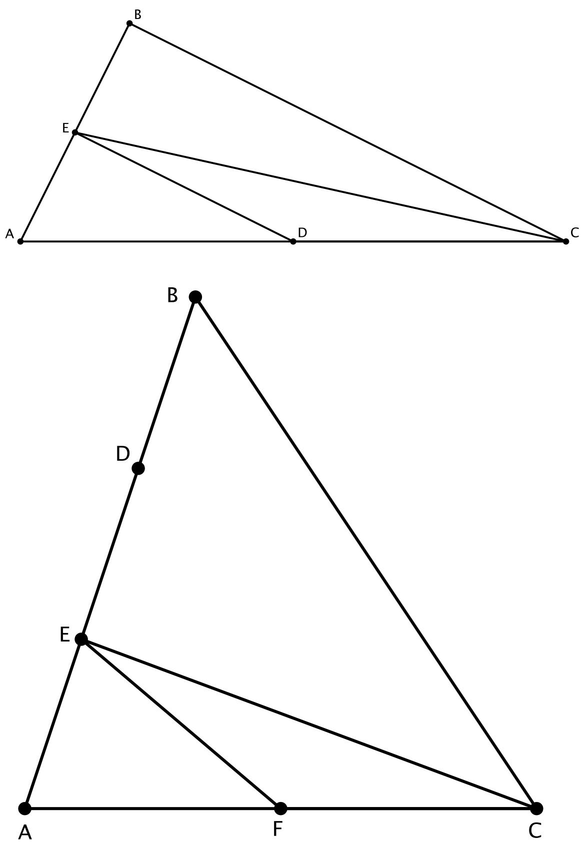


Fig. 18 a, b

On compare les aires des triangles AED et DEC de la figure 18 a en remarquant qu'ils ont même hauteur et des bases de même longueur. Pour comparer AEC et CEB, il est nécessaire de *changer de point de vue* pour considérer les bases $[AE]$ et $[EB]$. Les autres rapports d'aires découlent de ces deux premières comparaisons.

Le changement de point de vue intervient aussi dans les comparaisons relatives à la figure 18 b. On y applique aussi la proposition (2) concernant les triangles de même hauteur : le rapport de leurs aires égale celui de leurs bases. Si cette proposition n'est pas connue, elle peut être retrouvée (dans ce cas-ci au moins) soit par l'utilisation de la formule d'aire du triangle, soit en traçant le segment $[DC]$ et en visualisant des triangles de même aire ([1]).

2. Comparez les aires des triangles ADE, DBE et CDE. Vous pouvez supposer égales les longueurs des segments alignés séparés par de gros points.

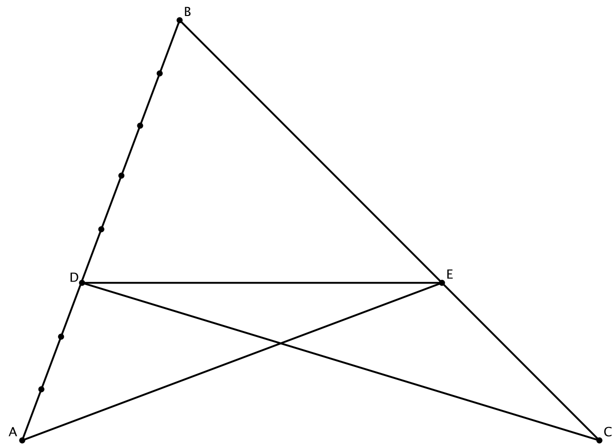


Fig. 19

À nouveau, les aires des triangles ADE et DBE peuvent être comparées en considérant le rapport de leurs bases $[DA]$ et $[BD]$. Il est pourtant plus tentant de considérer leur base commune, horizontale, $[DE]$. Mais pour comparer leurs hauteurs respectives, il faudrait disposer du théorème de Thalès, dont nous visons la démonstration.

