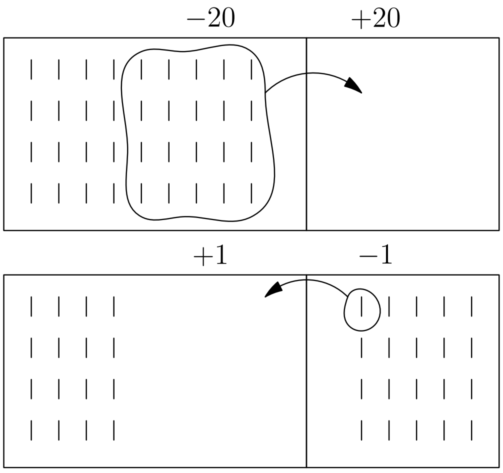
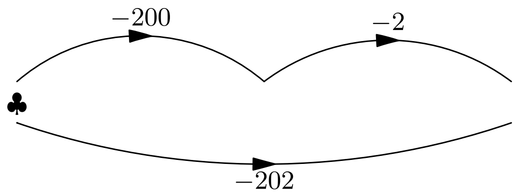
Quelques difficultés liées à la soustraction

Isabelle Berlanger, Ginette Cuisinier, Thérèse Gilbert, Laure Ninove





Initialement publié dans :
Losanges, n° 19, 2012 (Partie 1)
Losanges, n° 20, 2013 (Partie 2)

Groupe d'Enseignement Mathématique
Chemin du Cyclotron 2, B-1348 Louvain-la-Neuve
http : //www.gem-math.be/

Quelques difficultés liées à la soustraction

Article issu d'une réflexion au sein du sous-groupe *GEM 10-15 ans*

Cet article a comme point de départ certaines difficultés fondamentales liées à la soustraction, difficultés auxquelles les enseignants sont confrontés d'année en année et qui les laissent parfois démunis. Nous y rassemblons quelques approches relatives à la soustraction en primaire et au début du secondaire sous forme d'activités, et en proposons une analyse épistémologique. Pour cela, nous avons pris le point de vue du sens, en nous centrant sur les interprétations possibles de la soustraction, et leur extension éventuelle lorsque l'on passe d'un ensemble de nombres à un autre. Nous ne proposons donc pas ici une unique séquence toute prête pour aborder cette opération mais rassemblons diverses méthodes.

La première partie de l'article est consacrée à la soustraction à la fin de l'école primaire. Dans la seconde partie, nous nous intéressons à l'introduction de la soustraction dans $\mathbb{Z}$ au début du secondaire.

Le Groupe d'Enseignement Mathématique

Fondé en 1978, le GEM (Groupe d'Enseignement Mathématique) regroupe une trentaine d'enseignants de la maternelle à l'enseignement supérieur, tous intéressés par l'enseignement des mathématiques.

Ils se réunissent une après-midi toutes les deux ou trois semaines, pour préparer des séquences de cours, rédiger des manuels ou des documents de formation continue, discuter de leurs enseignements. Ils forment des sous-groupes, selon les sujets qui les intéressent. La plupart des sujets choisis sont étudiés pendant au moins une année. Parmi les membres du GEM, qui sont tous bénévoles, chacun collabore à un projet et, en ce faisant, chacun donne et reçoit.

Ils produisent des brochures diverses, des livres, des manuels, des mémoires de licence et des thèses de doctorat, et assurent des animations de formations continues, des communications à des colloques et congrès en Belgique et ailleurs.

Quelques difficultés liées à la soustraction (Partie 1)

Isabelle Berlanger, Ginette Cuisinier, Thérèse Gilbert, Laure Ninove

Mots clés : Soustraction, interpréter un calcul, schéma fléché

Cet article a comme point de départ certaines difficultés fondamentales liées à la soustraction, difficultés auxquelles les enseignants sont confrontés d'année en année et qui les laissent parfois démunis. Nous y rassemblons quelques approches relatives à la soustraction en primaire et au début du secondaire sous forme d'activités, et en proposons une analyse épistémologique. Pour cela, nous avons pris le point de vue du sens, en nous centrant sur les interprétations possibles de la soustraction, et leur extension éventuelle lorsque l'on passe d'un ensemble de nombres à un autre. Nous ne proposons donc pas ici une unique séquence toute prête pour aborder cette opération mais rassemblons diverses méthodes.

Cette première partie de l'article est consacrée à la soustraction à la fin de l'école primaire. Dans une seconde partie, nous nous intéresserons à l'introduction de la soustraction dans $\mathbb{Z}$ au début du secondaire.

Petite histoire introductive : l'euro manquant

Voici un problème bien connu. « Trois amis vont manger au restaurant. À la fin de leur repas, le patron leur calcule l'addition : 60 euros. Ils paient donc chacun 20 euros.

Tout de suite après, le patron se rend compte qu'il s'est trompé dans l'addition : celle-ci s'élevait en fait à 55 euros. Il charge donc le serveur d'aller leur rendre les 5 euros. Les trois amis ne sachant comment se répartir les cinq euros, prennent chacun un euro et laissent les deux autres pour le serveur.

Faisons les comptes : chaque convive a donné 19 euros, cela fait 57 euros, ajoutés aux deux euros que le garçon a reçus, cela fait 59 euros. Où est passé l'euro manquant ? »

Analyse du problème

Expliquons l'erreur. Les 2 euros laissés au garçon sont déjà comptabilisés dans les 57 euros dépensés par les convives. C'est le reste de la division de 5 euros par 3. Les convives reprennent 1 euro chacun mais laissent le reste au garçon.

Dans le récit, on fait les comptes en suivant deux points de vue en même temps, celui des convives et celui du restaurateur. C'est là que se trouve la source de l'erreur.

Faisons le bilan final correctement. Si on prend le point de vue des convives : ils ont dépensé 60 euros moins 3 euros, ce qui donne 57 euros. Si on se met du côté du restaurant : le restaurateur a reçu 55 euros et le serveur a reçu 2 euros de pourboire, ce qui fait bien 57 euros en tout.

Il nous semble qu'un tel changement de point de vue mal maîtrisé est une des causes de certaines difficultés en mathématiques élémentaires.

Une difficulté de la soustraction dans $\mathbb{N}$

La méthode, une justification et une réaction fréquente d'enfant

Pour soustraire 19 à un nombre, on peut commencer par soustraire 20, puis ajouter 1.

– *L'élève.* Ah non, il faut enlever 20, puis enlever 1, parce que 20 c'est trop, donc il faut faire -1. En effet, 19, c'est $20 - 1$, pas $20 + 1$.

– *L'instituteur.* Imagine que j'aie un tas de crayons devant moi. Je veux en enlever 19. Mais je me trompe, j'en enlève 20. Que dois-je faire ?
– *L'élève.* Tu dois en remettre 1. Donc faire -1.

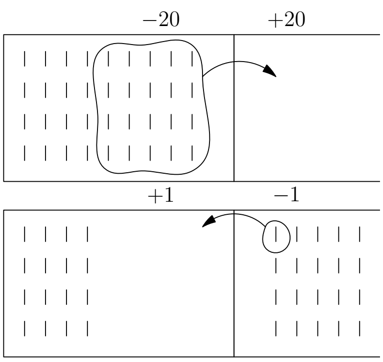
Identifiez le problème. Comprenez-vous la logique de l'enfant ?

Analyse du problème

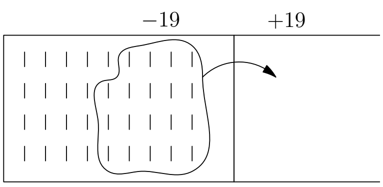
Comme dans l'histoire de l'euro manquant, l'élève change de point de vue en cours d'histoire. Au début, il s'intéresse à ce qu'il y a dans le tas de crayons, mais à la fin, il prend un point de vue extérieur à ce tas : puisqu'il doit remettre un crayon dans le tas, il doit s'en séparer, donc faire -1.

Mais si le -1 s'applique bien à 20 (aux 20 crayons enlevés), l'opérateur -19 décrit, lui, une transformation opérée sur le tas de crayons que l'on avait au départ. Et ce tas-là doit recevoir un crayon $(+1)$ en fin de course.

Du point de vue du tas de départ, les mouvements se traduisent par le calcul $-20 + 1$, tandis que du point de vue du tas d'arrivée, il s'agit de $+20 - 1$.



On a bien -19 d'un côté et $+19$ de l'autre, les comptes sont justes.



Différentes approches pour introduire ou comprendre la méthode de calcul

Nous commençons ici par proposer quelques activités pour le niveau primaire, qui se prolongent ensuite naturellement dans le cadre du calcul littéral en secondaire. Ces activités se concentrent sur *l'interprétation* de calculs ou d'égalités numériques (qui deviendront plus tard algébriques). L'élève est amené à se forger et à exprimer des images mentales de la soustraction qui lui seront utiles dans divers contextes mathématiques. Le professeur pourra s'inspirer des différentes approches proposées pour construire sa propre séquence de cours.

Ajouter et enlever

La séquence suivante, si elle est proposée telle quelle, présente une difficulté de lecture et de concentration. Pour éviter ce problème, l'enseignant peut raconter les différentes histoires. Par ailleurs, il n'est pas nécessaire de faire suivre les trois histoires. On pourrait travailler les deux premières un jour et la dernière une autre fois.

Tous les enfants partent en excursion.

a) Dans le car bleu, il y a 28 enfants, mais 2 enfants se sont trompés de car et doivent descendre. Un peu plus tard, 6 retardataires arrivent.

Finalement combien y a t-il d'enfants dans le car bleu ? Écris ton calcul, explique comment tu as fait.

b) On a compté 52 enfants dans le car rouge. Il n'y a pas suffisamment de places. Dix enfants sortent du car, mais alors il reste une place vide et l'institutrice demande à un enfant de remonter dans le car.

