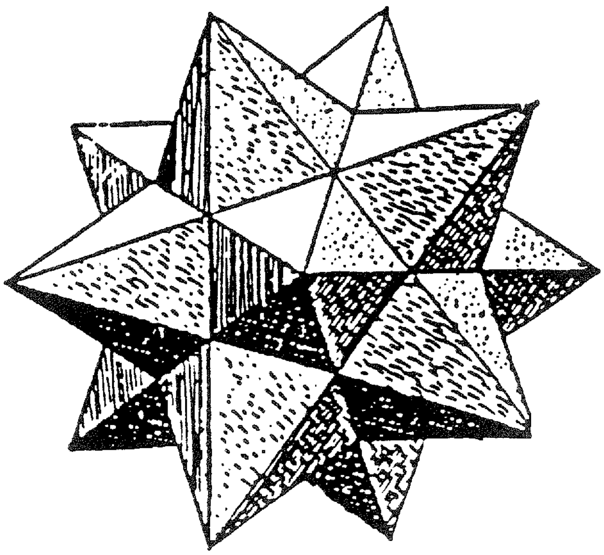
SITUATIONS-PROBLÈMES

POUR LE MATERNEL ET LE PRIMAIRE

N° 2 Septembre 1998

RENCONTRES AVEC LES GRANDEURS



GEM

Groupe d'Enseignement Mathématique

Le Groupe d'Enseignement Mathématique

Depuis la fin des années 1970, le Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM) rassemble des enseignants de tous niveaux, de la maternelle à l'université, ainsi que des étudiants futurs professeurs. Ils se rencontrent à un rythme le plus souvent hebdomadaire, pour étudier de toutes les façons possibles les problèmes liés à l'apprentissage et à l'enseignement des mathématiques. On trouve des relations de leurs travaux dans des articles, des brochures et des livres, des manuels, des mémoires de licence et des thèses de doctorat.

Ils se réunissent le plus souvent par sous-groupes pour étudier un sujet déterminé pendant une année au moins.

Le sous-groupe "Maternel et primaire" dont les membres sont des institutrices maternelles et primaires, des professeurs d'école normale ainsi que des enseignants et chercheurs universitaires, a entrepris de rédiger des brochures sur le thème des grandeurs. Le sujet semble opportun car souvent, dans l'enseignement primaire, l'étude des grandeurs se ramène d'une part à celle du système des poids et mesures, et d'autre part aux formules d'aire et de volume de quelques figures familières. Or les grandeurs, parce qu'elles sous-tendent largement l'apprentissage de la géométrie et des nombres, méritent plus d'attention que cela.

Les brochures de cette série seront de deux types. Certaines relateront et commenteront des expériences d'enseignement. Les autres seront des recueils de situations-problèmes proposées à l'initiative des enseignants. Dans les deux cas, des notes situées dans les marges mettront en évidence les notions de théorie des grandeurs sous-jacentes aux activités proposées. L'abréviation SM renverra à l'ouvrage théorique suivant : Nicolas Rouche, *Le sens de la mesure, Des grandeurs aux nombres rationnels*, Didier Hatier, Bruxelles, 1992. Ce livre est donc le compagnon de ces brochures. Il aidera à les lire de façon approfondie.

La matière de cette brochure a été rassemblée au fil d'une dizaine d'années et par d'assez nombreuses personnes, au point qu'il serait hasardeux aujourd'hui de désigner toutes celles et ceux qui y ont contribué. C'est pourquoi il nous paraît plus simple et peut-être plus honnête d'en attribuer la paternité au sous-groupe primaire du GEM dans son ensemble. Mentionnons toutefois Joseph Stordeur qui, sans faire partir du GEM, a apporté beaucoup de matériaux. Merci à lui.

Chemin du Cyclotron 2, B–1348 Louvain-la-Neuve, Belgique
Tél. : 32–10–47 32 72 Fax. : 32–10–47 25 30
E-mail : HAUCHART@AMM.UCL.AC.BE

Cette brochure est aussi diffusée par le
Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, CREM a.s.b.l.,
Rue Émile Vandervelde 5, B–1400 Nivelles, Belgique
Tél. : 32–67–21 25 27 Fax. : 32–67–21 22 02
E-mail : ROUCHE@AMM.UCL.AC.BE

RENCONTRES AVEC LES GRANDEURS

Comparer et classer des objets
par grandeur,
mesurer
avec ce qu'on a sous la main.

Tables des matières

Deuxième partie : mesurer avec ce qu'on a sous la main

Avant-propos

Les grandeurs sont un chapitre central de l'apprentissage mathématique aux niveaux maternel et primaire. Elles sont importantes en elles-mêmes, mais aussi parce qu'elles sont un des matériaux de la géométrie, et que de plus elles conduisent aux nombres à travers les notions de fraction et de mesure.

Cette brochure rassemble des situations-problèmes sur le thème des grandeurs. L'espoir est qu'elle donne des idées d'activités pour les classes aux enseignants des écoles maternelles et primaires.

Elle est divisée en deux parties. La première traite des comparaisons et classements d'objets considérés du point de vue de diverses grandeurs (longueur, aire, poids, etc.). La seconde aborde le problème de la mesure, mais avec des unités "de rencontre", par opposition aux unités officielles telles que le mètre, le kilogramme, etc.

Les situations-problèmes ne sont pas présentées ci-après dans un ordre adapté à l'enseignement. Elles sont classées par types de grandeur, et ne vont pas nécessairement de la plus facile à la plus difficile. Il arrive entre autres qu'une question très élémentaire conduise naturellement à s'interroger sur une autre qui l'est moins. Il va de soi que chaque enseignant adaptera à ses élèves les questions posées . L'espoir est aussi que ce recueil provoque l'imagination et l'invention de situations inédites.

Quelques-unes des situations-problèmes sont accompagnées d'un bref compte rendu d'une expérimentation en classe. Nous avons situé dans les marges du texte principal des commentaires théoriques et méthodologiques. Ceux-ci renvoient souvent, par la mention "SM", à l'ouvrage de N. Rouche, *Le sens de la mesure, des grandeurs aux nombres rationnels*, Didier-Hatier, Bruxelles, 1992. Le lecteur intéressé trouvera dans cette étude les compléments théoriques utiles et qui ne pouvaient être traités dans un recueil tel que celui-ci.

Première partie

Comparer et classer des objets selon leur grandeur

Comparer et *classer* sont des activités fondamentales à tous les niveaux de l'activité humaine. Il sera question ci-après de comparer des objets et de les classer *selon leur grandeur* (hauteur, longueur, poids, durée, ...), en prenant le terme *objet* dans un sens assez large, puisque nous irons jusqu'à comparer des intervalles de temps.

Nous comparerons souvent les objets selon une grandeur immédiatement perçue : la longueur ou la hauteur pour les objets étirés, l'aire pour les polygones, etc. Mais il y a toujours un choix au départ, et nous envisagerons certains objets du point de vue de plusieurs grandeurs, comme par exemple le volume et le poids (voir section 5).

Par ailleurs, nous ne considérons ici les comparaisons de grandeurs qu'au niveau de base, c'est-à-dire *sans faire intervenir d'aucune façon les mesures et les nombres.* Les grandeurs existent en effet par elles-mêmes, avant toute idée de mesure : par exemple je peux constater que cette bouteille est moins haute que cette autre, ou que cette balle est plus lourde que cette autre, sans rien mesurer.

Le thème des comparaisons et classements réapparaîtra dans la deuxième partie et dans d'autres brochures de la collection, que ce soit de manière systématique (par exemple en s'appuyant sur des mesures) ou de façon occasionnelle, à l'occasion de situations problématiques diverses.

1 Objets allongés

1.1 Deux objets allongés

Déterminer, de deux objets allongés, lequel est le plus long.

S'il s'agit de deux baguettes, on les porte l'une sur l'autre en les faisant coïncider à un bout. S'il s'agit de deux ficelles, il faut d'abord les tendre. S'il s'agit de deux bouts d'élastique, il faut les tendre aussi, mais tout juste, de sorte qu'ils prennent leur longueur naturelle (ne pas les allonger).

Les objets considérés du point de vue de leur longueur ne sont pas tous aussi simples à comparer que des baguettes, cf. SM 1.2.

S'il s'agit d'objets bouclés sur eux-mêmes (bracelets, colliers, etc.) et qu'on ne peut pas couper, il faut trouver une manœuvre appropriée. Supposons que ces objets soient souples. Alors on pourra les mettre côte à côte après les avoir disposés "en longueur", comme le montre la figure 1.

Cette manoeuvre est une application de la propriété qui veut que si la moitié d'un objet allongé est plus petite que la moitié d'un autre, alors le premier objet est plus petit que le second, cf. SM 6.1, 6.3 et équation (6).

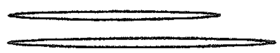


Fig. 1

Notons que la comparaison de deux objets seulement pose déjà le problème des objets presque égaux. Cette remarque s'applique à toutes les comparaisons, qu'il s'agisse d'objets allongés, étendus en surface ou en volume, lourds, etc. La comparaison de deux objets presque égaux exige beaucoup de soin et de précision dans la manoeuvre de comparaison, ou alors le recours à des instruments qui augmentent la précision : loupe, balance très sensible, ... Il arrive que, malgré un gros effort de précision, on hésite à dire si un objet est plus grand qu'un autre ou s'ils sont égaux.

L'exigence de précision est un facteur important de l'apprentissage, comme il a été, tout au long de l'histoire, un facteur important du progrès scientifique. Nous y reviendrons dans d'autres brochures, entre autres lorsqu'il sera question de mesures, et donc de nombres exprimant de plus en plus fidèlement des grandeurs.

Il est intéressant de noter que, dans la définition d'une relation d'ordre en mathématique, on ne prend pas en compte ce genre d'hésitation dans la comparaison des objets. En effet, un des axiomes de la relation d'ordre est que quand on considère deux objets a et b, on a *une et une seule* des trois situations suivantes : a plus petit que b, a égale b, a plus grand que b, cf. SM 1.5 et Chap. 14.

1.2 Plusieurs ou beaucoup d'objets allongés

Classer un lot plus ou moins grand d'objets allongés.

Cette activité est ce que les psychologues appellent une *sériation*, cf. SM 1.6.6.

Supposons dans un premier temps, pour fixer les idées, que le lot d'objets à classer ne soit pas trop grand, par exemple de l'ordre d'une dizaine. Le premier moyen dont on dispose pour les classer est de les comparer deux à deux.

On peut épargner des opérations de comparaison en s'appuyant sur la propriété de transitivité, rappelée ci-contre.

Si une baguette a est plus petite qu'une baguette b, et celle-ci plus petite qu'une baguette c, alors a est plus petite que c, SM Chap.14.

On peut aussi s'aviser qu'il est plus efficace de construire un rangement ordonné : par exemple disposer les baguettes parallèlement en plaçant une de leurs extrémités sur une règle servant de base, comme le montre la figure 2. La technique consiste à insérer chaque fois la nouvelle baguette dans la série déjà constituée.

