Boites qui coulent, boites qui flottent

Mariza Krysinska

Boites qui flottent, boites qui coulent

- Présentation du matériel et de la question

  Dans une feuille de plomb dont la masse surfacique est égale à 0,86 g/cm^2, on fabrique un jeu de boites en plomb à base carré de dimensions suivantes

$$L\ \text{cm} \times L\ \text{cm} \times H\ \text{cm}$$

(L représente la mesure du côté de carré, *H* représente la hauteur) :

- 3cm ×3cm×2cm ; 3cm×3cm×5cm ;
- 3,5cm×3,5cm×2cm ; 3,5cm × 3,5cm × 3,7cm ; 3,5cm × 3,5cm × 8cm
- 5cm × 5cm × 2cm ; 5cm ×5cm×3,5cm ; 5cm×5cm×5cm; 5cm×5cm×8cm
- 10cm×10cm×1,5cm ; 10cm×10cm×3cm ; 10cm×10cm×10cm

Laquelle parmi ces boites va flotter, laquelle va couler?

Boites qui flottent, boites qui coulent

- **Quelles sont les boites qui ont des chances de flotter?**

- Les toutes petites? Les toutes grandes?
- Les plus petites sont plus légères donc elles flotteront plus facilement ?
- Mais les bateaux flottent, ils sont grands et pleins de vide. Peut-être faut-il qu'il y a suffisamment d'espace à l'intérieur ?
- Les boites cubiques sont-elles importantes? Sont-ce les limites entre celles qui coulent et qui flottent dans chaque catégorie ?

-

Principe d'Archimède dans le contexte des boites flottantes

1ère étape

On considère deux récipients en PVC , l'un rempli te la farine et l'autre remplit de l'eau. Leur poids est le même. On les plonge dans l'eau. Lequel des deux s'enfoncerait plus?

Principe « d'équivalence des masses égales »:

<u>l'enfoncement *X* d'un récipient qui contient (ou non) un liquide, ne dépend que de la masse totale qui est la somme de la masse du récipient et du contenu du récipient.</u>

2ème étape

Lorsque la masse surfacique de la boite est négligeable par rapport au poids de l'eau, l'enfoncement est presque égal à la hauteur de l'eau dans la boîte:

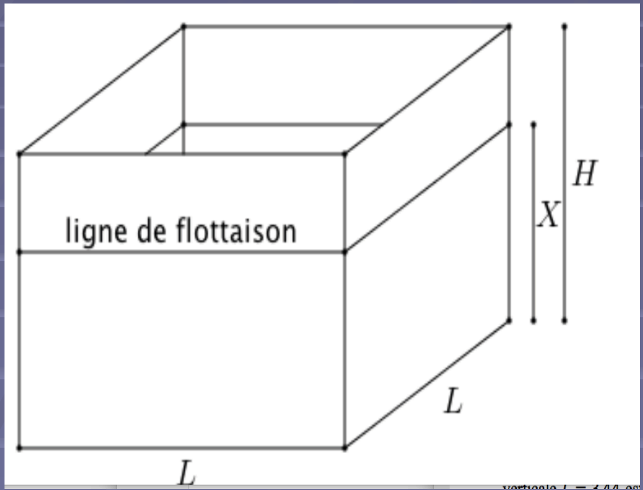
les niveaux dans la boîte et hors la boîte coïncident.

Principe d'Archimède

<u>la masse de l'eau de la partie immergée = la masse total de la boite</u>

Principe d'Archimède

<u>masse de l'eau de la partie immergée = masse de la boite</u>



Modèle algébrique :

Masse de l'eau de la partie immégrée

$$X \text{ cm} \times L^2 \text{ cm}^2 \times 1 \ {}^{\text{g}}\!/_{\text{cm}^3} = XL^2 \text{ g}$$

Masse de la boite:

$$0{,}86 \text{ g/cm}^2 \times \left(L^2\text{cm}^2 + 4 \times H \text{ cm} \times L \text{ cm}\right) = 0{,}86\left(L^2 + 4HL\right) \text{ g}$$

Principe d'Archimède :

$$XL^2 \text{ g} == 0{,}86\left(L^2 + 4HL\right) \text{ g}$$

Modèle algébrique $XL^2 = 0{,}86 \cdot (L^2 + 4HL)$:
boites de base 3 cm × 3 cm

Pourquoi les boites correspondant à L = 3 coulent-elles ?