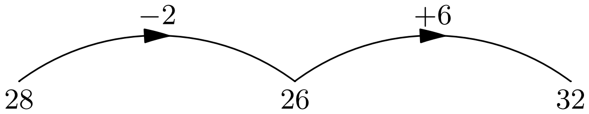
Combien d'enfants ont finalement dû quitter le car rouge ? Combien de places assises y a-t-il dans le car pour les enfants ? Écris chaque fois ton calcul.

c) Par ailleurs, 63 enfants se sont précipités dans le car jaune. Mais il manque 19 places. Un groupe de 20 copains quitte alors le car. Mais l'institutrice veut que chaque siège soit occupé par exactement un enfant.

Pour cela, que doit-elle demander ? Combien d'enfants sont finalement présents dans le car au moment du départ ? Écris ton calcul en tenant compte des sorties et des entrées.

a) Pour déterminer le nombre d'enfants finalement présents dans le car, on peut procéder étape par étape :
- au départ, 28 enfants sont présents ;
- ensuite, 2 enfants descendent et il reste donc $28 - 2 = 26$ enfants dans le car ;
- enfin, 6 enfants en retard montent et on obtient donc finalement $26+6 = 32$ enfants dans le car.

On peut résumer ces deux calculs en un seul : $28 - 2 + 6 = 32$. Écrire les calculs correspondant à la situation implique de formaliser sa pensée et cela peut être une grande difficulté pour les élèves. Dans ce cas, on peut demander aux élèves d'exprimer ce qu'ils ont fait, verbalement, à l'aide d'une manipulation de jetons, d'un dessin ou d'un schéma fléché. Un schéma fléché permet de mettre en évidence les deux étapes du calcul correspondant aux deux opérateurs -2 et $+6$.



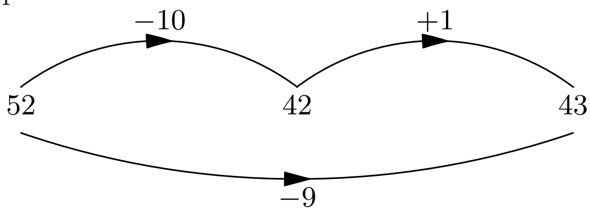
b) Pour déterminer combien d'enfants ont finalement dû quitter le car, il faut se concentrer sur les entrées et sorties de celui-ci : comme 10 enfants sont sortis pour commencer puis 1 de ceux-ci est remonté, il y a finalement $10-1$, soit 9 enfants qui ont quitté définitivement le car.

Déterminer le nombre de places assises revient à déterminer le nombre d'enfants présents dans le car à la fin, puisqu'il doit y avoir exactement un enfant à chaque place. Ce nombre d'enfants finalement présents dans le car peut se déterminer de deux manières différentes :
- soit en procédant de la même manière qu'au point a), en considérant successivement la sortie puis la montée d'enfants : on obtient le calcul $52 - 10 + 1 = 43$;
- soit en réalisant que le nombre final d'enfants dans le car est égal au nombre initial diminué du nombre d'enfants qui ont dû finalement quitter le car, c'est-à-dire 9 enfants : on obtient le calcul $52 - 9 = 43$.

On peut donc écrire

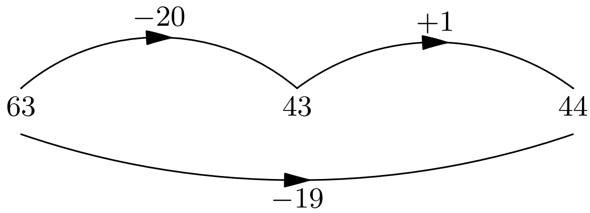
$$52 - 9 = 52 - 10 + 1.$$

À première vue, le calcul $52 - 9$ peut sembler plus simple à effectuer que $52 - 10 + 1$ car il ne comporte que deux termes plutôt que trois. Cependant, la décomposition de l'opérateur -9 en deux opérateurs -10 et $+1$ peut être une aide pour le calcul mental.



c) Puisque 20 enfants sont sortis alors que seulement 19 auraient dû le faire, c'est qu'un enfant de trop est sorti du car. L'institutrice doit donc demander à 1 élève de remonter dans le car.

Pour déterminer le nombre d'enfants finalement présents dans le car, on peut procéder de deux manières différentes, comme en b) ci-dessus :
- soit en considérant successivement la sortie puis la montée d'enfants : on obtient le calcul $63 - 20 + 1 = 44$;
- soit en considérant que pour 63 enfants, il manquait 19 places, ou de manière équivalente en considérant qu'au final 19 enfants sur les 63 ont dû quitter le car : on obtient le calcul $63 - 19 = 44$.



On peut donc écrire

$$63 - 19 = 63 - 20 + 1.$$

Interpréter un calcul

Voici des calculs :

$$75 - 30 - 1,$$
$$75 - 30 + 1,$$
$$75 + 1 - 30,$$
$$75 - 29,$$
$$75 - 31.$$

Certains donnent la même réponse. Lesquels ? Invente des histoires qui expliquent les calculs.

Nous allons évoquer deux contextes qui permettent de se convaincre de l'équivalence de certains calculs.

Les calculs $75-30-1$ et $75-31$ donnent la même réponse : $75-30-1=75-31$. Voyons pourquoi.

- Le calcul $75-30-1$ peut par exemple s'interpréter ainsi : « J'ai reçu 75 bonbons de Saint-Nicolas dimanche. J'en ai déjà mangé 30. Ce soir, j'en ai mangé encore 1. Il m'en reste donc encore $75-30-1=44$. »
- Le calcul $75-31$, pourrait s'interpréter ainsi : « J'ai reçu 75 bonbons dimanche. J'en ai mangé en tout 31. Il m'en reste donc encore $75-31=44$. »
- Que l'on mange 31 bonbons ou que l'on en mange 30 puis encore un, le reste sera le même.

Par ailleurs, les calculs $75+1-30$, $75-30+1$ et $75-29$ donnent tous les trois la même réponse : $75+1-30=75-30+1=75-29$. Voyons d'abord que $75+1-30=75-30+1$.

- Le calcul $75-30+1$ peut s'interpréter ainsi : « J'ai reçu 75 bonbons de Saint-Nicolas dimanche. J'en ai déjà mangé 30. Aujourd'hui, Mamy m'en a donné encore 1. Il m'en reste donc encore $75-30+1=46$. »
- Le calcul $75+1-30$ peut s'interpréter ainsi : « J'ai reçu 75 bonbons de Saint-Nicolas. Mamy m'en a donné 1 supplémentaire. J'en ai ensuite mangé 30. Il m'en reste donc encore $75+1-30=46$. »
- Le fait que ce soit avant ou après avoir mangé des bonbons de Saint Nicolas que j'en reçois un de Mamy ne change pas ce qu'il me restera à la fin.

Voyons à présent que $75-30+1=75-29$. Cette égalité peut s'interpréter à l'aide du contexte suivant. « J'ai reçu 75 bonbons de Saint-Nicolas dimanche. J'en ai tout de suite préparé 30 pour les manger aujourd'hui. Mon grand-frère me trouvant trop gourmand, j'en ai remis 1 dans le paquet et n'en ai mangé que 29. Il m'en reste donc encore $75-30+1=75-29=46$. »

Dans un contexte d'entrées et sorties semblable à celui de l'activité présentée ci-dessus, voici une manière de montrer que les calculs $75+1-30$, $75-30+1$ et $75-29$ donnent tous les trois la même réponse. À nouveau, on considère d'abord les calculs $75+1-30$ et $75-30+1$.

- Le calcul $75+1-30$ peut par exemple s'interpréter comme : « Les enfants sont regroupés sous le préau. À l'appel, 75 enfants sont présents. Ensuite, un retardataire arrive au préau. Un peu plus tard, 30 enfants quittent le préau. À ce moment, il reste donc $75+1-30$, soit 46 enfants sous le préau. »
- Le calcul $75-30+1$, peut s'interpréter comme : « Les enfants sont regroupés sous le préau. À l'appel, 75 enfants sont présents. Ensuite, 30 enfants quittent le préau. Un peu plus tard, un retardataire arrive au préau. À ce moment, il y a donc $75-30+1$, soit 46 enfants sous le préau. »

Pour montrer que $75-30+1=75-29$, on peut par exemple interpréter ces calculs comme suit.

- « Les enfants sont regroupés sous le préau. À l'appel, 75 enfants sont présents. Ensuite, 30 enfants quittent le préau. Mais l'un fait demi-tour et revient sous le préau. En tout, 29 enfants ont donc quitté le préau. Après, il reste donc $75-30+1$ enfants, ou encore $75-29$ enfants sous le préau. »

Commentaire

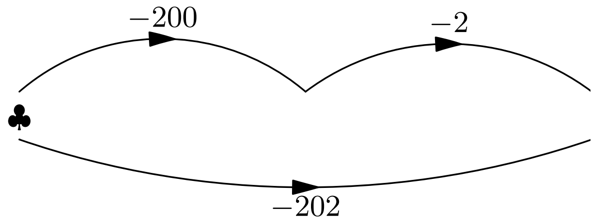
Notons qu'au fil de ces activités (*Ajouter et enlever* et *Interpréter un calcul*), l'élève est entrainé à adopter un point de vue privilégié pour traduire une situation, c'est-à-dire à fixer l'ensemble sur lequel on agit. L'histoire aide à se focaliser sur le car, le préau, le sachet de bonbons, et permet ainsi d'éviter les confusions de points de vue évoquées ci-dessus.

Agir sur un grand nombre

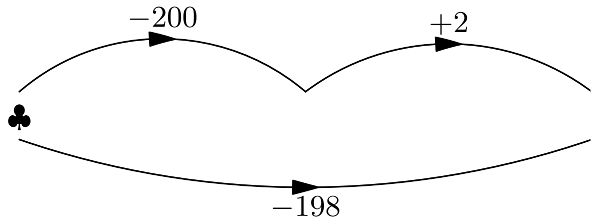
Un grand nombre ♣ est noté sur un papier et caché dans une enveloppe. J'ai fait plusieurs calculs à partir de ce nombre : a) $♣-200-2$, b) $♣-200+2$, c) $♣-198$. Certains de ces calculs ont donné le même résultat. Lesquels ? Pourquoi ?