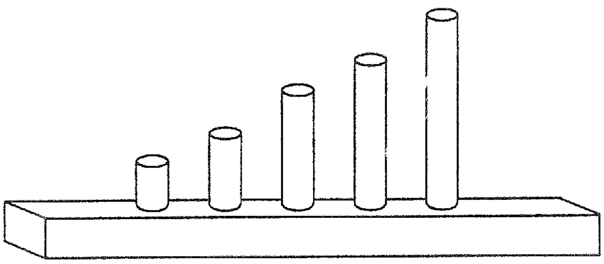


Fig. 2

Un paramètre important de ces problèmes de classemen est le nombre des objets à classer. Lorsque ce nombre devient grand, on peut songer à diviser le lot des choses à classer en sous-lots mieux maîtrisables. Dans un deuxième temps, on insère le sous-lot dans le classement global.

Cette remarque est un cas particulier d'une observation plus générale: dans beaucoup de situations mathématiques, le fait de passer à de très grands ou de très petits objets, à de très grands ou de très petits nombres constitue un défi et impose le recours à des méthodes et des concepts originaux.

1.3 Objets qu'on ne peut rapprocher

Comparer les hauteurs de deux meubles situés dans des pièces différentes.

SM 1.2

On ne peut rapprocher les deux meubles l'un de l'autre à seule fin de les comparer : ce serait trop de travail. Il faut transporter de l'un à l'autre une grandeur intermédiaire (une perche, un fil, ...) pour réaliser la comparaison en deux temps, en s'appuyant sur la transitivité de l'égalité ou de l'inégalité de deux grandeurs.

La transitivité de l'égalité s'énonce comme suit : si une baguette a est égale à une baguette b, et que celle-ci est égale à une baguette c, alors a est égale à c. Dans cet énoncé, nous avons utilisé le mot baguette. L'énoncé se transpose sans peine à tout type d'ojet allongé.
On voit que la transitivité, propriété clé, revient sans cesse dans ce chapitre, cf. SM 1.4 et Chap. 14.

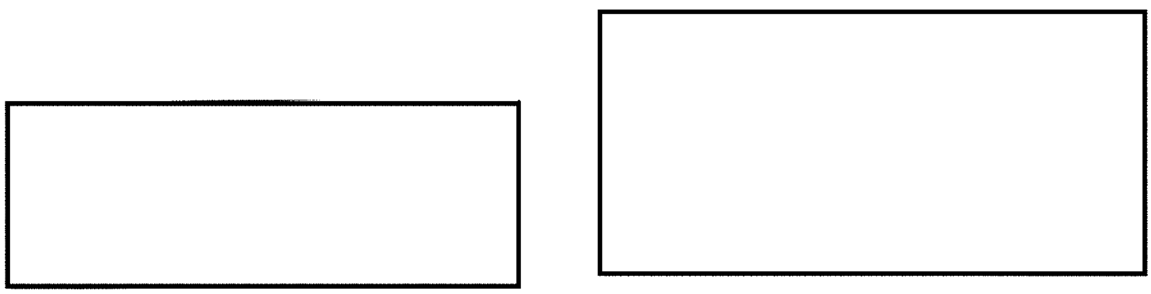
Des situations variées prennent naissance, selon que la perche intermédiaire est égale à la hauteur d'un des deux meubles, ou qu'elle est plus grande que l'un d'eux (alors on peut lui faire une marque, pour créer un objet égal en hauteur au meuble en question), ou qu'elle est plus petite que les deux meubles (alors il faut reporter la perche pour esquisser une mesure, ce qui touche à l'addition des grandeurs et à leur multiplication par un naturel : sur cette utilisation des mesures naturelles, voir la seconde partie).

Il n'est pas nécessaire que deux objets soient éloignés l'un de l'autre pour qu'on se trouve empêché de les rapprocher en vue de les comparer. Soit par exemple une planche rectangulaire, dont on croit qu'elle pourrait être un carré. On ne peut évidemment pas porter un côté sur l'autre. Force sera donc bien d'utiliser une ficelle (par exemple) comme intermédiaire. Par contre, s'il s'était agi d'un rectangle en papier, un pliage approprié aurait suffi.

2 Surfaces et volumes

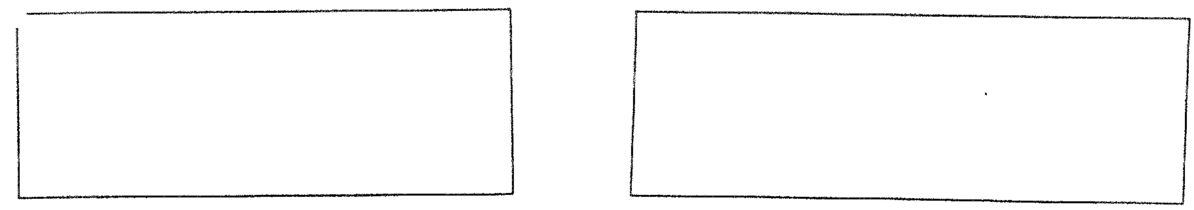
2.1 Comparer des rectangles

De deux rectangles découpés dans du papier, quel est celui qui a la plus grande aire ? Examiner les paires de rectangles de la figure 3 (a), (b) *et* (c). SM 1.2

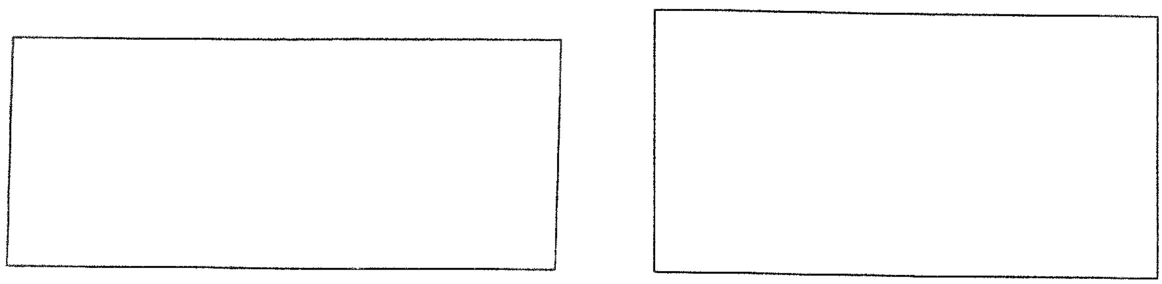


(a)

Fig. 3



(b)



(c)

Fig.3 (suite)

En portant l'un sur l'autre les rectangles de la figure 3(a), on voit que l'un est contenu dans l'autre, ce qui suffit pour reconnaître le plus grand des deux (figure 4(a)). Il en va de même pour ceux de la figure 3(b), portés l'un sur l'autre à la figure 4(b).

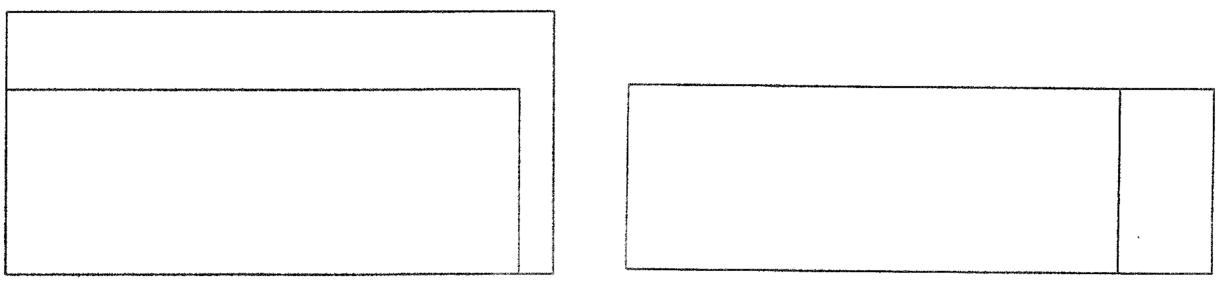


Fig. 4 (a) et (b)

Par contre, lorsqu'on porte l'un sur l'autre les deux rectangles de la figure 3(c), on n'arrive plus à mettre l'un dans l'autre (figure 4(c)). Il faut alors comparer les deux bouts qui dépassent : le plus grand rectangle est celui dont le bout qui dépasse est le plus grand.

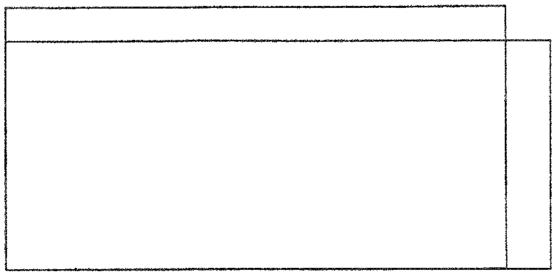


Fig. 4(c)

Mais il peut arriver que les deux bouts qui dépassent ne se comparent pas eux-mêmes facilement. Alors on peut continuer à comparer par le même procédé. Et espérer qu'il ne faille pas répéter trop de fois ce type de comparaison.

Le rectangle est un type de surface très simple. Néanmoins, on voit que comparer deux surfaces rectangulaires n'est pas nécessairement immédiat.

Par contre, comparer deux surfaces semblables aux contours même très compliqués, comme les hippocampes de la figure 5, est toujours très simple.

Cette section montre que comparer des surfaces est bien moins immédiat que comparer des baguettes ou des segments géométriques. Nous vérifierons dans la suite que comparer des volumes, des masses, des angles, des intervalles de temps est plus compliqué que comparer des segments. C'est bien pourquoi le segment est le représentant privilégié des grandeurs. Dans Euclide déjà, au troisième siècle avant J.-C., toutes les grandeurs sont représentées par des segments, cf. SM 1.2 et 3.6.

Fig. 5

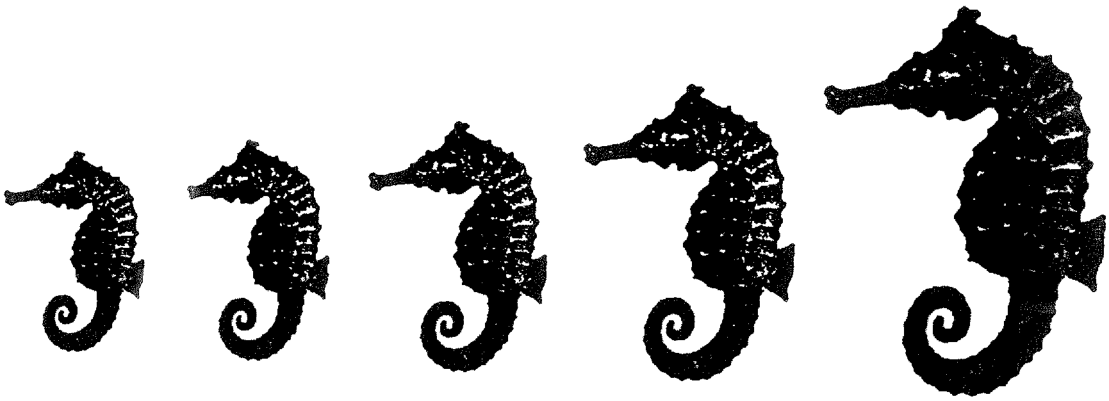


Fig. 5 (suite)

Ce qui par contre ne l'est parfois pas, c'est de comparer deux surfaces planes compliquées non semblables : par exemple une carte de Belgique et une autre de la Suisse à la même échelle. On aura beau les découper et les porter l'une sur l'autre, on n'obtiendra pas de résultat convainquant. Une solution consiste alors à les découper dans du papier fort (pour qu'elles aient un poids non négligeable) et à les comparer sur une balance très précise (ou sur un pèse-lettre). Cette manœuvre astucieuse s'appuie sur l'homogénéité du papier : même surface, même poids, plus grande surface, plus grand poids, et réciproquement. Mais ces considérations dépassent le cadre de la présente brochure.