Les triangles ADE et CDE ont même base $[DE]$. Auraient-ils même aire ? Pour cela, il faudrait et il suffirait que AC soit parallèle à DE. La réponse est donc : les deux triangles ont même aire si et seulement si AC est parallèle à DE.

Remarquons que pour voir que ces deux triangles ont même base, il faut à nouveau *changer de point de vue*. Les bases sont horizontales, mais les triangles se présentent « tête en bas ». Pour comparer leurs aires, on peut aussi passer par des figures intermédiaires : le quadrilatère $ADEC$ et les deux triangles ADC et AEC. Ceux-ci ont l'avantage de présenter une base commune qui semble horizontale et se présentent « tête en haut ». Si AC est parallèle à DE, le quadrilatère $ADEC$ est un trapèze et ces deux triangles ont même aire. Donc leurs complémentaires par rapport au trapèze ont aussi même aire. On utilise ici *l'équicomplémentarité.*

([1]) Démontrer rigoureusement cette proposition n'est en fait pas si élémentaire dans le cas où le rapport des bases n'est pas rationnel. On ne le fait en général pas avec des élèves de 14 ou 15 ans.

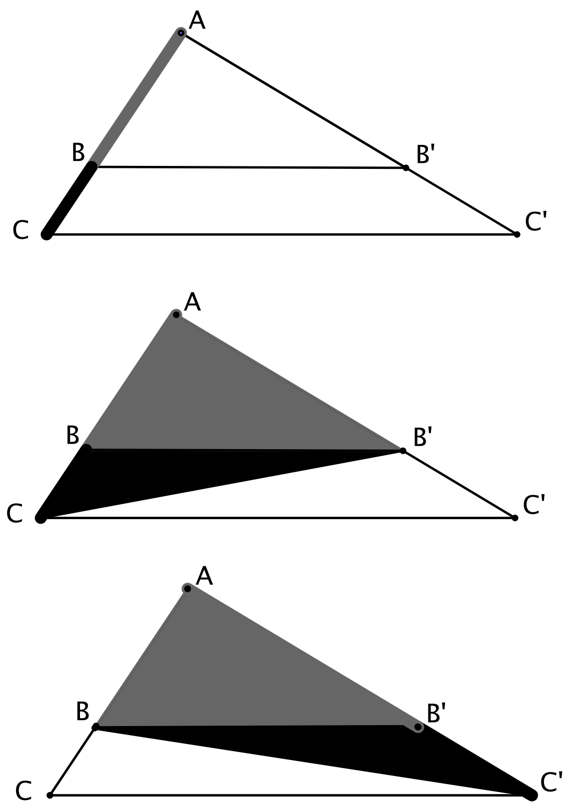
5. À 15 ans, une démonstration du théorème de Thalès

L'objectif de l'activité suivante n'est pas d'introduire le théorème de Thalès mais plutôt de permettre aux élèves de le démontrer avec un peu d'aide dans le cas particulier du triangle, selon la méthode d'Euclide (livre VI des *Eléments*, proposition 2). On suppose donc que les élèves en ont déjà établi l'énoncé que voici :

Une droite coupant deux côtés d'un triangle est parallèle à la base si et seulement si elle découpe sur ces côtés des segments de longueurs proportionnelles.

Une implication

> 1. À la figure 20, on suppose BB' et CC' parallèles. On veut en déduire que $\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'A}}$. Les quatre figures suivantes sont la base de la démonstration d'Euclide. Ne manquent que les arguments. Écrivez-les.