Les calculs b) et c) ont donné le même résultat.

a) J'ai d'abord retiré 200 au grand nombre ♣ puis j'ai encore retiré 2. J'ai donc en tout retiré plus que 200 : j'ai retiré 202 à ♣.



b) J'ai d'abord retiré 200 au grand nombre ♣ puis j'ai ajouté 2 à ce que j'avais obtenu. J'ai donc en tout retiré moins que 200 : j'ai retiré 198 à ♣.



c) J'ai retiré 198 au grand nombre ♣.

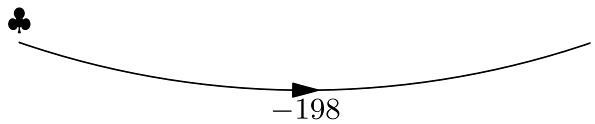
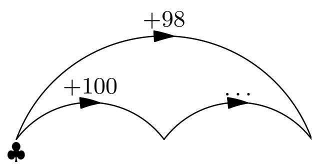
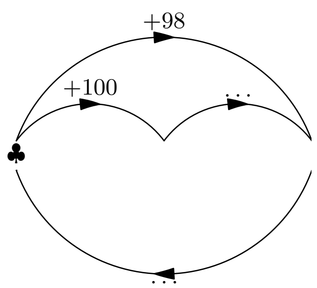


Schéma fléché

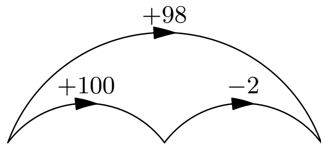
Complète le schéma suivant qui illustre l'ajout de 98 à un nombre.
Pour ajouter 98, on peut ajouter 100 puis enlever 2.



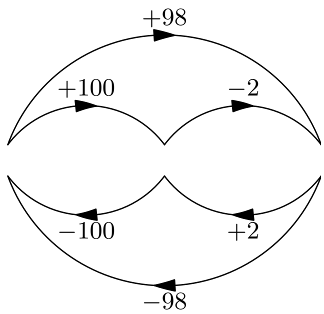
Et pour enlever 98 ? Aide-toi du schéma suivant.



Soustraire 98 et ajouter 98 sont deux opérateurs réciproques. Pour ajouter 98 à un nombre, je peux d'abord ajouter 100, puis enlever 2.



Pour enlever 98, je peux appliquer les opérateurs réciproques : d'abord ajouter 2 puis retirer 100.



Commentaire

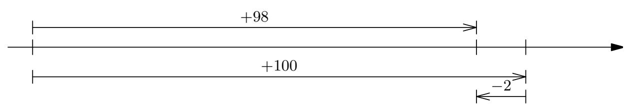
Ici le schéma permet de suivre l'ordre des opérations, d'un point de départ (premier terme de la soustraction) à un point d'arrivée (résultat de la soustraction), via une transformation (la composée des deux opérateurs).

Mais remarquons que l'ordre des opérations obtenu par cette méthode n'est pas l'ordre habituel : en travaillant sur les schémas fléchés des opérateurs réciproques, on obtient que l'opérateur -98 peut être décomposé en la succession de $+2$ et -100, plutôt que -100 suivi de $+2$.

On peut aussi visualiser les opérateurs par des mouvements sur une droite. C'est ce que nous proposons à l'activité suivante.

Déplacements sur la droite des nombres

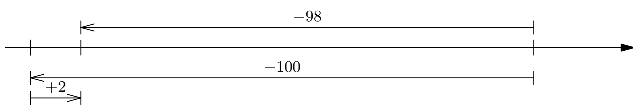
Pour avancer de 98 sur la droite des nombres, on peut avancer de 100 puis reculer de 2. Ces mouvements correspondent aux calculs $\cdots + 98 = \cdots + 100 - 2$.



Et pour reculer de 98 ? Dessine les mouvements sur la droite des nombres. Écris les calculs correspondant à ce mouvement.

Quelques difficultés liées à la soustraction

Pour reculer de 98 sur la droite des nombres, je peux d'abord reculer de 100 puis avancer de 2.



Commentaire

Outre que cette visualisation ne provoque pas forcément les mêmes intuitions que les schémas fléchés, elle permet d'obtenir la composée d'opérateurs dans l'ordre que l'on veut et notamment dans l'ordre habituel : soustraire 98 revient à soustraire 100 puis à ajouter 2.

Commentaires à propos des différentes approches proposées

Nous retrouvons dans les différentes activités proposées une interprétation classique de la soustraction : la *transformation* qui procure un *reste*. L'idée de reste est très présente dans les histoires ci-dessus ; elle est également dominante dans les histoires proposées par les enfants eux-mêmes pour illustrer un calcul, comme nous avons pu le confirmer lors d'essais dans les classes. Transformations et restes sont par ailleurs utilement représentés par les schémas fléchés (associés ou non à la droite des nombres) qui aident à visualiser et relier les différentes éléments en jeu, et donc à structurer sa pensée.

Prolongement en calcul littéral au secondaire

La difficulté étudiée jusqu'à présent a son pendant en calcul littéral. Nous proposons ci-dessous des activités qui permettent de reparler du sens d'une soustraction (ce qui ne se fait pas toujours au secondaire) et d'interpréter des expressions algébriques de manière à comprendre l'égalité entre certaines d'entre elles.

Retirer moins que prévu

« J'ai 22 billes. J'en retire 7 pour les donner. Mais finalement j'en donne 2 de moins. Combien m'en reste-t-il ? »
Écris le calcul de deux façons différentes en faisant apparaître les trois nombres 22, 7 et 2.

Soit je considère que j'ai 22 billes, que j'en retire 7 de mon tas puis y remets 2 billes, ce qui correspond au calcul $22 - 7 + 2 = 17$; soit je considère que j'ai 22 billes et que j'en donne 2 en moins que 7, c'est-à-dire 5, ce qui correspond au calcul $22 - (7 - 2) = 17$.

Expressions littérales

Les lettres a, b et c désignent trois nombres. L'expression $a - b - c$ peut s'interpréter comme ceci « J'ai a billes. J'en donne b, puis encore c. Combien m'en reste-t-il ? »
Interprétez chacune des quatre expressions suivantes :

1) $a - b - c$,
2) $a - b + c$,
3) $a - (b + c)$,
4) $a - (b - c)$.

Parmi ces quatre expressions, quelles sont celles qui vont donner le même résultat ? Pourquoi ?

Les expressions 1) et 3) donneront le même résultat. En effet, elles peuvent s'interpréter comme suit.
1) J'ai a billes. J'en perds b puis encore c.
3) J'ai a billes. J'en perds en tout $(b + c)$.

Les expressions 2) et 4) donneront le même résultat. En effet, elles peuvent s'interpréter comme suit.
2) J'ai a billes. J'en perds b, puis en retrouve c.
4) J'ai a billes. Je pensais en avoir perdu b mais en fait j'en ai retrouvé c et au total en ai donc perdu c en moins que b, c'est-à-dire $b - c$.

Commentaire

La suppression des parenthèses évoquée dans cet encadré pose régulièrement problème aux élèves. Associées à divers exemples en contexte, les interprétations ci-dessus permettent de montrer le sens de la propriété « on peut supprimer une parenthèse précédée du signe *moins*, à condition de changer le signe de chacun des termes de la parenthèse, sauf du premier », qui est souvent présentée uniquement comme une règle technique. Nous ne prétendons pas que cette activité suffise à s'approprier la règle de calcul, mais elle a le mérite de montrer que le passage au formalisme algébrique n'empêche pas l'interprétation.

Remerciements

Le travail de réflexion à la base de cet article a été effectué dans le sous-groupe 10-15 du Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM). Nous remercions chaleureusement les autres membres de notre sous-groupe, Chrys Fluyt, Sophie Loriaux, Julie Saelen et André Wauters, qui ont participé à la réflexion, élaboré avec nous certaines pistes proposées et en ont expérimenté certaines. Nous remercions également Mélanie Havaux pour sa relecture attentive de ce texte.

Pour en savoir plus

[1] Anne Boyé, *Quelques éléments d'histoire des nombres négatifs*, site de l'APMEP, 2011. http://www.apmep.asso.fr/Quelques-elements-d-histoire-des

[2] IREM de Poitiers, *Les nombres relatifs au collège*, Septembre 1996.

[3] Françoise Lucas, Laurence Balleux, Cécile Goossens, *Math & Sens, Mobiliser les opérations avec bon sens !*, De Boeck, 2008.

[4] Nicolas Rouche *et al.*, *Du quotidien aux mathématiques, Nombres, Grandeurs, Proportions*, Ellipses, Paris, 2006.

[5] Odette Bassis, *Concepts clés et situations-problèmes en mathématiques*, Hachette Education, Paris, 2003.

[6] Laure Collard, *Pourquoi l'algèbre ?, Quelques aspects historiques et méthodologiques*, Travail de fin d'études réalisé sous la direction de Thérèse Gilbert, Haute Ecole Galilée, Bruxelles, Juin 2010.

[7] FESeC, *Guide méthodologique, Mathématiques, 1er degré*, D/2001/7362/3081, 2001.

[8] FESeC, *Programme, Mathématiques, 1er degré commun*, D/2010/7362/3/08, 2010.

[9] Ministère de la Communauté Française, *Programme d'études du cours de mathématiques, 1er degré commun*, 10/2000/240, 2000.

Isabelle Berlanger est maître-assistante à l'Institut Supérieur de Pédagogie Galilée, isabelle.berlanger@galilee.be ; Ginette Cuisinier était enseignante dans le secondaire supérieur, ginette.cuisinier@scarlet.be ; Thérèse Gilbert est maître-assistante à l'Institut Supérieur de Pédagogie Galilée, therese.gilbert@galilee.be ; Laure Ninove est maître-assistante à l'École normale catholique du Brabant Wallon, Haute Ecole Léonard de Vinci, laure.ninove@gmail.com. Elles sont en outre membres du Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM), Chemin du Cyclotron 2 à B–1348 Louvain-la-Neuve, http://sites.uclouvain.be/gem.