Ceci est un exemple de ce qu'on appelle parfois la *pensée divergente* : "Il faut y penser : c'est comme l'oeuf de Colomb !" Mais à force de rencontrer des astuces, on s'habitue à en trouver soi-même.

2.2 Comparer des contenances

Cf. SM 1.2. Il est sans doute utile de rappeler ici que les activités proposées dans cette brochure ne le sont pas dans un ordre approprié à l'apprentissage. En particulier la comparaison des contenances ainsi que des volumes évoquée à la section 2.3 n'est accessible qu'à des enfants qui ont bien maîtrisé la conservation des volumes des fluides incompressibles.

Comparer les contenances de bouteilles, boîtes et récipients divers

On les remplit chacun jusqu'au bord d'eau ou de sable ou d'une autre matière incompressible qui peut s'écouler. On les transvase alors dans des récipients identiques (qui n'ont pas besoin d'être cylindriques) et on les classe selon le niveau atteint.

2.3 Comparer divers solides

Comparer les volumes d'un lot d'objets aux formes diverses

Si les objets sont susceptibles d'être immergés dans l'eau, on peut les plonger successivement dans un même vase partiellement rempli d'eau, et celui qui fait le plus monter le niveau est le plus volumineux. Le vase n'a nullement besoin d'être cylindrique. Par contre il doit s'agir d'un seul et même vase où chaque objet est successivement plongé puis retiré, ou de vases identiques, remplis jusqu'à la même hauteur.

Une autre façon de procéder consiste à plonger chaque objet dans un vase rempli d'eau à ras bord (éventuellement des vases différents pour chaque objet), puis à recueillir et comparer les volumes d'eau qui ont débordé.

3 Angles

Dans cette section, il s'agit d'angles inférieurs à un angle plat. Les angles qui dépassent un angle plat posent de tout autre problèmes : cf. SM 3.7.

3.1 Angles de polygones

On dispose d'un triangle équilatéral, d'un carré, d'un pentagone régulier, etc. jusqu'à un dodécagone régulier. Tous ces polygones sont en carton ou papier fort, et ont leurs côtés de même longueur. On demande de les classer selon leur angle (l'angle d'un polygone régulier est l'angle entre deux côtés successifs).

Une bonne façon de le faire est de les superposer comme le montre la figure 6.

On voit apparaître ici une suite infinie de polygones, de même qu'une suite infinie d'angles. L'infini apparaît très tôt dans l'apprentissage des mathématiques. La première fois est sans doute lorsque l'enfant découvre que la numération décimale de position lui permet d'écrire des nombres *sans jamais être obligé de s'arrêter*. L'infini est fascinant, mais aussi perturbant. Il est sans doute opportun de ne pas éviter le sujet lorsque les élèves y arrivent naturellement.

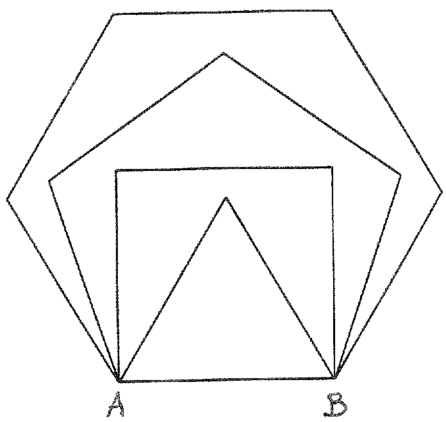


Fig. 6

En regardant les angles en A et en B, on s'aperçoit qu'ils vont en croissant avec le nombre de côtés du polygone. Mais ils croissent de moins en moins vite, et on réalise que, même si on continuait à superposer des polygones avec un nombre de côtés croissant, leur angle ne dépasserait jamais l'angle plat.

On remarque que le classement par grandeur de l'angle coïncide avec le classement par taille des polygones, et aussi avec le classement par nombre de côtés.

3.2 Angles au centre

Classer les polygones de la section précédente selon leur angle au centre.
La difficulté est ici que les angles au centre ne sont pas accessibles au bord des polygones, comme le montre la figure 7. Pour les comparer, on peut en prendre une copie, par exemple à l'aide d'un papier calque.

Ici aussi on a une suite d'angles potentiellement infinie, mais dont chacun est plus petit que le précédent. L'angle au centre s'approche de l'angle nul lorsque le nombre des côtés du polygone croît indéfiniment.

Avec des élèves assez avancés on peut aussi raisonner. Chacun des triangles superposables constituant un polygone à la figure 7 a pour angles, d'une part l'angle au centre, et d'autre part deux angles égaux chacun à la moitié de l'angle du polygone. Puisque la somme des angles d'un triangle fait deux angles droits, l'angle au centre vaut deux angles droits moins l'angle du polygone.

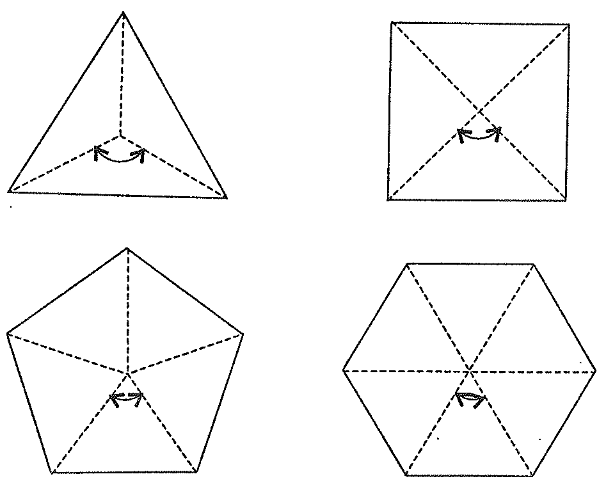


Fig. 7

4 Objets pesants

Classer des sachets de sable (ou de billes) selon leur poids, d'abord en les soupesant, puis en se servant d'une balance à plateaux (mais sans utiliser de poids, c'est-à-dire sans mesurer : la balance sert seulement à constater un équilibre ou un déséquilibre entre deux sachets).

Pourquoi utiliser des sachets ? Simplement pour que les choses à mesurer échappent à la vue, et que l'on ne puisse donc pas estimer les poids par les volumes ou les nombres d'objets.

Classer en soupesant n'est pas très précis. Mais il est intéressant d'observer quelle est la plus petite différence de poids que chacun peut percevoir de cette façon. Cette différence est variable avec les poids soupesés eux-mêmes : on perçoit une différence de 100 gr entre des objets pesant moins de 1 kg, mais non entre des objets pesant plus de 10 kg. Cette remarque renvoie à des pesées en gr et en kg, sujet que nous n'abordons pas ici, puisque nous nous limitons aux grandeurs non mesurées.

Pour stimuler le recours à la transitivité, on peut demander d'effectuer le classement, ou de vérifier un classement, ou plus simplement d'insérer un nouvel objet dans une série d'objets déjà classés, *en recourant le moins possible à la balance* (on ne demandera pas à de jeunes élèves de *prouver* qu'ils sont arrivés au nombre minimum d'opérations de comparaison).

La balance à plateaux impose les comparaisons deux à deux. Donc, pour classer les objets en faisant le moins possible d'opérations de comparaison à la balance, il importe de s'appuyer au maximum sur la transitivité de l'ordre. Nous l'avons déjà évoquée à propos des baguettes à la section 1.1.

5 Classements contradictoires

Lorsqu'on cherche à classer des baguettes ou des segments de droite, on prend spontanément leur longueur comme critère de classement. De même on classe spontanément des boules de plasticine selon leur poids, et des verres ou des bouteilles selon leur contenance. Toutefois, chaque objet peut être envisagé de divers points de vue : ses dimensions linéaires (longueur, largeur, hauteur, profondeur,...), son poids, son volume, etc.

Les activités ci-après obligent à considérer des objets selon divers points de vue, conduisant à des classements distincts.

Les classements contradictoires mettent en évidence l'hétérogénéité des objets. Ils préparent la découverte de l'homogénéité : par exemple, si on classe selon le volume des objets homogènes (c'est-à-dire de densité constante), on obtient le même classement que si on les classe selon leur poids. Sur l'homogénéité, cf. SM 11.4.

5.1 Mêmes volumes, poids différents

On dispose de cubes de bois de même grandeur, mais taillés dans des bois différents. Les classer selon leur poids.

cf. SM 1.6.6

Cette activité n'est pas plus difficile que de classer selon leur poids des objets quelconques. Elle a pour avantage d'aider à dissocier les notions de volume et de poids Elle prépare ainsi celle de densité.

En toute rigueur, il faudrait ici parler de masse et non de poids. Mais la distinction n'est sans doute pas accessible avant la fin du secondaire. Il nous semble opportun de confondre les deux notions tant que des situations précises n'obligent pas à les discerner.

5.2 Balles et billes diverses

Sur la table se trouvent deux séries identiques d'une dizaine de "balles" chacune (billes, balles de ping-pong, de pétanque, de base-ball, de tennis, balle mousse, ...) On a également suspendu un cintre à vêtements auquel on a attaché un sac en plastique à chaque extrémité. Ce cintre servira de balance. Consigne : classer ces lots de balles de diverses façons.

Le classement selon la taille est le plus souvent facile, puisque toutes les balles et boules sont semblables. Toutefois certaines balles peuvent être presque de la même taille. Une manière de les classer peut être alors de poser une règle sur les deux balles disposées côte à côte et de voir de quel côté la règle incline. Le classement selon le poids est plus difficile à organiser (voir section 4).

Voici un bref compte rendu de cette activité réalisée dans une classe de sixième primaire.

Rapidement les deux classements attendus fusent : "une fois selon le poids et une fois selon le volume", propose Michaël. L'équipe se lance d'abord dans le classement selon le poids. "Le maillet[1] est le plus dur, c'est le plus lourd", dit un enfant. On compare les boules deux à deux, sans beaucoup d'organisation, en les soupesant d'abord avec les mains. Comme certains contestent, ils vérifient à l'aide du "cintre-balance". Très vite, les élèves se rendent compte qu'ils n'avancent guère ainsi ...

'etit à petit, le classement s'organise à partir de l'objet le plus lourd. Gaël aligne soigneusement les balles au fur et à mesure. La balle rouge est plus légère que la blanche. Jonathan la reprend donc pour la remettre dans le sac de la balance et la comparer à la suivante. Elle est à nouveau la plus légère. Inutile, cette fois, de la sortir du sac. Les comparaisons deviennent systématiques

[1]On appelle *maillet* la balle en bois du jeu de croquet.

et sans pesée inutile (sauf lorsque, par erreur, les deux boules se retrouvent dans le même sac !)