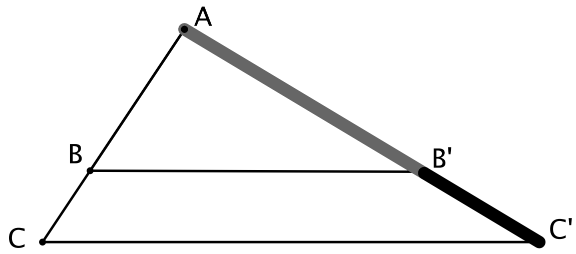


Fig. 20 *a, b, c, d*

Le passage de la figure 20 *a* à la figure 20 *b* suggère de comparer un rapport de longueurs et un rapport d'aires. En vertu de la proposition (2), on peut écrire

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\text{Aire } BCB'}{\text{Aire } BAB'}. \tag{1}$$

Les deux triangles noirs des figures 20 *b* et *c* ont la même aire en vertu de la proposition (1). On obtient donc

$$\frac{\text{Aire } BCB'}{\text{Aire } BAB'} = \frac{\text{Aire } B'C'B}{\text{Aire } BAB'}. \tag{2}$$

Ensuite, à nouveau en vertu de la proposition (2), on a

$$\frac{\text{Aire } B'C'B}{\text{Aire } BAB'} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'A}}. \tag{3}$$

De ces trois égalités, nous déduisons que

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'A}}.$$

■

Remarquons que nous n'avons utilisé l'hypothèse de parallélisme que pour établir l'égalité (2). Les deux autres égalités restent valables dans le cas où BB' n'est pas parallèle à CC'.

Par ailleurs, les arguments ne viennent pas aussi aisément qu'on pourrait l'espérer. Avant de penser à établir l'égalité (1), il faut que les élèves *changent de point de vue*, et pour cela, éventuellement qu'ils tournent la tête pour imaginer les côtés $[AB]$ et $[BC]$ horizontaux et les traiter comme des bases de triangles. Il en est de même pour l'égalité (3). Une fois ce changement de point de vue effectué, ce sont les images mentales acquises en étudiant le troisième type de matériel (figures 7 *c* et 10) qui peuvent resurgir. L'égalité (2) nécessite également un *changement de point de vue* : les bases sont ici horizontales, mais les sommets opposés sont en dessous de la base, ce qui n'est pas habituel. De plus, pour comprendre l'égalité d'aires des deux triangles $BB'C$ et $BB'C'$, on peut évoquer le *mouvement* qui permet de déformer l'un en l'autre. Il s'agit alors d'évoquer les images mentales créées à partir du premier matériel (figures 7 *a* et 8).

Remarquons encore que pour montrer l'égalité de rapports de longueurs, Euclide passe par une égalité de rapports d'aires qui constitue une *situation intermédiaire*.

L'implication réciproque

2. On veut maintenant démontrer l'implication réciproque. Voyez ce que l'on suppose, ce que l'on sait déjà et ce que l'on veut en déduire. Modifiez la démonstration précédente en tenant compte des nouvelles hypothèse et thèse.

Nous voulons maintenant montrer que si $\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'A}}$, alors BB' et CC' sont parallèles. Revoyons les égalités établies dans la démonstration précédente. Puisque seule l'égalité (2) nécessitait l'hypothèse de parallélisme, nous pouvons à nouveau compter sur les égalités (1) et (3). De plus, nous disposons maintenant de l'hypothèse

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'A}}. \qquad (4)$$

Les égalités successives (1), (4) et (3) nous permettent donc de déduire la (2) à savoir

$$\frac{\text{Aire } BCB'}{\text{Aire } BAB'} = \frac{\text{Aire } B'C'B}{\text{Aire } BAB'}, \qquad (2)$$

dont nous déduisons que

$$\text{Aire } BCB' = \text{Aire } B'C'B.$$

Or ces deux triangles ont la même base. En vertu de la proposition (3), leurs sommets opposés appartiennent à une même parallèle à leur base commune. Donc CC' est parallèle à BB'. ∎

Prolongement

À partir du théorème précédent, il est aisé d'établir le théorème de Thalès dans le cas général en prolongeant les sécantes pour faire apparaître un triangle puis en utilisant les propriétés sur les rapports de grandeurs.

> *Trois droites parallèles déterminent sur des droites sécantes des segments de longueurs proportionnelles.*

Mais il est aussi possible, en guise d'application, de voir comment les arguments précédents s'adaptent au cas général.