Étonnantes égalités . . .

$$\frac{27^4+2^4+4^4+21^4}{28^4+1^4+9^4+18^4}=\frac{27^2+2^2+4^2+21^2}{28^2+1^2+9^2+18^2}=\frac{27\times 2\times 4\times 21}{28\times 1\times 9\times 18}$$

Quelques difficultés liées à la soustraction (Partie 2)

Isabelle Berlanger, Ginette Cuisinier, Thérèse Gilbert, Laure Ninove

Mots clés : Soustraction, interpréter un calcul, nombres relatifs

Cet article a comme point de départ certaines difficultés fondamentales liées à la soustraction, difficultés auxquelles les enseignants sont confrontés d'année en année et qui les laissent parfois démunis. Nous y rassemblons quelques approches relatives à la soustraction en primaire et au début du secondaire sous forme d'activités, et en proposons une analyse épistémologique. Pour cela, nous avons pris le point de vue du sens, en nous centrant sur les interprétations possibles de la soustraction, et leur extension éventuelle lorsque l'on passe d'un ensemble de nombres à un autre. Nous ne proposons donc pas ici une unique séquence toute prête pour aborder cette opération mais rassemblons diverses méthodes.

Après nous être penchés dans une première partie de ce travail sur la soustraction à la fin de l'école primaire [1], nous nous intéressons dans cette seconde partie, à l'introduction de la soustraction dans $\mathbb{Z}$ au début du secondaire.

Nous regarderons quelles interprétations de la soustraction, valables dans le domaine des naturels, peuvent être exportées dans le domaine des entiers et comment elles permettent d'établir la règle de soustraction dans $\mathbb{Z}$. Pour cela, nous resterons dans le domaine des entiers mais les mêmes situations pourraient convenir à la découverte de la soustraction dans le domaine plus étendu des nombres relatifs (nombres non nécessairement entiers, munis d'un signe).

Dans un premier temps, nous proposerons quelques activités pour les élèves. Et dans un deuxième temps, nous inviterons le lecteur à une réflexion méthodologique sur ces propositions. Quels sont les avantages et les limites de chacune ? Laquelle ou lesquelles privilégier ? Nous nous interrogerons aussi sur le statut de la règle : technique, propriété ou définition ?

Quelques approches de la soustraction dans $\mathbb{Z}$

Nous nous penchons ici sur la difficulté de comprendre pourquoi soustraire un nombre négatif revient à ajouter son opposé.

Les programmes de la FESeC (2010) [9] et de la Communauté Française (2000) [10] ne contiennent aucune indication sur la manière d'aborder la *soustraction d'entiers*. On trouve dans le document d'accompagnement du premier degré de la FESeC [8] une proposition basée sur des mouvements de températures pour introduire le retrait d'un *naturel* et sur le prolongement d'une suite de calculs pour établir la règle du retrait d'un *négatif*.

Quelques propositions pour introduire la soustraction dans $\mathbb{Z}$

Voici plusieurs façons indépendantes d'établir ou de comprendre la soustraction dans $\mathbb{Z}$. Sans doute aucune ne permet-elle de couvrir toutes les facettes, de justifier tous les procédés de calcul (sur les naturels, les entiers, ...), toutes les propriétés. D'où l'intérêt d'entrainer les enfants à choisir l'interprétation qui fonctionne le mieux dans la situation donnée.

Ci-dessous, nous introduisons – en encadré – chacune des six propositions par une série de questions, telles qu'on pourrait les poser aux élèves. Celles-ci sont suivies de pistes de réponses. Notons que ces activités présupposent un travail préalable sur les entiers et l'addition d'entiers ainsi que la soustraction de naturels, y compris les calculs du type « $2-5$ ». Celui-ci peut être basé sur plusieurs interprétations des entiers et des opérations : accumulations d'avoirs et de dettes, positions et mouvements sur une droite ou un thermomètre… Chacune de ces approches trouve un prolongement dans les activités suivantes.

Conservation d'une régularité

L'activité suivante requiert, en plus de la maitrise de résultats tels que

$$(-2)+5=3 \qquad (-2)+(-5)=-7 \qquad 2-5=-3,$$

celle de calculs tels que

$$(-2)-5=-7.$$

Comme nous l'avons dit, ceci peut être établi à partir de positions sur une droite ou sur un thermomètre, comme le propose la FESeC [8] ou dans le contexte d'avoirs et de dettes, par exemple.

a) Complétez le tableau suivant en commençant par ce que vous connaissez (et que vous pouvez donc justifier). Puis dans une autre couleur, complétez le reste du tableau, en vous servant des régularités observées.

$\nearrow\ -$	3	2	1	0	−1	−2	−3
3							
2							
1							
0							
−1							
−2							
−3							

Utilisez le tableau pour déterminer les résultats des calculs suivants :

$$\begin{aligned} 3-(-1) &= \\ 2-(-3) &= \\ (-3)-(-3) &= \end{aligned}$$

b) Déterminez le résultat des calculs suivants :

$$\begin{aligned} 2-(-9) &= \\ (-7)-(-10) &= \end{aligned}$$

c) Énoncez une règle pour soustraire un nombre négatif.

a) Voici le tableau complété avec ce qu'on connait déjà.

$\nearrow\ -$	3	2	1	0	−1	−2	−3
3	0	1	2	3			
2	−1	0	1	2			
1	−2	−1	0	1			
0	−3	−2	−1	0			
−1	−4	−3	−2	−1			
−2	−5	−4	−3	−2			
−3	−6	−5	−4	−3			

Quand on se déplace vers la droite dans le tableau, comme on enlève de moins en moins, les résultats sont de plus en plus grands. Par contre, quand on se déplace vers le bas, cela correspond à choisir un point de départ de plus en plus petit et donc les résultats sont de plus en plus petits. En d'autres termes, dans chaque ligne, on augmente de 1 pour un déplacement d'une colonne vers la droite. Par ailleurs, dans chaque colonne, on diminue de 1 pour un déplacement d'une ligne vers le bas. On complète alors le tableau en tenant compte de ces régularités.

$\nearrow\ -$	3	2	1	0	−1	−2	−3
3	0	1	2	3	4	5	6
2	−1	0	1	2	3	4	5
1	−2	−1	0	1	2	3	4
0	−3	−2	−1	0	1	2	3
−1	−4	−3	−2	−1	0	1	2
−2	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
−3	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0

Dans le tableau, on voit que

$$\begin{aligned} 3-(-1) &= 4, \\ 2-(-3) &= 5, \\ (-3)-(-3) &= 0. \end{aligned}$$

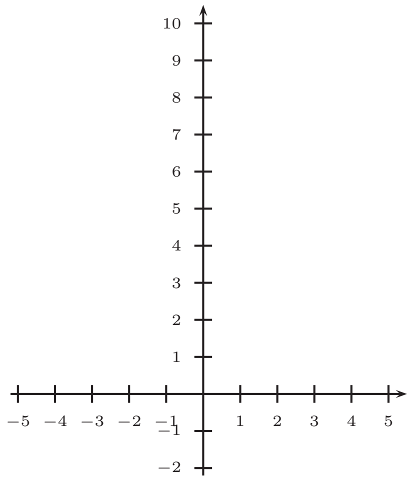
b) Dans le tableau, on observe que, par exemple, quand on soustrait −1, cela revient à ajouter 1, ou encore que lorsqu'on soustrait −3, cela revient à ajouter 3. En généralisant cette règle, on obtient

$$\begin{aligned} 2-(-9) &= 2+9=11, \\ (-7)-(-10) &= (-7)+10=3. \end{aligned}$$

c) On remarque que soustraire un nombre négatif ne provoque pas une diminution mais bien une augmentation. On peut énoncer que « Soustraire un nombre négatif revient à ajouter son opposé. »

Équation d'une droite

L'approche précédente n'est pas la seule à exploiter la conservation d'une régularité. Une autre approche, un peu moins classique, consiste à travailler à partir d'équations de droites.

> Dans le repère cartésien suivant, tracez tous les points dont les coordonnées $(x;y)$ satisfont l'équation $y = 4 - x$.
>
> 
>
>
> En vous aidant du graphique, déterminez les différences suivantes
>
> $$4 - (-1),$$
>
> $$4 - (-2),$$
>
> $$4 - (-5).$$

Sont accessibles aux élèves les points de coordonnées $(x;y)$ avec x compris entre 0 et 4. Si l'on considère aussi des abscisses et des ordonnées non entières, ces points-là constituent un segment. Les points d'abscisse x supérieure à 4 ne posent pas non plus de problème et se situent sur une demi-droite qui prolonge le segment déjà obtenu.

On s'interroge alors sur d'autres points possibles à la gauche de $(0;4)$ et on prolonge en une droite la demi-droite déjà dessinée. Les points de coordonnées telles que $(-1;5), (-2;6)$ et d'autres, à coordonnées éventuellement non entières, appartiennent à cette droite. Ce serait alors souhaitable que ces coordonnées vérifient l'équation $y = 4 - x$. On pose donc que $4 - (-1) = 5$, que $4 - (-2) = 6$, etc.

De façon générale, se déplacer de n unités vers la gauche (x diminue de n) revient à un déplacement de n unités vers le haut (y augmente de n). Finalement $4 - (-n) = 4 + n$.

Commentaire

Cette approche permet de visualiser la régularité voulue, et aussi de travailler avec des nombres non entiers, ce qui ne se fait pas souvent. Le désavantage est de ne pouvoir exploiter qu'une droite à la fois, contrairement à ce que l'on fait dans le tableau à double entrée.

Dans les deux approches présentées ci-dessus (*Conservation d'une régularité* et *Équation d'une droite*), la soustraction doit respecter les régularités qu'elle présentait dans le domaine des nombres positifs. On calcule sur ces nombres, « comme » on le faisait avec les positifs. Et c'est ce « comme » que l'on doit préciser. Ce faisant on n'est pas obligé de s'interroger sur la signification de l'opération dans le domaine étendu des nombres relatifs. L'opération reste abstraite tout comme les nombres négatifs.

Avoirs et dettes

L'activité suivante suppose une découverte des entiers et de l'addition d'entiers dans le contexte des avoirs et des dettes. Voici, en bref, quel pourrait être le début de l'histoire.