Le second classement est directement entrepris avec méthode. Un premier essai à l'oeil est suivi d'une vérification à l'aide d'un pied à coulisse lorsque les diamètres sont proches (il semble évident pour ces enfants de sixième primaire que comparer les volumes des boules revient à comparer leurs diamètres). Pour obtenir un classement correct, "on doit remonter tout le temps (la barette inférieure du pied à coulisse)".

L'usage du pied à coulisse fait intervenir une mesure dans le système métrique, ce qui est une exception dans notre exposé.

Ce deuxième classement est visiblement différent du premier. Les enfants essaient de conclure, mais ils éprouvent quelque difficulté à s'exprimer, à expliquer. "Quelque chose de plus grand n'est pas nécessairement plus lourd". "Celui-là va flotter parce qu'il est léger"... Le mot "densité" surgit, mais Jonathan est incapable de le définir...

5.3 Hauteurs et contenances

On dispose de deux ensembles identiques de bouteilles (ou de verres, ou de boîtes). Classer ces deux ensembles, le premier suivant la hauteur, et le second selon la contenance.

Le classement selon la hauteur n'est pas difficile. Le classement selon la contenance peut se faire comme expliqué à la section 2.2. C'est ici encore la non-concordance des deux classements qui est significative.

5.4 En long ou en large ?

Classer les oiseaux de la figure 8 *par ordre de tailles.*

Il est flagrant ici que le terme *taille* est ambigu. Il y a un choix à faire : ou bien on classe les oiseaux selon leur "longueur" de la tête à la queue, ou bien on les classe selon leur *envergure*. Ce terme désigne la distance entre les extrémités des ailes déployées.

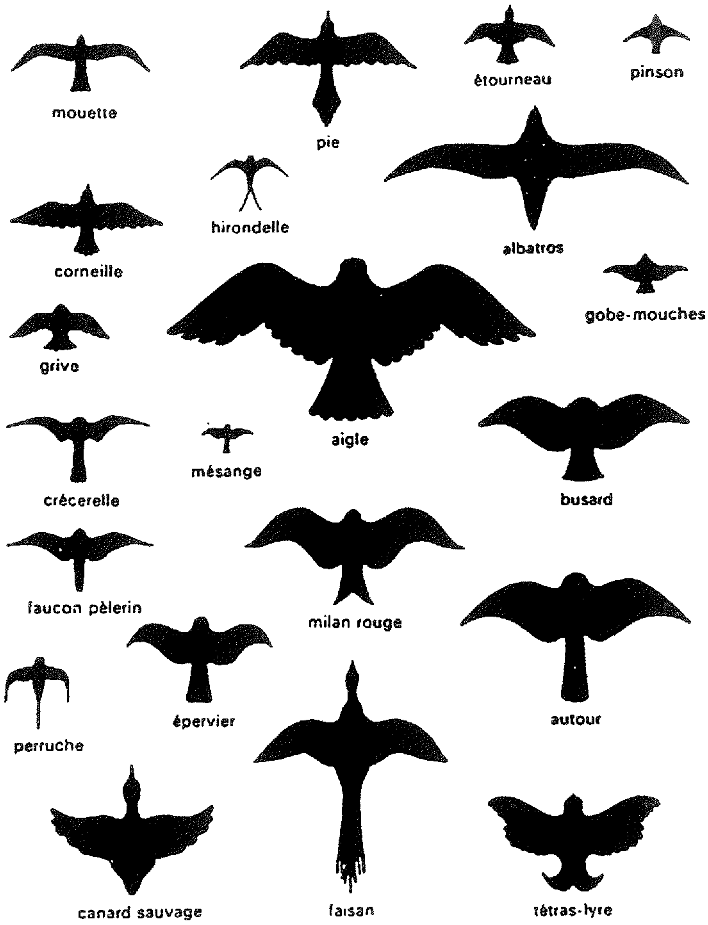


Fig. 8

6 Intervalles de temps

Considérés du point de vue de leur grandeur, les intervalles de temps sont très particuliers du fait qu'ils ne se conservent pas : ils s'évanouissent au fur et à mesure de leur écoulement, pour disparaître définitivement au moment de leur instant ultime. Ceci fait que rapprocher deux intervalles de temps pour les comparer est habituellement impossible. Nous verrons ci-dessous à quelles manœuvres astucieuses il faut recourir.

Mais avant d'aborder les intervalles de temps comme grandeurs, examinons les événements instantanés qui auront pour fonction, en ce qui nous concerne, de marquer le début et la fin des intervalles de temps.

6.1 Successions d'événements instantanés

Une personne (le professeur, un(e) élève) crée une succession d'événements instantanés (par exemple des chocs sur divers récipients). Une autre personne doit les reproduire dans le même ordre, et s'adapter aux variantes. Par exemple, discerner tic tac de tac tic. Par exemple encore, discerner les diverses variantes de trois coups distincts tels que tic tac toc, tic toc tac, tac tic toc , etc.

On peut aussi s'entraîner à reproduire des suites périodiques telles que

tic tac toc toc, tic tac toc toc, tic tac toc toc,...

et déjà expérimenter les durées en créant un rythme.

Créer des simultanéités : une personne frappe la suite périodique ci-dessus et on demande à une autre de frapper un *tic* simultanément au premier *toc* de chaque période, ce qui donne en parallèle

1)	*tic*	*tac*	*toc*	*toc*	*tic*	*tac*	*toc*	*toc*
2)			*tic*				*tic.*	

Autre activité qui aide à maîtriser les successions d'événements : une personne joue une mesure d'un morceau de musique, une autre reprend la même mesure, une troisième fait de même, etc.

Les activités mathématiques ne s'opposent pas aux activités musicales. Elles s'éclairent mutuellement.

On peut aussi s'entraîner à représenter sur papier ces diverses créations sonores. Ou aussi à leur faire correspondre des suites de gestes sans émission sonore. On peut également les accélérer jusqu'à la limite du possible, ou les étaler dans le temps de diverses façons.

Cette remarque recoupe celle que nous avons faite en marge de la section 1.2 : il est presque toujours instructif d'aller vers les extrêmes.

6.2 Apprécier au jugé l'égalité ou l'inégalité des durées

Le professeur, mûni d'un chronomètre, La figure 9frappe deux coups pour donner le début et la fin d'un intervalle de temps dont il a choisi la durée. Un peu plus tard, un élève doit tenter de reproduire la même durée.

Le professeur est ici l'arbitre, surtout s'il est seul à connaître l'usage du chronomètre. On peut s'entraîner à apprécier l'égale ou l'inégale durée de deux intervalles plus ou moins courts ou longs, et plus ou moins écartés l'un de l'autre.

6.3 Positions relatives d'intervalles de temps

représente toutes les positions relatives possibles de deux intervalles de temps. On matérialise tous les cas à l'aide d'événements continus tels que des notes tenues sur un instrument de musique ou par la voix. On demande à un auditeur de dire dans chaque cas si les durées ont été égales ou inégales, et le cas échéant dans quel sens.

Au lieu de créer les intervalles de temps par des sons, on peut les créer par la vue (lumière allumée ou éteinte), voire par le toucher. Il est clair que les cas a), b), c) et e) sont ceux qui se prêtent le mieux aux comparaisons de durées. Il va donc falloir s'y ramener si on veut remplacer des estimations imprécises de durées par des constats plus précis. Pour juger de l'égalité ou de l'inégalité de deux durées dans un cas tel que g), il faudrait pouvoir transporter une durée dans le temps. On peut y arriver si on considère certains événements comme reproductibles. Le temps d'un sablier sera considéré a priori comme toujours le même. Et même on considérera volontiers que deux temps écoulés dans deux expériences d'écoulement de sable (ou d'eau), les conditions physiques demeurant identiques, sont égaux ou inégaux selon que les quantités de matière écoulées sont elles-mêmes égales ou inégales.

Il est intéressant de rappeler qu'une des façons de mesurer le temps dans l'antiquité était précisément basée sur l'écoulement de l'eau. Les horloges à eau étaient appelées *clepsydres*.

Au 17e siècle, il n'y avait pas de chronomètres, mais seulement de grosses horloges à poids incapables de mesurer des temps assez brefs. Lorsque Galilée a étudié les mouvements d'une boule le long d'un plan incliné, il mesurait le temps de descente de la boule par un procédé qu'il décrit comme suit: "Pour mesurer le temps, nous prenions un grand seau rempli d'eau que nous attachions assez haut ; par un orifice étroit pratiqué dans son fond s'échappait un mince filet d'eau que l'on recueillait dans un petit récipient, tout le temps que la boule roulait dans le canal. Les quantités d'eau ainsi recueillies étaient à chaque fois pesées à l'aide d'une balance très sensible, et les différences et proportions entre ces poids nous donnaient les différences et proportions des temps, et cela avec une telle précision que, bien que l'opération ait été répétée de nombreuses fois, il n'y eut aucune différence appréciable dans les résultats.