3cm ×3cm×2cm

$$\underbrace{\underbrace{X3^2}_{\text{volume de l'eau}}}_{\text{masse de l'eau}} = \underbrace{0{,}86\underbrace{\left(3^2 + 4\cdot 2\cdot 3\right)}_{\text{surface totale de la boite}}}_{\text{masse de la boite}}$$

$$9X = 0{,}86 \cdot 33$$

$$X = 3{,}15$$

$$X > 2 \text{(hauteur de la boite)}$$

Modèle algébrique $XL^2 = 0{,}86 \cdot (L^2 + 4HL)$:
boites de base 3 cm × 3 cm

Pourquoi les boites correspondant à L = 3 coulent-elles ?

3cm ×3cm×3cm

$$\underbrace{\underbrace{X3^2}_{\text{volume de l'eau}}}_{\text{masse de l'eau}} = \underbrace{0{,}86\underbrace{\left(3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 3\right)}_{\text{surface totale de la boite}}}_{\text{masse de la boite}}$$

$$X = 0{,}86 \cdot 5 = 4{,}3$$

$$X > 3 \ \text{(hauteur de la boite)}$$

Modèle algébrique $XL^2 = 0{,}86\cdot(L^2 + 4HL)$: boites de base 3 cm × 3 cm

Pourquoi les boites correspondant à $L = 3$ coulent-elles ?

3cm×3cm×5cm

$$\underbrace{\underbrace{X3^2}_{\text{volume de l'eau}}}_{\text{masse de l'eau}} = \underbrace{0{,}86\underbrace{\left(3^2+4\cdot 5\cdot 3\right)}_{\text{surface totale de la boite}}}_{\text{masse de la boite}}$$

$$9X = 0{,}86\cdot 69$$

$$X = 6{,}59\ldots$$

$$X > 5 \ \text{(hauteur de la boite)}$$

Modèle algébrique $XL^2 = 0{,}86\cdot(L^2 + 4HL)$: Modèle général des boites de base 3 cm × 3 cm

- **Peut-on déterminer une hauteur de la boîte de base 3×3 pour qu'elle flotte ?**

Soit H la hauteur de la boîte, X la hauteur de la partie immergée de la boîte de base 3×3.

Alors les variables X et H sont liées par la condition suivante:

$$3^2 \times X = 0{,}86 \times (3^2 + 4 \times 3 \times H)$$

ou

$$X = 0{,}86 \times (1 + 4/3 \times H)$$
$$= 0{,}86 + 1{,}1467H$$

Modèle algébrique $XL^2 = 0{,}86 \cdot (L^2 + 4HL)$: Modèle général des boites de base 3 cm × 3 cm