> Dans la classe de ma grand-mère, l'institutrice distribuait des bons points, verts, que l'on accumulait. Mais il existait aussi des mauvais points, rouges. Recevoir un mauvais point revenait à en perdre un bon. Par exemple, recevoir 6 bons points et 2 mauvais revenait à ne recevoir que 4 bons points. On peut noter cela de la façon suivante :
>
> $$6 + (-2) = 4.$$
>
> Certains accumulaient plus de mauvais points. De même, 6 mauvais points et 2 bons équivalaient à 4 mauvais points. On peut écrire
>
> $$(-6) + 2 = -4.$$

Dans ce contexte ou dans celui des mouvements sur un compte, on peut poursuivre le travail comme suit, pour aborder le retrait d'un nombre négatif.

a) Un mercredi, Marie avait 5 points verts et sa copine Julia 3 points rouges. Toutes les deux ont alors aidé la femme de ménage à nettoyer la classe. En récompense, l'institutrice a donné 2 points verts à Marie et elle a demandé à Julia si elle préférait recevoir 2 points verts ou perdre 2 points rouges.
Réponds à la place de Julia. Combien chacune a-t-elle de points après cette opération ? Écris les calculs correspondants.

b) Julien et Orian sont frères. Julien est économe et possède 16 euros dans sa tirelire. Par contre Orian est dépensier et de plus il a cassé un vase qu'il doit rembourser. En tout, il a une dette de 8 euros qu'il doit rembourser à son papa. Un jour, les deux frères lavent la voiture de leur papa et ce dernier va les récompenser. Le papa donne 3 euros à Julien et il dit à Orian : « Je diminue ta dette de 3 euros. » Orian n'est pas content, il préférerait recevoir 3 euros.
Crois-tu que le papa est injuste ? Quel sera l'état des finances de chacun des frères après l'intervention du papa ? Écris les calculs correspondants.

a) Marie a 7 bons points car $5+2=7$. Quant à Julia, si elle reçoit 2 points verts, comme un bon annule un mauvais, il lui restera 1 point rouge. On peut écrire

$$(-3)+(+2)=(-1).$$

Si on lui retire 2 points rouges, il lui en restera 1. On peut écrire :

$$(-3)-(-2)=(-1).$$

Les deux actions sont donc équivalentes : retirer (-2) revient à ajouter $(+2)$.

b) Julien, après l'intervention du papa, a 19 euros car $16+3=19$. Quant à Orian, sa dette est, au départ, de 8 euros. À la banque, on dirait que son compte est en négatif. Nous dirons donc qu'il a (-8) euros. Son papa lui retire une dette de 3 euros. On dira qu'il lui retire (-3) euros.
Récapitulons. Orian avait une dette de 8 euros, son papa retire une partie de cette dette, il lui retire une dette de 3 euros. Il reste à Orian une dette de 5 euros car une dette de 8 euros - une dette de 3 euros = une dette de 5 euros. En d'autres termes, on dira qu'il lui reste (-5) euros. On peut écrire l'égalité $(-8)-(-3)=(-5)$. En conclusion, Orian est plus riche après l'intervention du papa, car sa dette est plus petite qu'avant. Sa dette était de 8 euros et elle est à présent de 5 euros. Si, au lieu de ça, son papa lui avait donné 3 euros, il aurait dû avec cet argent rembourser une partie de sa dette. Quand on retire une dette de 3 euros, cela revient à donner 3 euros. Autrement dit, retirer (-3) revient à ajouter $+3$.

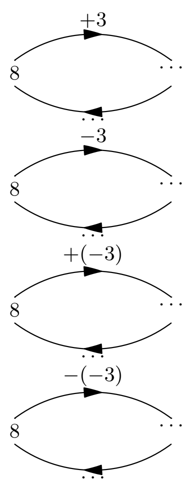
Commentaire historique

Les Chinois, au 1er siècle après J.-C., utilisaient déjà des nombres négatifs pour lesquels ils avaient établi les règles de calcul. Sur leur table de calcul, ils représentaient les positifs et les négatifs par des baguettes différentes quant à la couleur (noire pour les quantités négatives et rouge pour les positives), à la forme ou à la position [3]. Cependant, ces nombres n'étaient que des auxiliaires de calcul et n'avaient pas de signification intrinsèque. On ne les retrouve ni dans les énoncés de problèmes, ni dans les réponses.

En Europe, Nicolas Chuquet (1445 - 1487) utilise en 1484 des nombres négatifs et leur donne un sens, celui des dettes [3]. Mais ses idées, rassemblées dans deux manuscrits, furent peu diffusées et eurent peu d'influence.

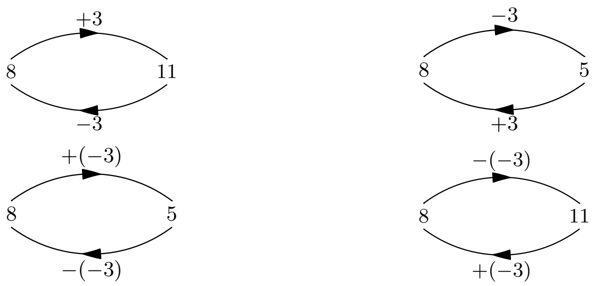
Opérateur réciproque

a) Complète les schémas fléchés suivants.



b) Écris les expressions correspondant à ces différents schémas.
c) Quelles sont les expressions qui donnent le même résultat ? Pourquoi ?

a) Voici les schémas complétés.



b) $8 + 3 = 11$ et réciproquement $11 - 3 = 8$;
$8 - 3 = 5$ et réciproquement $5 + 3 = 8$;
$8 + (-3) = 5$ et réciproquement $5 - (-3) = 8$;
$8 - (-3) = 11$ et réciproquement $11 + (-3) = 8$.

c) Les expressions $8 - 3$ et $8 + (-3)$ donnent la même réponse car les opérateurs -3 et $+(-3)$ sont équivalents.
Ensuite, comme ces opérateurs sont équivalents, leurs opérateurs réciproques $+3$ et $-(-3)$ le sont également, et donc $8 + 3$ et $8 - (-3)$ donnent la même réponse.

Déplacements sur la droite des nombres

On peut, comme envisagé dans la première partie de cet article ([1], p. 7), représenter les calculs de la section précédente par des mouvements sur la droite des nombres.

Les Égyptiens de l'Antiquité représentaient l'addition par une paire de jambes marchant dans le sens de l'écriture et la soustraction par une paire de jambes tournées dans le sens opposé.

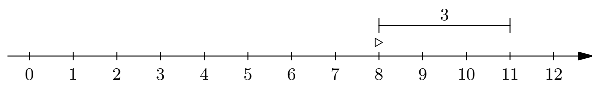
Dans l'activité suivante, nous partons de cette notation (1) pour interpréter les opérateurs additifs et soustractifs comme des mouvements sur la droite des nombres.

Par ailleurs, Albert Girard (1595–1632), élève de Simon Stevin, « est le premier à donner une interprétation géométrique des négatifs : “la solution par moins s'explique en géométrie en rétrogradant, et le moins recule là où le plus avance” » [3].

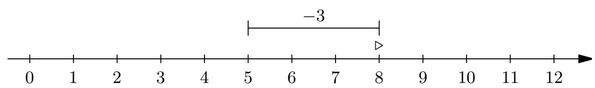
(1) Idée de Laure Collard [7].

Nous exploitons cette représentation de la soustraction et cette interprétation des négatifs dans l'activité suivante.

Nous écrivons de gauche à droite et représentons la droite des nombres dans le même sens : on la parcourt de gauche à droite dans l'ordre croissant. Représentons alors l'addition par le symbole $\triangleright$ et la soustraction par $\triangleleft$.
Ainsi pour effectuer $8+3$, on pense $8\triangleright 3$. Autrement dit,
– on se place au nombre 8 (premier terme),
– on se tourne vers la droite ($\triangleright$),
– et on avance de 3 (deuxième terme),
– on se trouve alors en 11 (résultat).



Pour effectuer $8 + (-3)$, on pense $8 \triangleright (-3)$. Autrement dit,
– on se place au nombre 8 (premier terme),
– on se tourne vers la droite ($\triangleright$),
– et on avance de (-3) (deuxième terme), c'est-à-dire que l'on *recule* de 3,
– on se trouve alors en 5 (résultat).



a) De la même façon, essaie d'interpréter $8 - 3$, que l'on peut noter $8 \triangleleft 3$, et $8 - (-3)$, que l'on peut noter $8 \triangleleft (-3)$.

b) Fais de même pour calculer

$$(-2) + (-5),$$

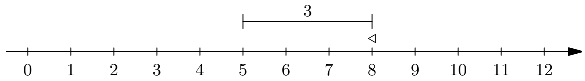
$$3 + (-5),$$

$$(-10) - (-5),$$

$$10 - (-5).$$

D'une façon générale, que faut-il faire pour ajouter (-5) ? Et pour soustraire (-5) ?

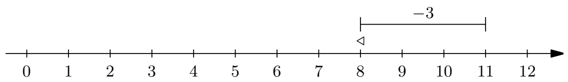
a) Pour visualiser $8 + (-3)$, on s'est tourné vers la droite et on a reculé de 3 (on a « fait » $8 \triangleright (-3)$). Pour effectuer $8 - 3$, on se tourne vers la gauche et on avance de 3 (on a « fait » $8 \triangleleft 3$)).



Les deux actions mènent au même point d'arrivée, 5. Donc

$$8 + (-3) = 8 - 3.$$

Pour visualiser $8 - (-3)$, on part de 8, on se tourne vers la gauche et on recule de 3 (on « fait » $8 \triangleleft (-3)$).



On arrive alors au même endroit que si on avait avancé de 3 en se tournant vers la droite ($8 \triangleright 3$), c'est-à-dire en $8 + 3$. On a donc

$$8 - (-3) = 8 + 3.$$

b) Ces calculs peuvent s'effectuer en appliquant le même raisonnement.

D'une façon générale, soustraire un nombre revient à ajouter son opposé.