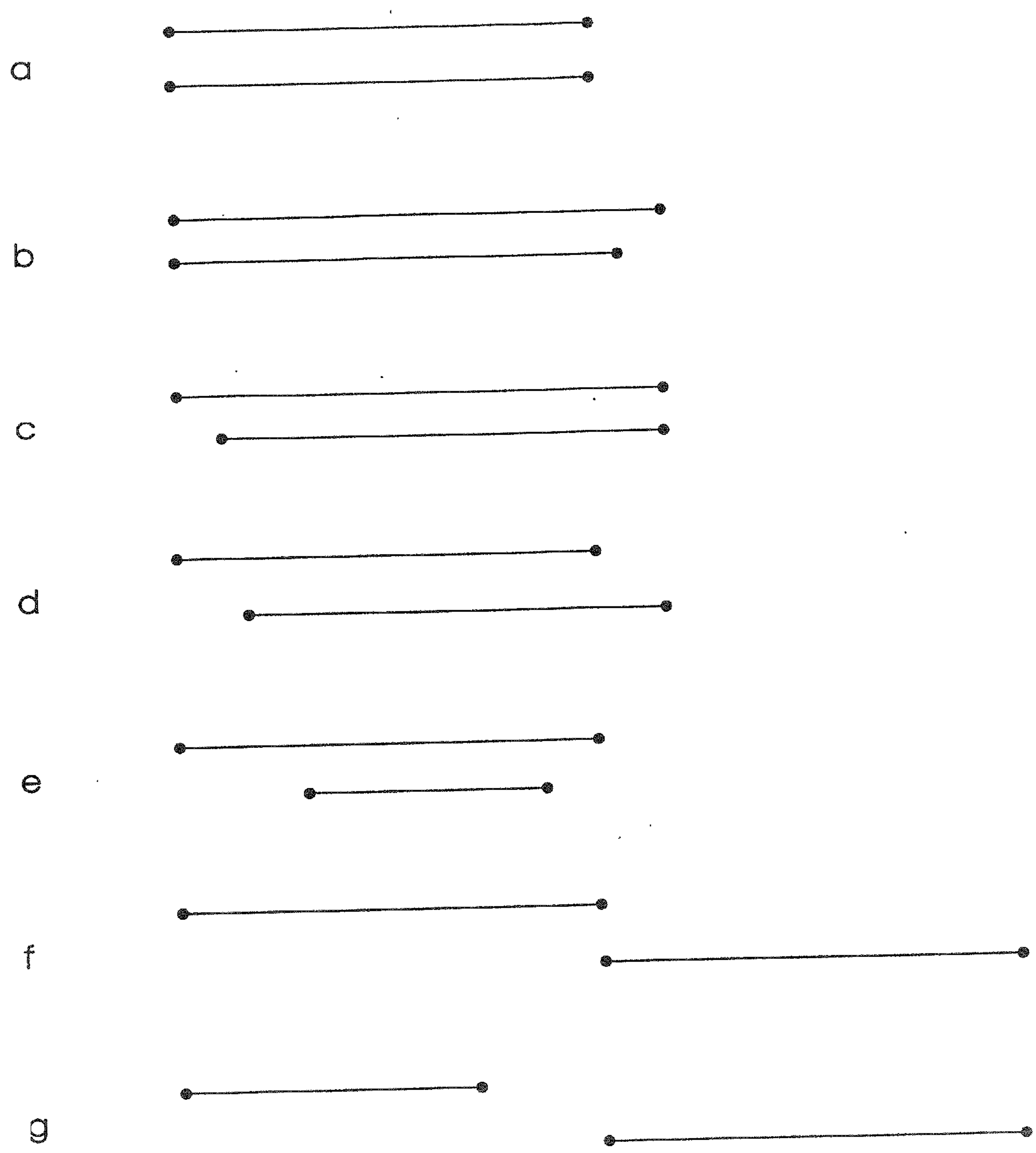


Fig. 9

Alors, pour comparer deux intervalles de temps dans un cas tel que g), on déclenchera un sablier au début du premier intervalle et on l'arrêtera à la fin de ce même intervalle. On recommencera les mêmes manœuvres au début du second intervalle. Une fois ces deux opérations terminées, on comparera les deux quantités de sable écoulées.

On remarque qu'en procédant de cette façon, on s'est donné un moyen de comparaison des intervalles de temps beaucoup plus précis et objectif que la simple conscience de l'écoulement du temps.

6.4 Conserver le temps

Faire chercher aux élèves des moyens de créer des intervalles de temps reproductibles.
Par exemple percer un petit trou dans une boîte de conserve que l'on remplira d'eau et dont on observera l'écoulement.

La conservation du temps peut aussi se faire en recourant à des rythmes réguliers et en comptant, mais ceci nous amène déjà à faire intervenir les nombres et à mesurer le temps, ce que nous réservons à la seconde partie.

7 La hauteur des sons

On émet trois ou quatre notes à l'aide d'un même instrument. Les repérer dans l'ordre qui va de la plus basse à la plus aiguë.

Comparer de même des notes émises par des instruments différents.

Seconde partie

Mesurer avec ce qu'on a sous la main

Dans la première partie, nous avons étudié la comparaison et le classement des objets selon leur grandeur. Il n'était alors pas question de mesures d'aucune sorte. Ici nous commençons la construction de l'idée de mesure.)ans un premier temps, nous mesurerons avec des unités de rencontre, celles que l'on trouve à sa portée et qui ne sont pas des unités officielles telles que le mètre, le degré, l'heure, etc. Nous étudierons ces dernières dans une brochure ultérieure.

Nous commençons par les unités de rencontre parce qu'elles précèdent les unités officielles dans une construction logique de la notion de mesure. Les unités de rencontre ne sont pas organisées en un système cohérent d'unités et de sous-unités adaptées à un système de numération. Elles amènent donc les enfants à affronter les *défis primitifs* du mesurage, que l'humanité a mis tant de siècles à surmonter. La compréhension profonde de l'idée de mesurage passe par là. Par ailleurs les mesures avec des unités de rencontre sont souvent bien pratiques dans la vie, à savoir à tous les moments où l'on n'a pas besoin d'une grande précision ou encore lorsqu'on n'a pas sous la main un instrument approprié, selon le cas une règle graduée, une balance, un chronomètre, ...

Dans l'âge adulte, on a oublié la plupart des défis primitifs. Ils sont passés à l'état de seconde nature. Mais les enfants doivent les affronter. Sur la notion de *défi primitif*, cf. F. Lemay[1974].

Comme la première, cette seconde partie présente successivement divers types de grandeurs. Pour cette raison déjà, l'ordre des sections ne saurait être adopté dans l'apprentissage, car les enfants abordent tous les types de grandeurs de front. Qui plus est, il vaut mieux ne pas placer systématiquement dans les classes la pratique des unités de rencontre avant celle des unités officielles. En effet, les élèves apprennent très tôt, et c'est bien ainsi, ce que sont un mètre, un litre, un kilo, ...

8 Objets allongés

8.1 Objets possédant une division naturelle

Estimer la hauteur d'un bâtiment ou comparer les hauteurs de deux bâtiments (éventuellement situés loin l'un de l'autre).

Une première approximation peut s'obtenir en comptant les étages. Un idée pour affiner la mesure est de compter les lits de brique.

Il ne manque pas d'exemples de ce genre : la hauteur d'une étagère en nombre de planches, l'épaisseur d'un livre en nombre de pages, etc.

8.2 Objets difficiles à déplacer

On doit déplacer des tables (identiques) dans une autre pièce. Combien va-t-on pouvoir en ranger le long d'un mur ?

On peut, par exemple, prendre la longueur d'une table avec une ficelle, et on va mesurer dans l'autre pièce.

Comparer les tailles d'objets difficiles à déplacer justifie le recours à des mesures : il est plus facile de comparer les mesures que de déplacer les tables.

8.3 L'empan, la coudée, le pas

Comparer deux objets ou deux distances en choisissant une unité de mesure liée à son propre corps.

Selon les objets dont on veut comparer les tailles ou les distances que l'on veut comparer, on choisira l'empan (distance entre le bout du petit doigt et le bout du pouce d'une main largement écartée), la coudée, le pas, ...

Autre exemple, on peut comparer les tours de deux gros troncs d'arbre en les entourant chacun d'une chaîne d'enfants se donnant la main.

De telles mesures sont bien entendu peu précises. Mais il est utile de savoir adapter la précision de la mesure à l'objectif que l'on poursuit. Souvent, en effet, la précision coûte des efforts et de l'argent. Une pratique commune consiste à allonger le pas pour qu'il devienne une approximation du mètre. Un petit enfant pourra approximer le mètre avec deux pas.

8.4 Rapport de deux longueurs

De combien peut s'allonger un élastique ? La même question peut être posée à propos d'un ressort.

Il faut tirer sur l'élastique, sans toutefois aller jusqu'à le casser. Une unité de mesure naturelle s'impose ici. En effet, ce que l'on veut surtout connaître, c'est si l'élastique peut prendre 2 fois, 3 fois, ou davantage sa longueur naturelle. Le plus vraisemblable d'ailleurs est que le résultat ne s'exprimera pas par un nombre entier. On obtiendra ce que l'on appelle un *encadrement*. L'élastique allongé mesurera par exemple entre 3 à 4 fois sa longueur naturelle. Ou alors on dira peut-être qu'il mesure entre une fois et demie et une fois et un tiers sa longueur naturelle.

L'encadrement d'une mesure par deux nombres entiers d'unités précède l'utilisation des sous-unités. La méthode la plus naturelle à laquelle on pense pour augmenter la précision d'une mesure consiste à remplacer l'unité choisie par une autre plus petite, ce qui permet de resserrer l'encadrement.
Cette question de l'allongement d'un élastique est un problème de *rapport* : on veut connaître le rapport de deux grandeurs, ce qui amène à considérer l'une des deux (en général la plus petite) comme unité pour mesurer l'autre. La question des rapports est suffisamment importante pour que nous lui consacrions un développement spécial dans une brochure à paraître.

9 Surfaces

9.1 Les pièces du "happy cube"

On donne un certain nombre de pièces avec des contours capricieux, telles que celles de la figure 10. *Comparer ces pièces.*

Les pièces de la figure 10 proviennent d'un jeu appelé le *happy cube*. Il s'agit d'un puzzle en mousse synthétique, composé de six pièces irrégulières qui s'emboîtent pour former un cube. Il existe six "happy cubes" de couleurs différentes et de difficulté croissante, classés par l'inventeur dans l'ordre : bleu, vert, jaune, orange, rouge et mauve. La figure 10 montre les pièces du bleu (b_1 à b_6) et celles du vert (v_1 à v_6). Le but premier du jeu (mais nous ne l'utilisons pas comme cela ici) est de construire un cube unicolore à partir de pièces différentes, mais (bien entendu) de même couleur.

Voici quelque observations sur ce que cette activité a provoqué dans une classe de sixième primaire observée par M.I. Bousez, étudiante d'école normale. Pour faciliter les classements et les mises en commun, chaque pièce a été numérotée. Certains enfants éprouvent quelque difficulté à établir la correspondance entre les pièces et les dessins de ces mêmes pièces.

Ceci favorise une maturation de l'idée d'isométrie. Certaines pièces sont asymétriques, et donc elles ne se superposent au dessin correspondant que si on les pose sur la face adéquate.

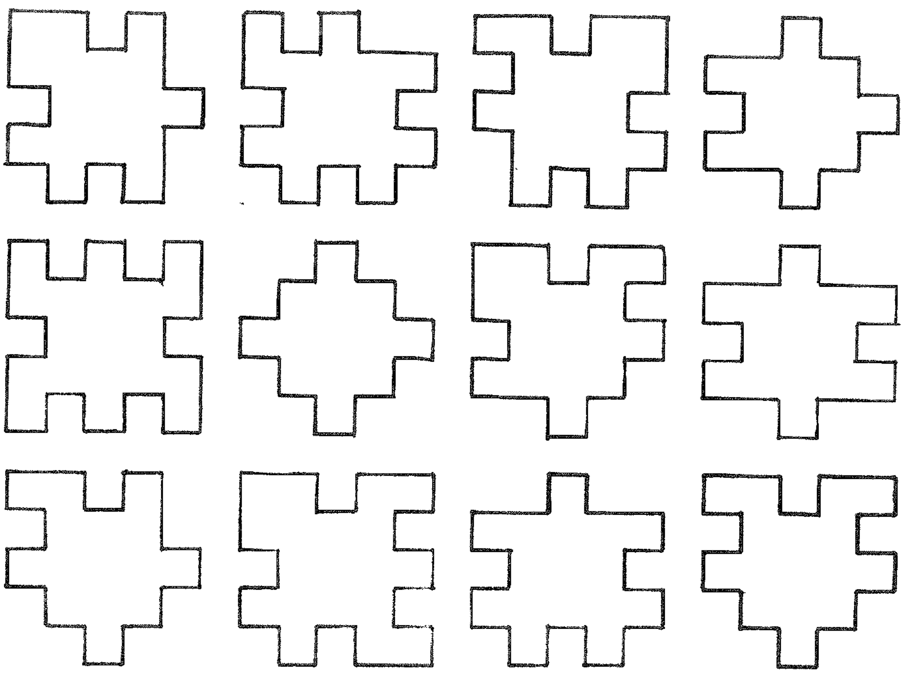


Fig. 10

Hélène (une élève) propose de classer les pièces de la plus petite à la plus grande (entendant par là comparer les aires). Mais comment ?