- **Peut-on déterminer une hauteur de la boite 3×3 pour qu'elle flotte ?**

$$X = 0{,}86 + 1{,}14666H$$

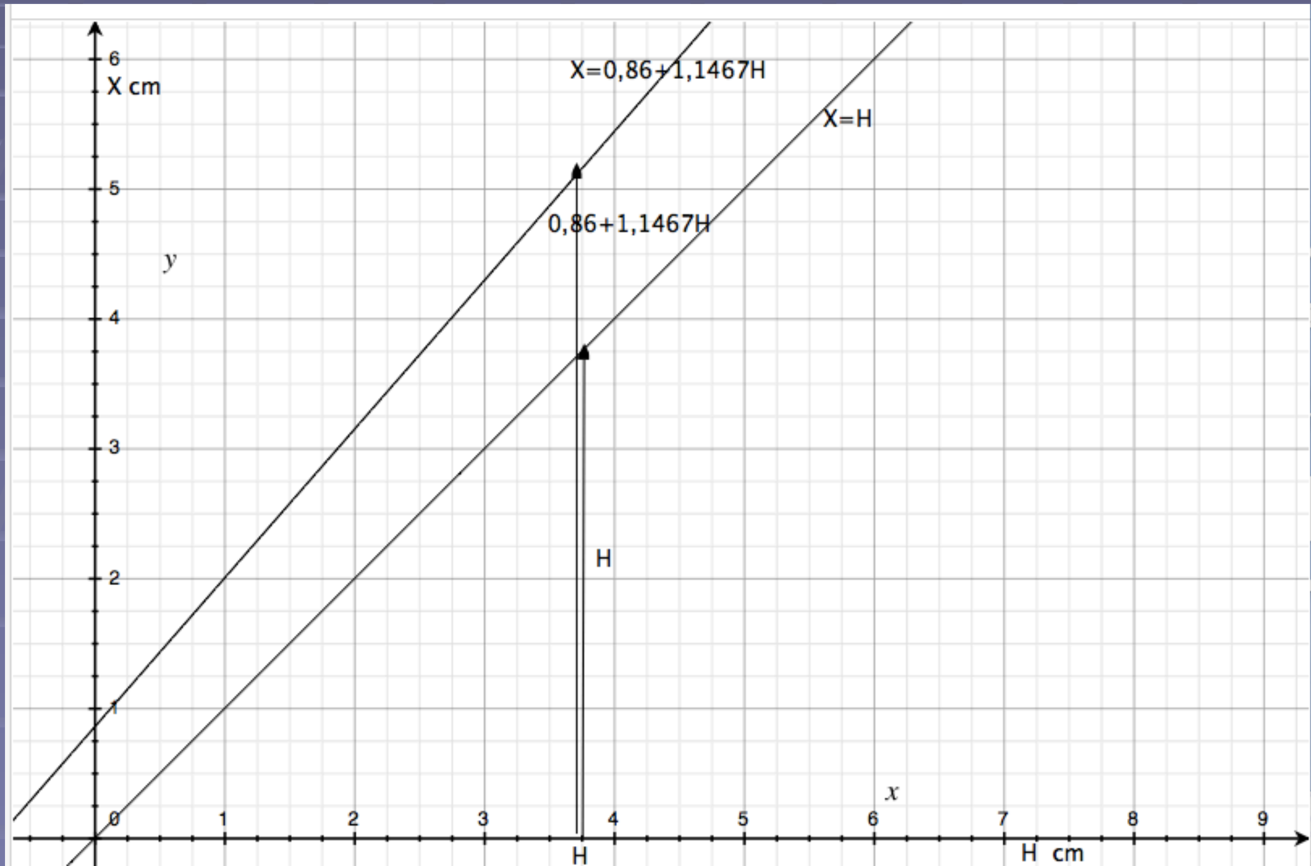
et donc

$$X > H.$$

Conclusion: la boîte de base 3 × 3 ne flottera jamais quelque soit son hauteur H.

Boites de base 3 cm × 3 cm

- Interprétation graphique: $X = 0{,}86+1{,}14666H$ est une fonction du premier degré de la variable H



Modèle algébrique $XL^2 = 0{,}86 \cdot (L^2 + 4HL)$: boites de base 3,5 cm × 3,5 cm

- 3,5×3,5×2

$$\underbrace{\underbrace{X(3{,}5)^2}_{\substack{\text{volume}\\ \text{de l'eau}}}}_{\substack{\text{masse de}\\ \text{l'eau}}} = \underbrace{0{,}86\underbrace{\left((3{,}5)^2 + 4 \cdot 2 \cdot 3{,}5\right)}_{\substack{\text{surface totale}\\ \text{de la boite}}}}_{\textit{masse}\text{ de la boite}}$$

$$12{,}25X = 0{,}86 \cdot (12{,}25+28)$$

$$X = 2{,}8433$$

$$X > 2(\text{hauteur de la boite})$$

Modèle algébrique $XL^2 = 0{,}86\cdot(L^2 + 4HL)$: boites de base 3,5 cm × 3,5 cm

-

  - 3,5×3,5×3,7

$$\underbrace{\underbrace{X(3{,}5)^2}_{\text{volume de l'eau}}}_{\text{masse de l'eau}} = \underbrace{0{,}86\underbrace{\left((3{,}5)^2 + 4\cdot 3{,}7\cdot 3{,}5\right)}_{\text{surface totale de la boîte}}}_{\text{masse de la boite}}$$

$$12{,}25X = 0{,}86\cdot(12{,}25+51{,}8)$$

$$X = 4{,}4966$$

$$X > 3{,}7 \ \text{(hauteur de la boite)}$$

Modèle algébrique $XL^2 = 0{,}86\cdot(L^2 + 4HL)$: boites de base 3,5 cm × 3,5 cm