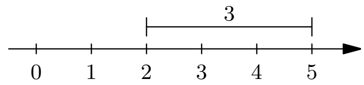
Distance

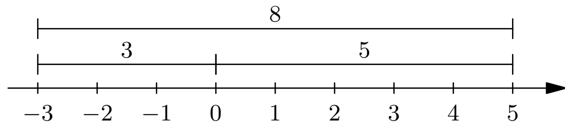
a) Représente la différence $5 - 2$ par une distance sur la droite des nombres. De la même manière, représente le calcul $5 - (-3)$ sur la droite des nombres et trouve le résultat.

b) Effectue aussi (sans plus dessiner systématiquement) les calculs suivants :
$50 - (-12) =$
$5 - 5 =$
$(-51) - (-51) =$

c) Lorsque l'on soustrait un nombre d'un autre plus petit, comme dans $2 - 5$ par exemple, on dit que la différence est négative : $2 - 5 = -3$. Calcule
$(-5) - (-3) =$
$(-7) - (-12) =$
$(-5) - 3 =$
$(-10) - 30 =$
$(-30) - 10 =$
$10 - (-30) =$

a) Voici, sur la droite des nombres, les distances correspondant aux différences $5 - 2$ et $5 - (-3)$. On obtient $5 - 2 = 3$ et $5 - (-3) = 8$.





b) Le calcul $50 - (-12)$ représente la distance entre 50 et -12 sur la droite des nombres. Ces deux nombres se trouvant de part et d'autre du 0, il faut additionner la distance entre 50 et 0 et la distance entre 0 et -12 pour obtenir la distance entre 50 et -12. Donc

$$50 - (-12) = 50 + 12 = 62.$$

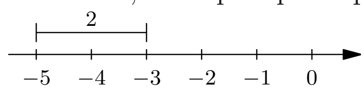
Le calcul $5 - 5$ représente la distance entre 5 et 5 sur la droite des nombres. Cette distance est nulle. Donc

$$5 - 5 = 0.$$

De la même manière, $(-51) - (-51)$ représente la distance, nulle, entre -51 et lui-même. Donc

$$(-51) - (-51) = 0.$$

c) Le nombre -5 est situé avant -3 sur la droite des nombres ; il est plus petit que lui.



Leur différence sera donc négative. Or, la distance entre -3 et -5 sur la droite des nombres est 2. Donc, la différence $(-5) - (-3)$ est égale à -2, c'est-à-dire

$$(-5) - (-3) = -2.$$

Le nombre -7 est plus grand que -12 car il est situé à droite de -12 sur la droite des nombres. La différence $(-7) - (-12)$ est donc égale à la distance entre -7 et -12 sur la droite des nombres c'est-à-dire 5. Donc

$$(-7) - (-12) = 5.$$

Le nombre -5 est avant 3 sur la droite des nombres et est donc plus petit que 3. Leur différence sera donc négative et vaudra -8, puisque la distance entre eux est de 8. Donc

$$(-5) - 3 = -8.$$

Pour la même raison que ci-dessus,

$$(-10) - 30 = -40$$

et
$$(-30) - 10 = -40.$$

Pour le dernier calcul, 10 est plus grand que -30, donc $10-(-30)$ représente la distance entre eux sur la droite des nombres. Comme ces deux nombres sont situés de part et d'autre de 0 sur la droite des nombres, cette distance est égale à la somme de leurs distances respectives à 0. Donc
$$10 - (-30) = 10 + 30 = 40.$$

Commentaire

Il est difficile d'unifier ces différents cas pour construire la règle de soustraction dans $\mathbb{Z}$ avec les élèves. Nous y reviendrons dans la partie méthodologique.

Questions méthodologiques

Afin de cerner les apports de chaque approche, nous vous invitons à réfléchir aux questions suivantes pour chacune d'elles.

a) Quel sens a la soustraction ou l'opérateur soustractif ? Ce sens est-il conservé lors de la soustraction d'un nombre négatif ? Sur quelle interprétation des nombres négatifs s'appuie-t-on ?

b) À quel point la situation permet-elle de se persuader de la « règle » « soustraire un nombre revient à ajouter son opposé » ? À quel point le contexte peut-il être évoqué pour recomprendre cette règle quand on l'a oubliée ?

Nous proposons ci-dessous quelques pistes de réponses à ces questions.

Conservation d'une régularité

a) Tout en remplissant le tableau, on généralise les règles de calcul à l'ensemble $\mathbb{Z}$ de manière à conserver les régularités et les propriétés observées dans $\mathbb{N}$. La soustraction dans $\mathbb{N}$ peut ici être interprétée comme un recul sur la droite des nombres ou comme un reste dans le domaine des avoirs et des dettes. Ce sens est conservé dans le cas du retrait d'un nombre positif dans $\mathbb{Z}$ mais il n'est pas conservé pour le retrait d'un nombre négatif, par exemple pour $8 - (-3)$. On n'essaie pas d'interpréter ce calcul, mais la régularité observée dans le tableau nous impose de le considérer comme égal à $8 + 3$, soit 11.
Cette approche illustre bien que les nombres négatifs forment une extension de $\mathbb{N}$; ils sont nécessaires pour donner un résultat à certains calculs (tels $5 - 8$) impossibles sans eux. Dans le premier remplissage du tableau, ils apparaissent lorsqu'on enlève plus que ce qu'on a (faire $a - b$ lorsque $b > a$). Rien n'empêche de donner une interprétation aux nombres entiers, mais dans cette approche, on ne s'appuie pas sur celle-ci. Ce sont des nombres et nous pouvons donc, comme pour les positifs, chercher à les additionner ou les soustraire.

b) La règle peut être élaborée par l'observation du tableau. Elle s'impose, sous peine de rompre la régularité observée.
Ce contexte de tableau prolongé dans les deux sens permet vraiment de se convaincre que « ça doit marcher comme cela », mais peut toutefois difficilement être évoqué rapidement en cas de besoin. Son intérêt se situe surtout dans les questions et commentaires assez riches qu'il suscite lors d'une première analyse.

Équation d'une droite

a) Avec les équations de droites, comme dans l'approche précédente, on définit la soustraction dans le domaine des nombres relatifs pour qu'elle prolonge le plus régulièrement possible l'opération dans celui des positifs. Les nombres servent à repérer des points sur une droite ou dans un plan. Il n'est pas nécessaire d'interpréter concrètement la soustraction. L'opération reste abstraite tout comme les nombres négatifs.

b) La règle peut être élaborée facilement par l'observation de la droite. Elle découle du souhait de garder une seule équation simple que vérifient les coordonnées, même négatives, de tous les points d'une droite.
Ce contexte peut toutefois difficilement être évoqué rapidement en cas de besoin. L'intérêt de cette approche par rapport à la précédente réside dans le fait qu'elle permet de visualiser la régularité voulue, et aussi de travailler avec des nombres non entiers, ce qui ne se fait pas souvent. Par ailleurs, on rencontre les négatifs dans un contexte où ils servent réellement. Un désa-

vantage est de ne pouvoir exploiter qu'une droite à la fois, contrairement à ce que l'on fait dans le tableau à double entrée de l'activité précédente. Par ailleurs, il faut probablement guider davantage les élèves dans cette approche-ci.

Avoirs et dettes

a) Dans le contexte des avoirs et des dettes, la soustraction a le sens du *reste* : on *enlève* une certaine grandeur d'une autre et on se demande ce qu'il reste de la première.

On prend en considération des grandeurs intrinsèquement négatives : dettes, mauvais points. Ainsi, le nombre négatif a un sens en lui-même, tout en étant lié au nombre positif correspondant : une dette de 5 et un avoir de 5 sont opposés (leur somme est nulle).

b) Retirer une dette, c'est donner le montant correspondant ; retirer un mauvais point revient à donner un bon point. La règle prend ici tout son sens et ce contexte peut être évoqué facilement en cas de nécessité... du moins si le premier terme est négatif et de valeur absolue plus grande que le second, comme dans $(-8) - (-3)$. On peut alors retirer une partie de la dette. Mais comment faire dans un cas comme $8 - (-3)$? Comment enlever une dette que l'on n'a pas ? L'interprétation qu'il faut créer pour s'en sortir est assez artificielle : posséder 8 euros revient à posséder un avoir de $8 + 3$ euros et une dette de 3 euros ; si on enlève la dette de 3 euros, on aura alors $8 + 3$ euros, donc $8 - (-3) = 8 + 3$.

Opérateur réciproque

a) Dans cette approche des graphes fléchés, la soustraction garde un des sens qu'elle avait dans $\mathbb{N}$: l'opération réciproque de l'addition.

Aucune interprétation concrète particulière des négatifs n'est exploitée ici. L'attention se porte sur la transformation, *l'opérateur soustractif* : par l'opérateur $-(-3)$, on transforme 5 en 8.

Notons que les différents éléments du calcul n'ont pas ici le même statut : le premier terme de la différence est un point de départ, le deuxième terme associé à l'opération forme l'opérateur et le résultat est un point d'arrivée.

b) La règle n'est pas directe, mais on peut en être assez facilement convaincu : $-(-3)$ est l'opérateur réciproque de $+(-3)$, qui lui équivaut à -3, lui-même opérateur réciproque de $+3$; par transitivité $-(-3)$ équivaut à $+3$.

En cas d'oubli de la règle, un exemple de schéma fléché permet de la retrouver facilement. Comme un tel schéma reste abstrait, il permet d'expliquer ou de comprendre tous les types de soustractions numériques, quelles que soient les valeurs des termes.

Déplacements sur la droite des nombres

a) Lors des déplacements sur la droite des nombres le sens de la soustraction reste assez proche de ce qu'il était dans $\mathbb{N}$ quoique ces conventions (se tourner vers ... si ..., reculer ou avancer si ...) puissent paraître assez arbitraires. Notons que les deux termes de la soustraction n'ont pas ici le même statut : le premier terme sert à désigner une position sur la droite et le deuxième, associé à l'opération, forme un opérateur interprété comme un mouvement.

b) Cette situation permet d'établir rapidement la règle. Même si les nombres et la soustraction n'ont ici une interprétation que dans le domaine des mathématiques, elle a l'avantage d'être assez proche de ce que l'on pourrait faire en physique, dans le domaine des mouvements : deux mobiles vont de A à B ou de B à A, avancent, reculent...