Elle superpose deux pièces (v_1 et v_3) et examine la différence entre les pièces quand v_1 est au dessus ; pour cela, elle compte de combien de petits carrés la pièce du dessous dépasse. Elle retourne le montage, sans déplacer les pièces l'une par rapport à l'autre. La pièce v_3 est au dessus et elle effectue le même décompte (voir figure 11). Elle compare alors le nombre de petits carrés qui dépassent selon que v_1 ou v_3 est au dessus et elle parvient à déterminer la pièce la plus grande.

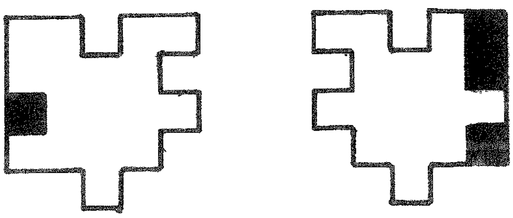


Fig.11

Estelle trouve plus pratique de compter le nombre de petits carrés dont on peut imaginer que chaque pièce est faite (cf. figure 12).

La méthode d'Estelle est celle qui conduit au mesurage. Noter la pluralité des méthodes utilisées par les élèves.

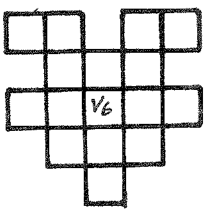


Fig. 12

Marie explique un autre procédé pour comparer l'aire des différentes pièces étudiées. Elle détermine un carré de base, commun aux différentes pièces étudiées (cf. figure 13). A partir de ce carré, elle dénombre les petits carrés qui dépassent.

La méthode de Marie montre le souci de minimiser l'effort de comptage.

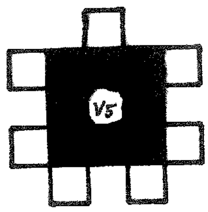


Fig. 13

9.2 Le tangram

Le tangram est un puzzle chinois de forme carrée dont les pièces sont constituées de polygones simples, comme le montre la figure 14. *On choisit une pièce du tangram comme unité de mesure, et on demande dans ces conditions la mesure de chacune des autres pièces, et la mesure du puzzle complet (le grand carré).*

Prenons, par exemple, le plus petit triangle comme unité. On décompose toutes les autres pièces de façon à les montrer composées par juxtaposition de petits triangles (figure 15). Si par contre on prend pour unité le carré (ou le parallélogramme, qui lui est égal : ils valent chacun deux fois le triangle), on obtient des mesures deux fois plus petites.

On voit ici le recours à une unité de mesure triangulaire. Pourquoi une unité de mesure aurait-elle nécessairement la forme carrée ?

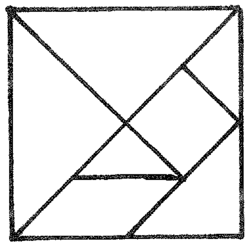


Fig. 14

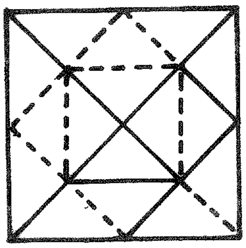


Fig.15

9.3 Construire un polygone double d'un autre

On double le côté d'un carré, et on obtient un carré combien de fois plus grand ? Et si on fait la même chose avec un hexagone régulier ? Et avec un pentagone régulier ?

Soit le carré de la figure 16(a). La figure 16(b) montre le carré de côté double. Il est en un certain sens deux fois plus grand que le premier : deux fois plus large et deux fois plus haut. Mais qu'en est-il de son aire ? On n'y voit pas clair au premier coup d'œil. Pour savoir combien de fois il est plus grand du point de vue de l'aire, il suffit de porter le petit dans le grand : il y va 4 fois (figure 16(c)).

La petite figure pave la plus grande, ce qui est la situation la plus commode.

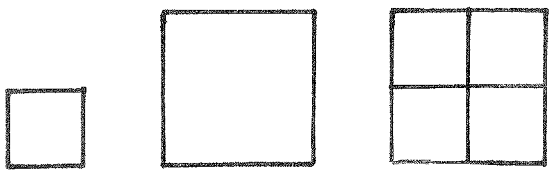


Fig. 16 (a), (b) et (c)

Pour ce qui concerne l'hexagone, beaucoup d'élèves

Il s'agit ici d'une conjecture qui s'avérera fausse. Elle découle de l'*illusion de proportionnalité*.

répondent que, puisque c'est 4 pour le carré, ce sera 6 pour l'hexagone. Mais ce n'est pas le cas. Pour le montrer, on essaie de paver le grand hexagone avec le petit, ce qui n'est pas possible : la figure 17 montre qu'il reste des losanges.

La petite figure ne pave plus la grande. Mais l'essai de pavage fait apparaître une troisième figure qui pave les deux autres. Le losange est ce que l'on appelle une *commune mesure* entre les deux surfaces (S.M. chapitre 4).
Le rapport 4 manifeste une propriété des similitudes : si les dimensions linéaires d'une surface sont agrandies dans le rapport de 1 à a, les aires sont agrandies dans le rapport de 1 à a^2.

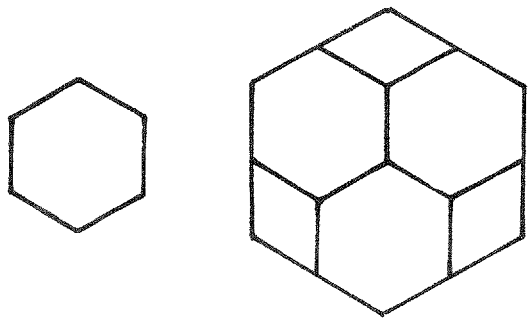


Fig. 17

Une façon de s'en tirer consiste à prendre ce losange comme commune mesure (comme objet intermédiaire) : on le retrouve trois fois dans le petit hexagone et 12 fois dans le grand (figure 18). Et donc l'hexagone est agrandi dans le rapport de un à quatre.

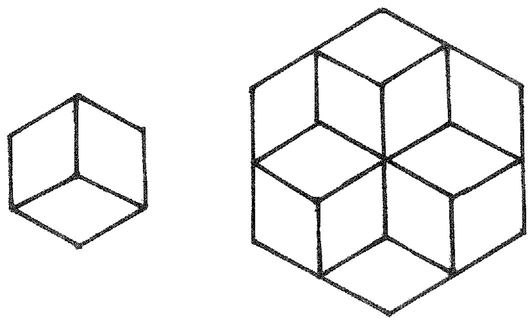


Fig.18

Des élèves laissés à eux-mêmes trouveront d'autres façons. Par exemple en utilisant des décompositions comme sur la figure 19 (D. Van Hiele [1957], voir aussi Chr. De Block-Docq [1992]). Le petit hexagone se décompose en deux triangles et un rectangle, et le grand en 8 triangles et 4 rectangles.

On note ici aussi la multiplicité des solutions.

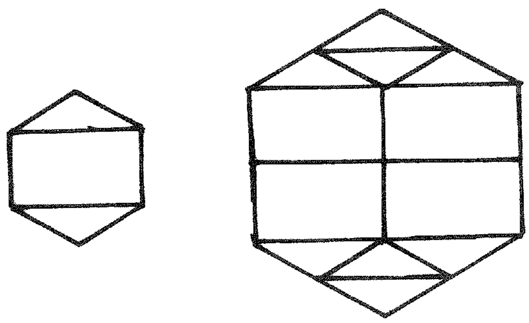


Fig. 19

Quant au pentagone régulier, on n'arrive même pas à paver partiellement le grand avec le petit (figure 20).

Ici le pavage est plus difficile.

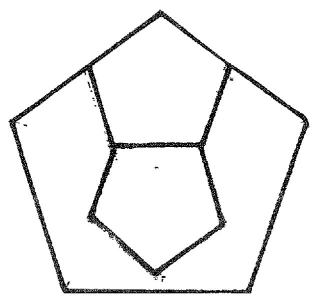


Fig. 20

Il faut pourtant, d'une manière ou d'une autre, trouver une commune mesure. Par exemple en décomposant les deux pentagones chacun en 5 triangles, et en remarquant que le petit triangle va 4 fois dans le grand (figure 21).

Il faut ici un effort sérieux d'imagination pour trouver un pavé commun à la petite figure et à la grande.

On peut légitimement se demander s'il est toujours possible de trouver une commune mesure entre les aires de deux polygones. La réponse est que parfois il n'y a pas de commune mesure. Cette question dépasse le cadre de notre exposé.

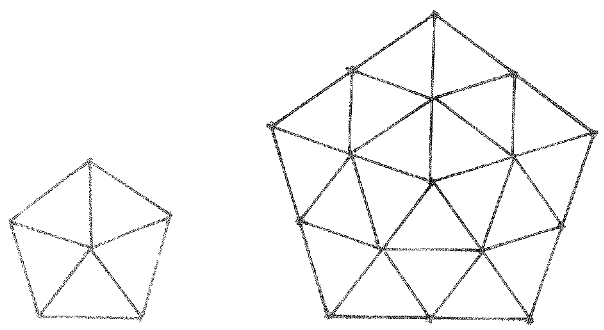


Fig. 21

Ceci fait que le rapport des deux figures est encore de un à quatre.

Remarque : cette dernière méthode est applicable à tous les polygones réguliers, comme suffit à le montrer la figure 22 qui concerne l'octogone.

Une fois l'astuce trouvée, on s'aperçoit qu'elle est généralisable.

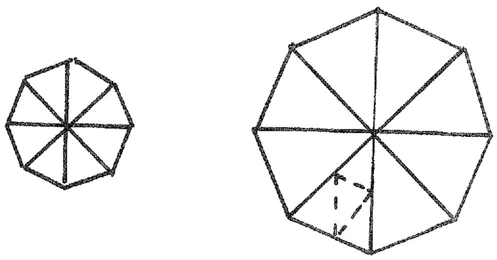


Fig.22

Et s'il s'agissait d'un polygone quelconque ? La figure 23 suffit à montrer que la propriété est généralisable à toute figure que l'on peut paver avec des triangles. Une astuce supplémentaire intervient ici : en effet, on utilise non pas une seule commune mesure entre les deux polygones, mais bien une commune mesure particulière pour chacun des triangles composants.

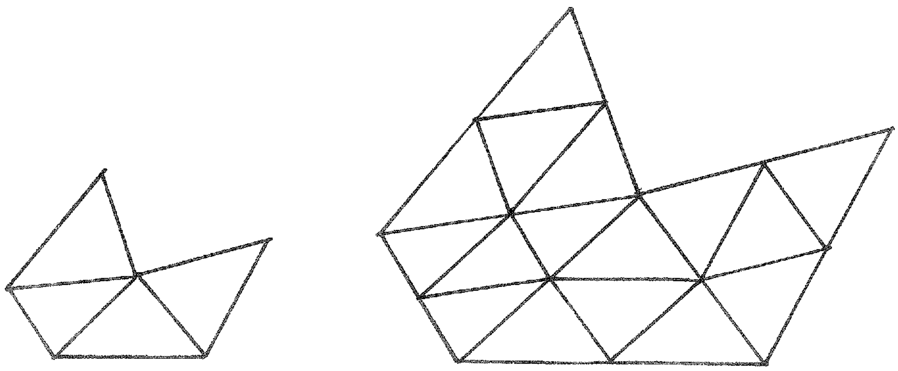


Fig. 23

Prolongement de la question : et si, au lieu de doubler les dimensions de la figure initiale, on les triplait ? Ou si on les quadruplait ? Et s'il s'agissait d'une figure non polygonale ? Cette dernière question peut conduire loin : elle est là pour faire rêver le lecteur.