On suppose AA', BB' et CC' parallèles. On veut en déduire que $\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'A'}}$. Comment adapter les arguments précédents à la situation actuelle ?

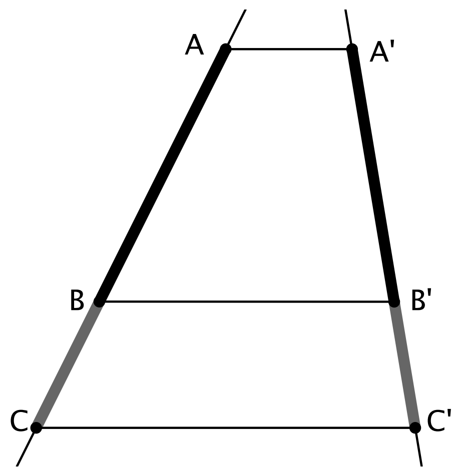


Fig. 21

6. La cohérence et l'utilité du parcours

Au fil d'un tel parcours, les élèves peuvent établir des propositions sur les triangles. Mais il nous semble aussi important qu'ils se construisent des images mentales et acquièrent des outils de pensée.

Relevons les images mentales liées au matériel de la section 2. Elles permettent notamment de « voir » les propositions en plus de les connaître. Cela rend celles-ci plus disponibles. En effet, les images mentales permettent de reconnaître les situations où l'on va pouvoir utiliser telle ou telle propriété.

Quant aux outils de pensée, tels le *mouvement*, le *changement de point de vue*, la *recherche d'une situation intermédiaire*, l'*enrichissement d'une figure*, la *considération de cas extrêmes*, l'*équicomplémentarité*, ils sont utiles dans de nombreux problèmes de géométrie et leur intérêt dépasse le cadre de l'étude de triangles.

Pour terminer, étudions deux problèmes qui nous permettront d'utiliser à nouveau les images mentales et outils de pensée développés.

Figures de même périmètre

1. La figure 22 représente une ficelle tendue passant par quatre perles mobiles A, B, C, D.
a) Déplacez une perle pour augmenter l'aire. Réitérez l'opération.
Le but est de pouvoir répondre à la question suivante.
b) De tous les quadrilatères de même périmètre, quel est celui qui a la plus grande aire ? Il n'est pas nécessaire de chercher à construire *par ce procédé* le quadrilatère d'aire maximale.

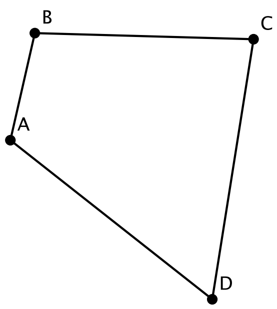


Fig. 22

Puisque l'on ne peut bouger qu'une perle à la fois, on va *décomposer* le quadrilatère en deux triangles. L'un reste fixe tandis qu'on essaie d'augmenter l'aire de l'autre. Ce sont ici les images mentales et connaissances liées au deuxième matériel (section 2) qui sont utiles. Les figures 23 a, b et c montrent une solution possible. La dernière figure obtenue par ce procédé est un losange.