En cas d'oubli de la règle, l'évocation des mouvements permet de la retrouver facilement. À nouveau, ces mouvements permettent d'expliquer ou de comprendre tous les types de soustractions numériques, quelles que soient les valeurs des termes.

Distance

a) La différence $a - b$ garde ici son sens de distance entre les bornes b et a sur la droite des nombres ou de distance à parcourir pour aller de b jusqu'à a, mais le sens du parcours acquiert ici une importance. Lorsqu'en allant de b vers a, on se déplace vers la gauche (c'est-à-dire lorsque $a < b$), la différence est négative : elle est définie comme l'opposé de la distance entre les deux positions. De ce fait, $(8 - 10)$ égale -2, l'opposé de $(10-8)$. Ainsi, la différence de deux entiers apparait comme une addition lacunaire interprétée à l'aide de mouvements sur la droite. Par exemple, pour déterminer combien fait $5-(-3)$, on peut compléter le calcul $(-3)+\ ? \ = 5$ et préciser le mouvement qu'il faut faire pour passer sur la droite des nombres de -3 à 5. Selon que ce mouvement s'effectue vers la droite ou la gauche, le résultat est positif ou négatif.

D'autre part, un nombre négatif n'aura pas le même sens selon qu'il est terme de la soustraction ou résultat de celle-ci. Dans $(-8)-3$, les termes -8 et 3 sont associés à des *positions* sur la droite graduée, tandis que le résultat -11 est associé à un *intervalle* parcouru de droite à gauche en allant de 3 vers -8. Il serait dangereux de parler de « distances négatives » (ce serait contraire à tout ce qui a patiemment été ancré précédemment), mais il faut bien reconnaitre que dans cette approche, l'écart se voit attribuer une dimension supplémentaire : à l'idée de distance, on ajoute celle de mouvement. On se rapproche ici davantage de la notion de vecteur, avec une direction fixée (la droite graduée), mais un sens (flèche vers la gauche ou vers la droite) et une norme (la distance) qui peuvent varier.

Cette approche facilite certains calculs dès qu'on a une représentation de la situation sur la droite des nombres. C'est notamment le cas lorsque les deux termes de la différence se situent de part et d'autre de 0. L'égalité $5-(-3)=5+3$ est accessible mais le calcul $5+3$ correspondant n'est certainement pas interprété comme l'ajout à 5 de l'opposé de -3, mais bien comme la somme des deux valeurs absolues (distances à 0).

Dans un autre cas comme $(-5)-(-2)$, où les deux bornes se situent à gauche de 0, la combinaison des idées de distance (qui est de 3 entre les bornes -2 et -5) et de mouvement (ici vers la gauche, donc négatif) permet de déterminer le résultat ($(-5)-(-2)=-3$) mais, à nouveau, aucune idée d'opposé n'est intervenue dans le calcul. En suivant cette approche, on apprend donc facilement comment déterminer la différence, le résultat a du sens, quelles que soient les valeurs des termes en jeu, mais on n'extrait pas forcément la règle générale.

Complémentarité des approches

Permettre de se convaincre du bien-fondé de la règle, en montrer le sens, faciliter le calcul, voilà trois apports des différentes approches qui ont été pointés au fil des commentaires.

Les méthodes « pour se convaincre » (tableau, équation de droite et schémas fléchés) n'attribuent pas forcément du sens à la soustraction ni aux négatifs. Parfois il s'agit de conserver une propriété, une régularité observée et/ou comprise dans le domaine des naturels et de l'appliquer dans le domaine des négatifs sans se poser le problème du sens et de l'utilité de ce que l'on établit.

Le sens donné à la règle est l'avantage principal de l'approche par avoirs et dettes, même si, comme nous l'avons souligné, elle ne s'applique pas naturellement à tous les calculs.

Certaines méthodes, par contre, permettent d'expliquer tous les types de soustractions numériques, quelles que soient les valeurs des termes (schémas fléchés, mouvements sur la droite des nombres, distances). Très visuelles, elles facilitent les calculs en mettant en avant l'aspect procédural (« pour soustraire deux nombres relatifs, faites comme ceci... »).

Notons pour terminer que, de toutes les approches proposées, seule celle par équation de droite se retrouve maintes fois dans le cursus mathématiques des élèves. Nous revenons sur la question de l'utilité des différentes approches à la section 1.

Statut de la règle

La règle « soustraire un nombre revient à ajouter son opposé » est-elle une propriété ou une définition ? Les argumentations données à travers les diverses activités pourraient faire croire que l'on a démontré cette règle. Il n'en est rien. Ces argumentations constituent seulement des motivations à ce qui est en fait une définition de la soustraction dans le domaine élargi des nombres relatifs. Il n'empêche que cette motivation est nécessaire dans la mesure où l'opération soustractive est déjà connue des élèves dans l'ensemble des nombres positifs. Il est important de respecter les intuitions mises en place dans ce domaine et d'introduire cette opération comme un prolongement de celle qu'ils connaissent déjà.

Mais il serait intéressant que le statut de cette règle soit clarifié auprès des élèves : c'est comme cela qu'il faut *définir* la soustraction si l'on veut garder le plus possible de propriétés déjà établies et d'intuitions utiles. Même s'ils n'ont pas à ce stade une vision globale du système des nombres, ils pourraient ainsi faire petit à petit la distinction entre observations, définitions et propositions à démontrer.

Pour un mathématicien, le problème n'est pas le même. On définit la soustraction à partir de l'addition, en s'appuyant sur les propriétés de cette dernière qui font partie de la définition de l'ensemble des entiers, $\mathbb{Z}$, ou des réels, $\mathbb{R}$, munis (notamment) de l'addition. L'addition dans $\mathbb{Z}$ ou dans $\mathbb{R}$ est *symétrisable*, ce qui garantit pour chaque nombre réel b l'existence d'un unique opposé noté $-b$ et, de là, on définit la soustraction : $a - b = a + (-b)$. Cela dispense d'argumenter sur la règle énoncée ci-dessus puisqu'elle fait clairement partie de la définition de la soustraction.

Mais il s'agit là de mathématiques achevées. Il est clair que la soustraction n'est pas née avec la définition axiomatique de $\mathbb{R}$. Les hommes, et pas seulement les mathématiciens, l'ont établie peu à peu à l'aide d'intuitions, stimulés par des problèmes pratiques ou théoriques, la mise au point axiomatique ne venant qu'à la toute fin. Par ailleurs, les intuitions existent évidemment toujours dans l'esprit du mathématicien et sont indispensables, mais n'ont pas valeur d'argument dans les démonstrations.

Remarquons encore que, dans le quotidien, on fait rarement $8 - (-3)$. C'est un calcul abstrait qui est utile en maths, notamment pour les équations de droite, la résolution d'équations et, plus tard, en physique et dans d'autres sciences. C'est seulement par une nécessité théorique que l'on se pose la question de ce prolongement de la soustraction, parce que, sans une réponse à cette question, nous ne pourrions résoudre certains problèmes. Lesquels ? La question n'est pas anodine dans une perspective de construction du savoir, lorsqu'on souhaite introduire une notion nouvelle au moment où elle est nécessaire. Nous y revenons à la section 1.

Prolongement en algèbre

La règle ou plutôt la définition qui a émergé des différentes approches trouve en algèbre son expression générale : $a-b = a+(-b)$. Cette égalité lie deux des trois interprétations possibles du signe « moins » en algèbre. Ce symbole est, dans l'ordre d'apparition dans l'enseignement, celui de la soustraction (opération binaire), celui du signe intrinsèque d'un nombre (négatif) et enfin celui qui permet de noter l'opposé d'un nombre (opération unaire). L'expression $-a$ désigne de manière générale l'opposé de a, et comprendre que cette expression peut prendre une valeur positive est crucial et parfois difficile pour les élèves.

Dans ce contexte algébrique où on ne sait pas si une lettre représente un nombre positif ou négatif, les interprétations présentées sont-elles encore utiles ? Par exemple, on écrit $a - (-3b) = a + 3b$ sans savoir si a et b représentent un avoir ou une dette et sans recourir à une visualisation sur la droite des nombres. En effet, quelle que soit la valeur de b, $3b$ est bien l'opposé de $-3b$, et la définition s'applique. Dans ce cas, le ou les sens de la soustraction et les contextes dans lesquels nous avons établi la définition de la soustraction dans les relatifs peuvent-ils encore servir en algèbre ?

N'oublions pas que les lettres à ce stade de l'apprentissage représentent toujours des nombres. En cas de doute sur la pertinence d'une transformation algébrique, on peut revenir à un exemple simple (par exemple avec des nombres positifs d'abord) pour se persuader. Le sens peut alors s'exercer.

En outre, certaines difficultés fréquemment rencontrées par les élèves pourraient être mieux surmontées en revenant aux modèles évoqués. Par exemple, comprendre que $(a-b)$ est l'opposé de $(b-a)$ est facilement accessible via la représentation de la soustraction comme distance (munie d'un signe). Ou encore, pour se convaincre de l'égalité $a - (b + c) = a - b - c$, on pourra toujours refaire le lien avec les schémas fléchés. Sans forcément les réévoquer à chaque calcul, il peut donc être utile d'avoir les différentes interprétations « à portée de la main », pour soutenir l'acquisition des procédures et faciliter certains calculs.

Terminons en revenant sur l'égalité étudiée dans la première partie de l'article : $a-(b-c) = a-b+c$. On pourrait l'établir en algèbre de la façon suivante :

$$\begin{aligned} a - (b - c) &= a - (b + (-c)) \\ &= a - b - (-c) \\ &= a - b + c. \end{aligned}$$

On applique ainsi d'une part la propriété $a - b = a + (-b)$ (deux fois), d'autre part l'égalité $a - (b + c) = a - b - c$ dont on peut se convaincre plus facilement... du moins si l'on attribue à a, b et c des valeurs positives. Sous sa simplicité apparente, cette justification utilise donc elle aussi une extension aux entiers d'une propriété découverte dans l'ensemble des naturels. Ce genre de raccourci peut être source de difficultés pour les élèves ; il est bon d'en être conscient.