9.4 Mesurer une classe et un corridor

On cherche un endroit pour rassembler trois classes.

Quel est le local le plus spacieux, une classe ou le corridor entre les classes ? A première vue la classe paraît plus petite, peut-être à cause des bancs qui l'encombrent. Il faut mesurer, mais nous n'avons pas d'"appareil" (c'est-à-dire de mètre).

Voici quelques observations faites dans une classe de 5 à 8 ans. Les enfants font de nombreuses propositions : on peut mesurer avec des livres de la collection Eureka, avec des feuilles d'ordinateur, des bandelettes de papier (de 2 cm×17 cm) qui se trouvent être disponibles, avec des cartons (de 10 cm×17 cm), avec les mains, les pieds, le corps, avec des cahiers, ... Un enfant propose de mesurer avec tous les cartables, mais la proposition est refusée, car "il faut des objets tous pareils".

L'unité de mesure ne peut pas varier.

On rencontre ici la proportionnalité inverse : le nombre qui exprime la mesure diminue lorsque l'unité de mesure augmente.

Les enfants établissent un tableau des résultats de mesures, selon l'unité de rencontre choisie. Certains ont effectivement mesuré avec leur corps. Plus on est grand, moins on doit reporter de fois son corps. La leçon se poursuit par une introduction aux unités conventionnelles : les enfants apportent en classe tous les mètres et règles gradués qu'ils ont pu trouver (mètre ruban, pliant, en métal à déroulement, latte, etc).

9.5 Carreler des appartements

Carreler des appartements : on donne aux élèves un certain nombre de plans d'appartements. Il s'agit de plans très schématiques, comme ceux que montrent les figures 24 et 25. Chaque plan est accompagné par des dessins de dalles proposées pour carreler les appartements. Voici les consignes et questions :

Colorie la dalle qui te permettra de carreler toutes les chambres sans couper de dalle. Combien faudra-t-il commander de dalles comme celle que tu as choisie pour carreler tout l'appartement ?

Ceci exprime en termes familiers une consigne de recherche d'une commune mesure.

Quelle est la longueur de chaque mur dans l'appartement ?

Quelle est la longueur des côtés de l'appartement ?

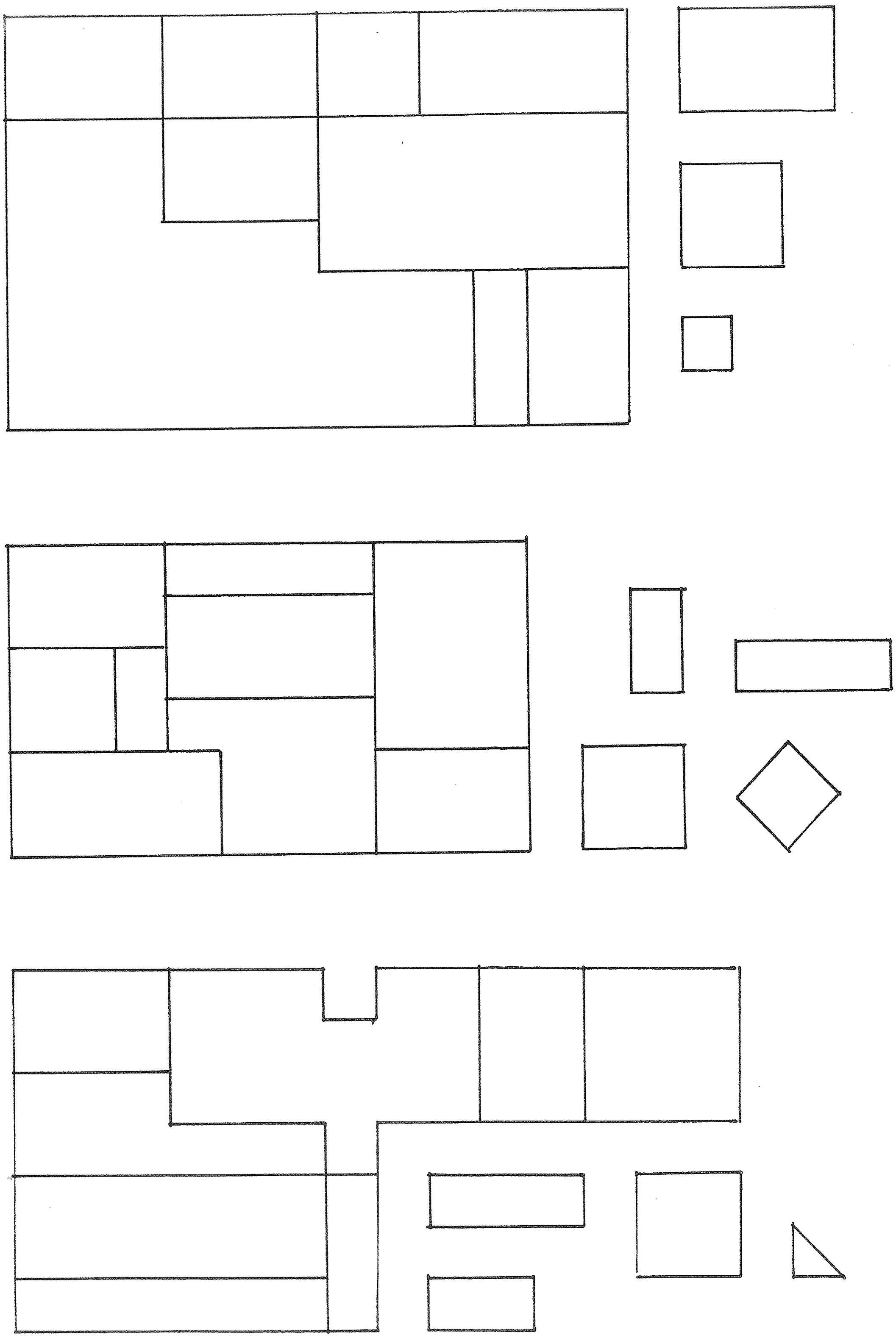


Fig. 24

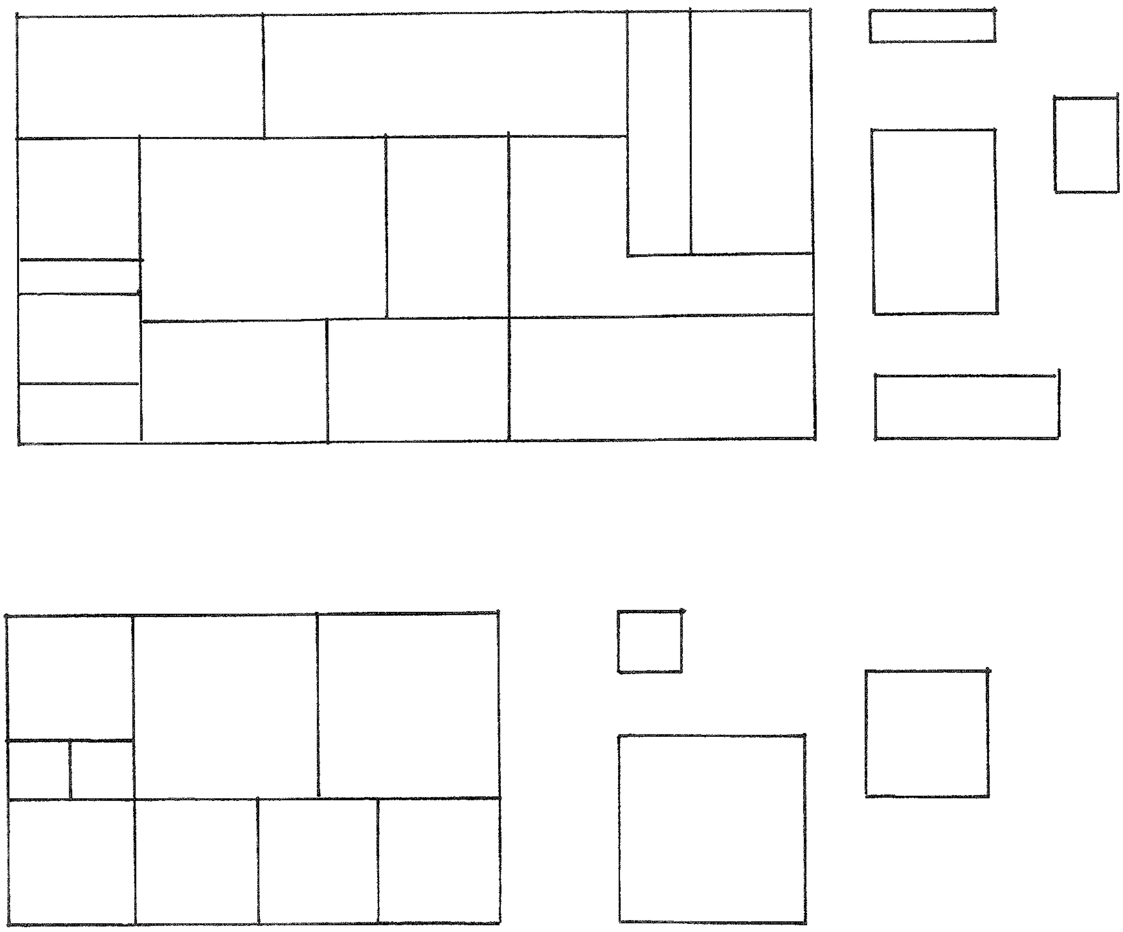


Fig. 25

Voici quelques indications sur le déroulement de cette activité dans une classe de 27 enfants de 7 à 12 ans, mélangés à chaque table de travail.

D'abord, chacun travaille individuellement sur l'appartement de son choix, quoiqu'en louchant vers le travail des voisins. Après dix minutes, on fait le point. Les termes longueur, largeur, ligne, colonne apparaissent. Les élèves parlent de "voir dans sa tête", se faire une "latte" (règle graduée) pour reporter toute une ligne à la fois, disposer les nombres de dalles en calcul écrit, aller plus vite en utilisant la formule $L \times l$, etc.

Le travail reprend pour une vingtaine de minutes, après quoi le professeur arrête l'activité pour une phase d'élaboration collective d'outils. Cela donne :

trouver des repères,

voir dans sa tête pour choisir la bonne dalle,

reporter la dalle avec précision,

utiliser la longueur et la largeur, faire des lignes et des colonnes,

Remarquer la variété des moyens mis en œuvre, plus ou moins élaborés selon l'âge des élèves.

utiliser le calcul écrit pour faire + (additionner),

inventer une latte,

faire des × (multiplier),

On voit apparaître ici une mesure indirecte : multiplier des longueurs pour obtenir une aire.

couper en deux (la moitié de 5 c'est $2\frac{1}{2}$), ce qui est accompagné du dessin que montre la figure 26.