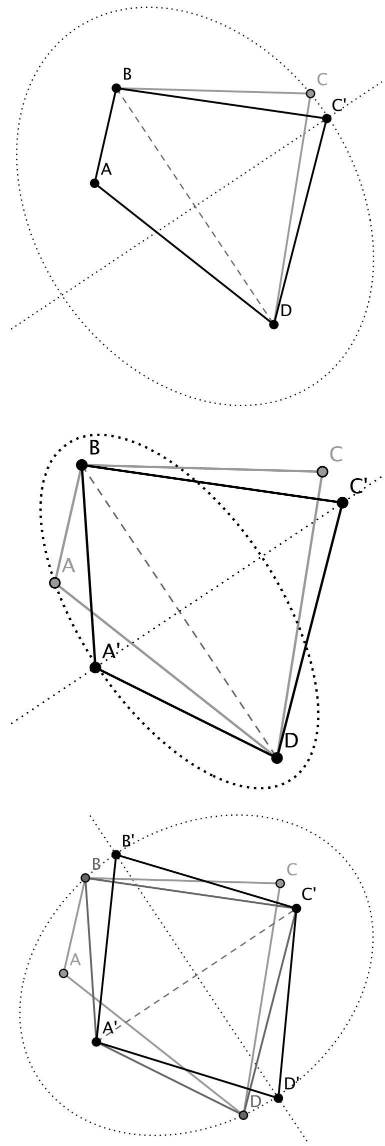


Fig. 23 a, b, c

Remarquons que si l'objectif est de savoir quel quadrilatère a l'aire la plus grande parmi ceux de même périmètre, la première étape (figure 23 a) suffit : tant que deux côtés adjacents du quadrilatère sont de longueurs inégales, on peut améliorer la situation en déplaçant une perle. On en déduit que le quadrilatère ayant l'aire la plus grande doit (au moins) être un losange.

Ensuite, parmi tous les losanges de même périmètre (donc de mêmes côtés), il faut chercher celui dont l'aire est la plus grande. À nouveau le mouvement nous permet de trouver la réponse (figure 24). C'est un carré.

Nous avons entendu l'idée de cette preuve lors d'une conférence de Charlotte Bouckaert et Micheline Citta [1], qui présentaient « le principe opératoire chez E. Wittmann », en 2000 au Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (Nivelles).

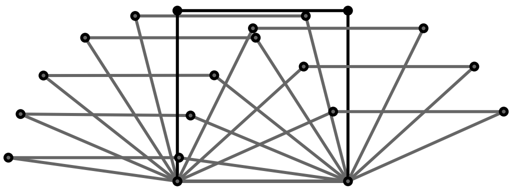


Fig. 24

Figures de même aire

> 2. La figure 25 représente un élastique tendu passant par cinq perles mobiles A, B, C, D, E. Déplacez une perle à la fois tout en conservant l'aire de la figure. Pourrez-vous transformer ce pentagone
> – en triangle ?
> – en parallélogramme ?

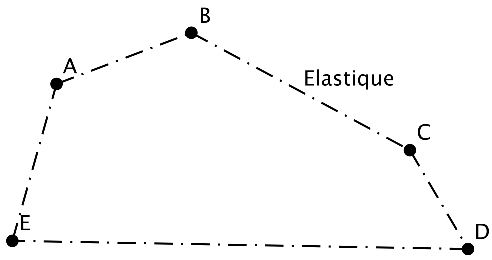
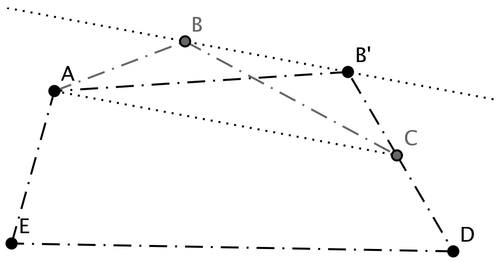


Fig. 25

Si on choisit de déplacer la perle B, on commence par *décomposer* le pentagone en un quadrilatère et un triangle (ABC). En prenant $[AC]$ comme base et en utilisant le principe du premier matériel (section 2), on déplace la perle le long d'une parallèle à AC (figure 26 a) jusqu'à son alignement avec C et D. Ensuite on peut déplacer par exemple A. On décompose alors le quadrilatère $AB'DE$ en deux triangles et on fait glisser A le long d'une parallèle à EB' passant par A (figure 26 b) pour finalement obtenir le triangle $EA'D$.