En guise de conclusion...

Nous nous sommes centrés dans cette deuxième partie sur l'introduction de la soustraction dans $\mathbb{Z}$ en supposant que le travail de découverte des nombres entiers, et donc des nombres négatifs, avait été fait préalablement. Nous souhaitons conclure ici par quelques repères concernant l'introduction des nombres négatifs dans l'histoire des mathématiques, une nouvelle approche qui s'en inspire, puis par quelques questions concernant leur utilité.

Dans les classes, les nombres négatifs sont souvent introduits à l'aide de deux contextes qui semblent actuellement bien naturels, à savoir celui du thermomètre ou celui des avoirs et des dettes. Historiquement, les premiers thermomètres gradués datent du 17e et du 18e siècles, mais il a fallu du temps pour que les gens s'habituent aux températures sous zéro. Fahrenheit conçoit d'ailleurs au début du 18e une graduation qui évite les températures négatives [2]. Par ailleurs, bien que Chuquet utilise et donne déjà un sens aux nombres négatifs dans le contexte des avoirs et des dettes en 1484, nous avons mentionné plus haut que ses travaux eurent peu d'influence.

C'est en effet dans le contexte de la résolution d'équations que les négatifs seront vraiment pris en considération. En Europe, après CHUQUET, Jérôme CARDAN (1501–1576) donne une formule, trouvée par Scipion DEL FERRO (1465–1526), pour résoudre des équations cubiques. Celle-ci permet de déterminer des solutions réelles positives par des calculs sur les nombres négatifs et leurs racines carrées.

Bien souvent, notamment chez François VIÈTE (1540–1603), les seules solutions d'équations que l'on prend en considération sont toutes positives, les nombres négatifs se présentant plus comme un outil que comme une quantité à interpréter.

Simon STEVIN (1548–1620) en 1585 accepte, lui, les nombres négatifs, notamment comme solutions des équations, ce qui lui permet d'homogénéiser la forme des équations et leur résolution [3].

Mais au 19e siècle encore, les solutions négatives « posent des problèmes aux mathématiciens, car il faut les interpréter » [2] et on considère parfois « qu'elles n'ont aucun sens par elles-mêmes » [2].

Pourtant en 1831, le mathématicien britannique Auguste DE MORGAN (1806–1871) propose un problème d'âge où il tente d'interpréter les nombres négatifs. Ce problème pourrait servir à introduire ces nombres.

Voici le début ([2]) de son texte.

> *Un père a 56 ans et son petit-fils (sic) en a 29. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le double de celui de son fils ?*
>
> *Soit x le nombre d'années.*
>
> Écrivez l'équation permettant de résoudre ce problème et résolvez-la.

L'équation est

$$56 + x = 2 \cdot (29 + x),$$

qui peut se résoudre en distribuant le facteur 2, puis en soustrayant aux deux membres de l'égalité 56 et x. On obtient successivement

$$56 + x = 58 + 2x,$$

$$x = 2 + 2x,$$

et

$$0 = 2 + x.$$

Voici la suite du texte de DE MORGAN.

x vérifie $56+x = 2\cdot(29+x)$. Nous trouvons $x = -2$. Ce résultat est absurde mais si nous changeons x en $-x$ et si nous résolvons $56 - x = 2 \cdot (29 - x)$, nous trouvons $x = 2$.

On pourrait donc interpréter la solution $x = -2$ par « c'est arrivé il y a deux ans ». On se représente une droite du temps où les valeurs négatives désignent des moments passés.

En substituant la valeur -2 à x dans l'équation, on trouve

$$56 + (-2) = 2 \cdot (29 + (-2)),$$

où $56 + (-2)$ et $29 + (-2)$ désignent les âges des deux hommes deux ans auparavant. On a donc

$$56 + (-2) = 56 - 2.$$

([2]) Extrait de A. BOYÉ [2].

Les nombres négatifs et les opérations (ici la soustraction et la multiplication) apparaissent ici en même temps dans un contexte où ils sont habituellement utiles : les équations. Dans la résolution de l'équation, on a appliqué les techniques et propriétés habituelles (la distributivité par exemple), celles qui sont valables dans le domaine des nombres positifs. Pour que ces propriétés restent valables dans ce nouveau système de nombres, on doit définir l'ajout d'un négatif comme le retrait de son opposé.

On pourrait aussi exploiter ce type de situation pour introduire la soustraction.

« Antoine a 23 ans, son père 51. Quand le père a-t-il eu le double de l'âge de son fils ? »
Pose x le nombre d'années passées depuis, écris l'équation utile et résous-la.

Il y a x années, Antoine avait $23-x$ ans et son père $51-x$ ans. Le père ayant à ce moment le double de l'âge de son fils , on peut écrire

$$51 - x = 2 \cdot (23 - x),$$

équation que l'on peut transformer en

$$\begin{aligned} 51 - x &= 46 - 2x, \\ 51 &= 46 - x, \end{aligned}$$

ou encore

$$51 + x = 46.$$

Or, $46 = 51 - 5$. Cela voudrait dire que cela s'est passé il y a -5 ans, c'est-à-dire que cela se passera dans 5 ans. On a mal posé le problème. On aurait dû se demander « Dans combien de temps le père aura-t-il le double de l'âge de son fils ? ».

Mais vérifions la solution en l'injectant dans l'équation. On trouve

$$51 - (-5) = 2 \cdot (23 - (-5)).$$

La différence $51-(-5)$ est l'âge du père dans 5 ans, c'est-à-dire $51+5$ ans.

À nouveau, dans la résolution de l'équation, on a appliqué les techniques et propriétés habituelles. Si l'on veut pouvoir faire cela, il faudra définir la soustraction dans le domaine des relatifs de telle façon que

$$51 - (-5) = 51 + 5.$$

Ce type de problèmes constitue-t-il une bonne approche pour les entiers et les opérations dans ce domaine ? Les élèves de première année ne sont pas très habitués aux équations. En fait, on pourrait se demander à quoi servent les opérations sur les négatifs en première. Faut-il qu'ils s'y habituent avant d'en avoir besoin ou peut-on les introduire au moment où on en a besoin, surtout dans le domaine de la résolution d'équations et des équations de courbes ?

Le seul contexte où les entiers sont utiles en première année est celui du repérage. Ne faudrait-il pas alors proposer, dans ce domaine, des activités où on utilise les opérations ? On peut penser à des calculs de distances (pour la soustraction), de coordonnées d'un point milieu (pour la soustraction ou l'addition), de transformations du plan ou d'équations de droites.

Finalement parmi toutes les approches proposées dans cet article, peu présentent un contexte qui sera réutilisé dans la suite des mathématiques (et encore moins dans la vie courante), et souvent ceux-là ne montrent pas un sens concret de la soustraction. Faut-il ici jeter l'éponge de la construction du savoir et admettre que si l'on veut montrer le (un) sens de ce que l'on fait, il faut renoncer à des situations où ce savoir est vraiment utile ? Ou faut-il privilégier ces approches où les relatifs et l'extension des opérations dans ce domaine répondent à un besoin, quitte à se situer à un niveau d'abstraction relativement élevé pour des élèves de 12 ans ?

Quels que soient les choix qui en résultent pour les élèves, le travail minutieux de clarification de nos propres représentations et méthodes est un travail préalable à tout choix didactique.

Remerciements

Le travail de réflexion à la base de cet article a été effectué dans le sous-groupe 10-15 du Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM). Nous remercions chaleureusement les autres membres de notre sous-groupe, Chrys Fluyt, Sophie Loriaux, Julie Saelen et André Wauters, qui ont participé à la réflexion, élaboré avec nous certaines pistes proposées et en ont expérimenté certaines. Nous remercions également Mélanie Havaux pour sa relecture attentive de ce texte.

Pour en savoir plus

[1] I. Berlanger, G. Cuisinier, Th. Gilbert, L. Ninove, *Quelques difficultés liées à la soustraction, Partie 1*, Losanges n°19.

[2] A. Boyé, *Quelques éléments d'histoire des nombres négatifs*, site de l'APMEP, 2011. `http://www.apmep.asso.fr/Quelques-elements-d-histoire-des`

[3] IREM de Poitiers, *Les nombres relatifs au collège*, Septembre 1996.

[4] Fr. Lucas, L. Balleux, C. Goossens, *Math & Sens, Mobiliser les opérations avec bon sens !*, De Boeck, 2008.

[5] N. Rouche *et al.*, *Du quotidien aux mathématiques, Nombres, Grandeurs, Proportions*, Ellipses, Paris, 2006.

[6] O. Bassis, *Concepts clés et situations-problèmes en mathématiques*, Hachette Education, Paris, 2003.

[7] L. Collard, *Pourquoi l'algèbre ?, Quelques aspects historiques et méthodologiques*, Travail de fin d'études réalisé sous la direction de Thérèse Gilbert, Haute École Galilée, Bruxelles, Juin 2010.

[8] FESeC, *Guide méthodologique, Mathématiques, 1er degré*, D/2001/7362/3081, 2001.

[9] FESeC, *Programme, Mathématiques, 1er degré commun*, D/2010/7362/3/08, 2010.

[10] Ministère de la Communauté Française, *Programme d'études du cours de mathématiques, 1er degré commun*, 10/2000/240, 2000.

Isabelle Berlanger est maître-assistante à l'Institut Supérieur de Pédagogie Galilée, isabelle.berlanger@galilee.be ; Ginette Cuisinier était enseignante dans le secondaire supérieur, ginette.cuisinier@scarlet.be ; Thérèse Gilbert est maître-assistante à l'Institut Supérieur de Pédagogie Galilée, therese.gilbert@galilee.be ; Laure Ninove est maître-assistante à l'École normale catholique du Brabant Wallon, Haute École Léonard de Vinci, laure.ninove@gmail.com. Elles sont en outre membres du Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM), Chemin du Cyclotron 2 à B–1348 Louvain-la-Neuve, http://sites.uclouvain.be/gem.

Cherchez l'erreur !

© Marie-France Guissard à la Panne (solution à la page 72)