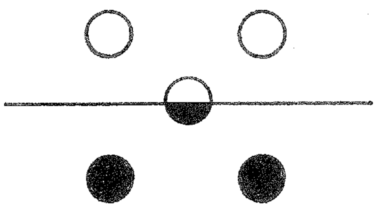


Fig. 26

9.6 Comparer deux surfaces quelconques

*Comparer deux surfaces planes délimitées chacune par un contour fermé (*figure 27*)*

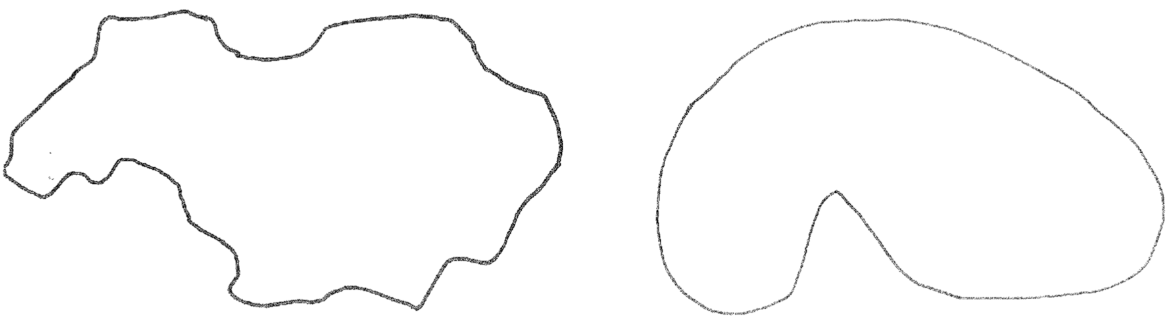


Fig. 27

Une manière de s'en tirer est de décalquer les deux figures sur du papier transparent, puis de poser les calques sur du papier quadrillé. On peut alors encadrer chacune des deux aires en comptant d'une part tous les carrés *entièrement* situés à l'intérieur du contour, et d'autre part tous les carrés situés *entièrement ou partiellement* à l'intérieur du contour. La figure 28 montre comment l'aire de la première surface peut être encadrée entre 9 et 26 carrés.

Cette technique de mesure peut paraître primitive. Toutefois, pour les surfaces définies empiriquement, il n'y a pas de formule, et la méthode indiquée a le mérite d'exister.

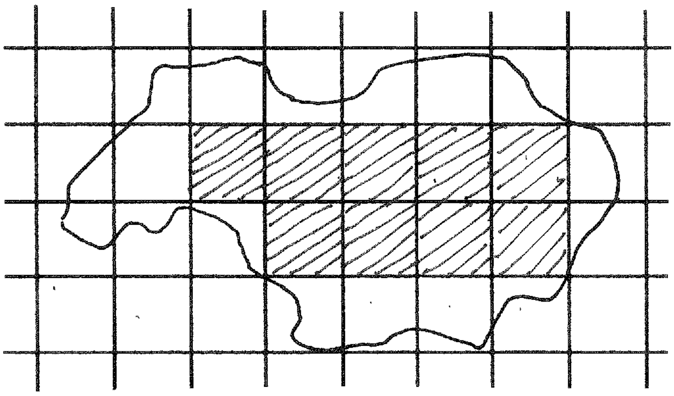


Fig. 28

Cet encadrement est très grossier. Pour le préciser, on peut soit estimer à vue la partie de la surface couverte par les carrés chevauchant le bord, soit poser le calque sur un quadrillage plus fin. La figure 29 montre la même surface posée sur un fond millimétré.

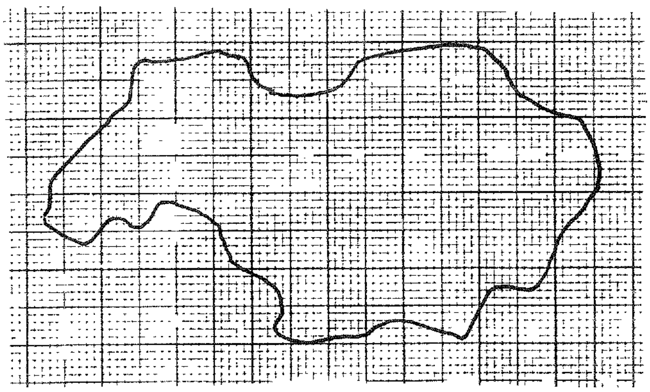


Fig. 29

Lorsque le nombre des carrés devient grand, il est utile de mettre au point une tactique de comptage. Ainsi, sur le papier millimétré, on utilisera le fait qu'un grand

On vérifie ici le fait assez commun que le passage des petits nombres (ceux que l'on maîtrise facilement par un comptage sans astuce) aux grands nombres provoque des démarches de pensée originales.

carré en comporte 100 petits.

La consigne suivante est une application de ce qui précède.

Comparer les surfaces de deux murs de briques en comptant les briques.

On peut de même comparer, en comptant les carreaux, les surfaces de deux pièces carrelées avec des carreaux identiques. L'opération aura un supplément de sens si les deux pièces ne sont pas rectangulaires, ce qui rend la comparaison moins aisée.

10 Volumes et capacités

10.1 Quelques unités appropriées

Mesurer une bouteille en nombre de verres, un tonneau en nombre de bouteilles.

10.2 Des unités toutes petites

Combien de fois une cuiller à café va-t-elle dans une cuiller à soupe, dans une tasse, une louche, un seau ?

Si on demande de remplir le seau avec la petite cuiller, on a l'impression que la tâche est impossible, et d'ailleurs personne ne songerait à la réaliser effectivement. La question est seulement de savoir à quel nombre on arriverait si on le faisait. En procédant par étapes, on abrège considérablement le travail : il suffit de se servir des intermédiaires que sont la cuiller à soupe, la tasse et la louche, puis de procéder aux multiplications nécessaires.

On a l'habitude d'enseigner le mesurage en reportant d'abord une unité de mesure, puis une sous-unité pour mesurer le reste, puis une sous-sous-unité et ainsi de suite. Dans l'exemple ci-dessus, on suit le chemin inverse : pour diminuer le nombre des opérations, on recourt à des sur-unités.

10.3 Mesure d'un parallélipipède

On dispose d'une caisse et d'un certain nombre de cubes. Ce nombre est insuffisant pour remplir la caisse. Combien faudrait-il de cubes pour la remplir ?

Noté dans une classe d'enfants d'une douzaine d'années : Alexandra observe d'abord le nombre de cubes nécessaires pour construire une rangée ; ensuite le nombre de rangées pour obtenir un étage ; enfin elle multiplie le résultat par le nombre d'étages. Elle est la seule à avoir explicité sa démarche. Les autres mesurent les trois dimensions de la caisse avec un cube, puis ils les multiplient. Il faut 1 040 cubes pour construire un volume identique à la caisse. Revenant aux unités traditionnelles, Xavier conclut la réflexion en disant que, si on multiplie 1 040 par le volume d'un cube ($1\ \text{cm}^3 \times 4 \times 4 \times 4 = 64\ \text{cm}^3$), on obtient le volume de la caisse en cm^3, soit $66\,560\ \text{cm}^3$.

Les démarches ci-contre sont des procédés rapides pour obtenir le nombre des cubes. Elles préparent la mesure indirecte du volume d'un parallélipipède, obtenue en faisant le produit des longueurs des trois côtés.

Le jeu de Lego offre de nombreuses possibilités d'activités de ce genre. Ce jeu comporte de petites et de grandes briques. Les grandes sont 8 fois plus volumineuses que les petites. Il y aussi des briques cubiques.

11 Angles

11.1 Le pliage donne des unités d'angle

On donne un angle absolument quelconque : en donner la mesure le plus précisément possible.

On peut par pliage créer un angle droit. Par pliage encore, on peut subdiviser cet angle en deux, puis en 4, etc. Ceci permet de créer des unités reproductibles de plus en plus petites, avec chacune desquelles on peut alors mesurer l'angle donné.

On dispose pour mesurer les angles d'unités naturelles fournies par la géométrie. Ce sont le tour complet, le demi-tour et le quart de tour.

Tel n'est pas le cas pour les unités de longueur. La Révolution Française, cherchant à définir une unité de longueur que les hommes de tous les temps et de toutes les nations pourraient retrouver, a dû chercher loin. Le mètre a été défini à ce moment comme le dix millonnième du quart du méridien terrestre. Depuis, on a trouvé et adolpté un étalon disponible en laboratoire : il s'agit de la longueur d'onde d'une certaine radiation atomique.

La création de mesures d'angles par pliage en deux suggérerait un mesure des angles dans le système binaire. Mais celui-ci conduit à des nombres peu lisibles.

11.2 L'horloge fournit des angles

Indiquer des directions, à partir du nord, en évoquant les aiguilles d'une montre.

Par exemple, on met l'axe six heures-midi en direction sud-nord, et on se sert de la grande aiguille pour indiquer les points cardinaux : l'est à un quart d'heure, le sud à une demi-heure, etc.

On peut de même orienter l'axe six heures-midi dans la direction où on marche, et utiliser la petite aiguille pour indiquer les changements de cap.

11.3 Une longueur à bras tendu

Se servir d'un bâtonnet tenu à bras tendu pour mesurer des angles dans un paysage.

12 Objets pesants

On soupèse deux objets, et on n'arrive pas à percevoir lequel est le plus lourd. Essayer de trancher la question avec les moyens du bord.

Pour mesurer des objets pesants avec des unités de rencontre, il suffit d'utiliser des objets de même poids, comme il s'en trouve beaucoup dans la vie quotidienne : des pièces de monnaie identiques, des cuillers d'un même service, des billes de même matière et de même diamètre, des cartes à jouer, des disquettes pour ordinateur, etc.

13 Intervalles de temps

Comme pour les angles, il existe pour mesurer les intervalles de temps des unités naturelles, à savoir le jour, le mois lunaire et l'année. Toutefois, il n'existe pas de telles mesures plus petites et aisément disponibles. Il a fallu subdiviser arbitrairement le jour pour définir l'heure, la minute, etc.

13.1 En comptant

Estimer des intervalles de temps en comptant de façon régulière

13.2 Les sabliers

Construire un sablier pour reproduire une période donnée

Sur cette activité, voir la brochure n° 1 de la présente collection.

Références

CHR. DE BLOCK-DOCQ, *Analyse épistémologique comparative de deux enseignements de la géométrie plane vers l'âge de douze ans*, Thèse de doctorat, Université de Louvain-la-Neuve, 1992

F. LEMAY, *Genèse des systèmes de nombres à partir de l'idée de mesure*, Faculté des Sciences de l'Éducation, Université Laval, 1974

N. ROUCHE, *Le sens de la mesure, des grandeurs aux nombres rationnels*, Didier-Hatier, Bruxelles, 1992

D. VAN HIELE, *De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.*, Thèse de doctorat, Université d'Utrecht, 1957