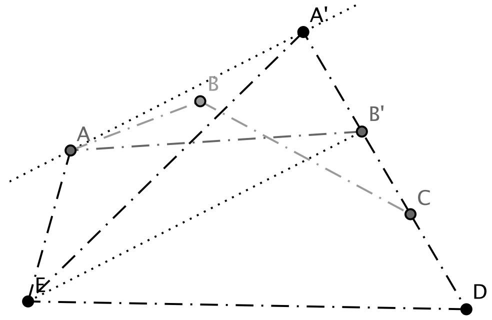
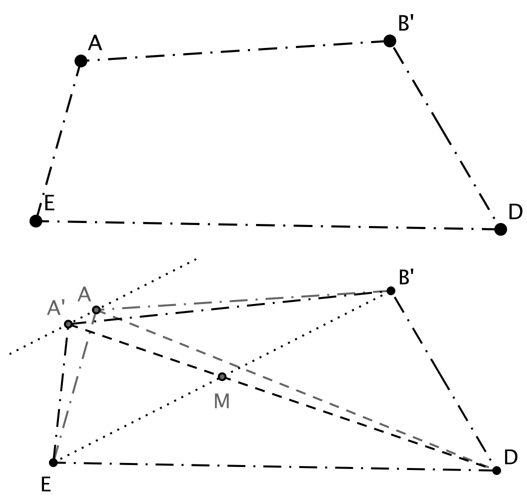


Fig. 26 a, b

Le principe de transformation d'un polygone en un triangle de même aire par ce prodécé a notamment été utilisé par Christian Ludwig Gerling au début du 19e siècle pour démontrer que deux polygones de même aire sont toujours équidécomposables, c'est-à-dire constructibles en assemblant les mêmes pièces de puzzle. Cette preuve a été présentée lors d'un exposé au séminaire du Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques par Klaus Volkert.

Pour obtenir un parallélogramme, on peut repartir du quadrilatère $AB'DE$. Une première idée serait d'amener A en un point A' de manière que $A'B'$ soit parallèle à ED. Cependant le parallélisme disparaitrait dès que l'on bougerait une autre perle.

Une idée plus fructueuse est de se baser sur la propriété des diagonales du parallélogramme : elles se coupent en leur milieu. Les figures 27 a, b et c montrent une solution. On bouge d'abord la perle A en A' pour que $A'D$ coupe la diagonale $[EB']$ en son milieu M. Ensuite, on bouge E en E' pour que $E'B'$ coupe la diagonale $[A'D]$ en son milieu O. Le théorème de Thalès nous assure que O est bien le milieu de $[E'B']$.



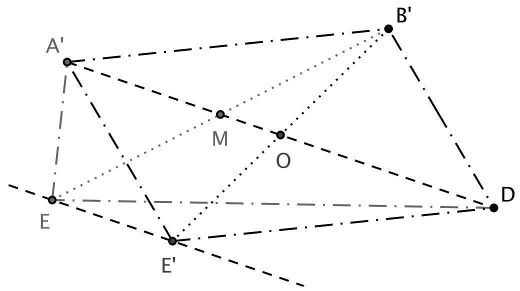


Fig. 27 a, b, c

Ginette Cuisinier, Julie Saelen et André Wauters ont contribué par leurs commentaires à améliorer ce texte. Je les en remercie chaleureusement.

Pour en savoir plus

[1] Charlotte Bouckaert, *Le principe opératoire en géométrie chez Wittmann*, Texte d'un exposé donné à Mons le 14 mars 2000.

[2] Thérèse Gilbert, *Quelques instruments de pensée en géométrie*, Math-Ecole n° 193, Neufchâtel, août 2000.

Thérèse Gilbert, Institut Supérieur de Pédagogie Galilée, 40 rue Vergote à B-1200 Bruxelles, et le sous-groupe GEM 10-15 (composé d'Isabelle Berlanger, Lucie De Laet, Thérèse Gilbert, Philippe Kats, Sophie Loriaux, Julie Saelen et André Wauters) du Groupe d'Enseignement Mathématique, 2 chemin du cyclotron à B–1348 Louvain-la-Neuve.

Dernier dossier publié par la commission pédagogique

Disponible au secrétariat de la SBPMef,
24 rue du 11 Novembre, 7000 Mons ;
tél. : 065 31 91 80.
Prix 6.00 , 4.00 pour les membres.