-
  - 3,5×3,5×8

$$\underbrace{\underbrace{X(3{,}5)^2}_{\substack{\text{volume}\\ \text{de l'eau}}}}_{\substack{\text{masse de}\\ \text{l'eau}}} = \underbrace{0{,}86\underbrace{\left((3{,}5)^2 + 4\cdot 8\cdot 3{,}5\right)}_{\substack{\text{surface totale}\\ \text{de la boite}}}}_{\text{masse de la boite}}$$

$$12{,}25X = 0{,}86\cdot(12{,}25+112)$$

$$X = 8{,}7229$$

$$X > 8 \ \text{(hauteur de la boite)}$$

Modèle algébrique $XL^2 = 0{,}86 \cdot (L^2 + 4HL)$: boites de base 3,5 cm × 3,5 cm

- Peut-on prouver que les boites de base 3,5×3,5 coulent toujours ?

$$\mathbf{3{,}5^2\, X = 0{,}86 \cdot (3{,}5^2 + 4 \times 3{,}5 \times H).}$$

D'où $X = 0{,}86 + 0{,}9828H$

La boîte flotte pour la valeur de H telle que $X < H$:

$$0{,}86 + 0{,}9828H \leq H$$

d'où

$$0{,}86 \leq H - 0{,}9828H$$

$$0{,}86 \leq 0{,}01714H$$

$$50{,}1666\ldots \leq H$$

Condition de flottaison pour la boîte de base 3,5×3,5 :

$$\mathbf{H \geq 50{,}1666\ldots}$$

Modèle algébrique $XL^2 = 0{,}86\cdot(L^2 + 4HL)$: boites de base 5 cm × 5 cm

5×5×2

$$\underbrace{\underbrace{X5^2}_{\text{volume de l'eau}}}_{\text{masse de l'eau}} = \underbrace{0{,}86\underbrace{\left(5^2+4\cdot 2\cdot 5\right)}_{\text{surface totale de la boite}}}_{\text{masse de la boite}}$$

$$25X = 0{,}86\cdot(25+40)$$

$$X = 2{,}236$$

$$X > 2 (\text{hauteur de la boîte})$$

Modèle algébrique $XL^2 = 0{,}86\cdot(L^2 + 4HL)$: boites de base 5 cm × 5 cm

5×5×3,5

$$\underbrace{\underbrace{X5^2}_{\text{volume de l'eau}}}_{\text{masse de l'eau}} = \underbrace{0{,}86\underbrace{\left(5^2+4\cdot 3{,}5\cdot 5\right)}_{\text{surface totale de la boite}}}_{\text{masse de la boite}}$$

$$25X = 0{,}86\cdot(25+40)$$

$$X = 3{,}268$$

$$X < 3{,}5 \quad \text{(hauteur de la boite)}$$

Modèle algébrique $XL^2 = 0{,}86\cdot(L^2 + 4HL)$: boites de base 5 cm × 5 cm

5×5×5

$$\underbrace{\underbrace{X5^2}_{\text{volume de l'eau}}}_{\text{poids de l'eau}} = \underbrace{0{,}86\underbrace{\left(5^2+4\cdot 5\cdot 5\right)}_{\text{surface totale de la boîte}}}_{\text{poids de la boîte}}$$

$$25X = 0{,}86\cdot(25+4\cdot 25)$$

$$X = 0{,}86\cdot 5 = 4{,}3$$

$$X < 5 \quad \text{(hauteur de la boîte)}$$

Modèle algébrique $XL^2 = 0{,}86 \cdot (L^2 + 4HL)$: boites de base 5 cm × 5 cm

5×5×8

$$\underbrace{\underbrace{X5^2}_{\substack{\text{volume}\\\text{de l'eau}}}}_{\substack{\text{poids de}\\\text{l'eau}}} = \underbrace{0{,}86\underbrace{\left(5^2 + 4 \cdot 8 \cdot 5\right)}_{\substack{\text{surface totale}\\\text{de la boîte}}}}_{\text{poids de la boîte}}$$

$$25X = 0{,}86 \cdot (25+160)$$

$$X = 6{,}364$$

$$X < 8 \quad \text{(hauteur de la boîte)}$$

Modèle algébrique $XL^2 = 0{,}86\cdot(L^2 + 4HL)$: Modèle général des boites de base 5 cm × 5 cm

- Peut-on déterminer toutes les hauteurs des boites de base 5×5 pour qu'elles flottent ?

$$5^2\, X = 0{,}86(5^2 + 4\times 5\times H).$$

D'où $X = 0{,}86+0{,}688H$

La boîte flotte pour la valeur de H telle que $X \leq H$:

$$0{,}86+0{,}688H \leq H$$

ou telle que

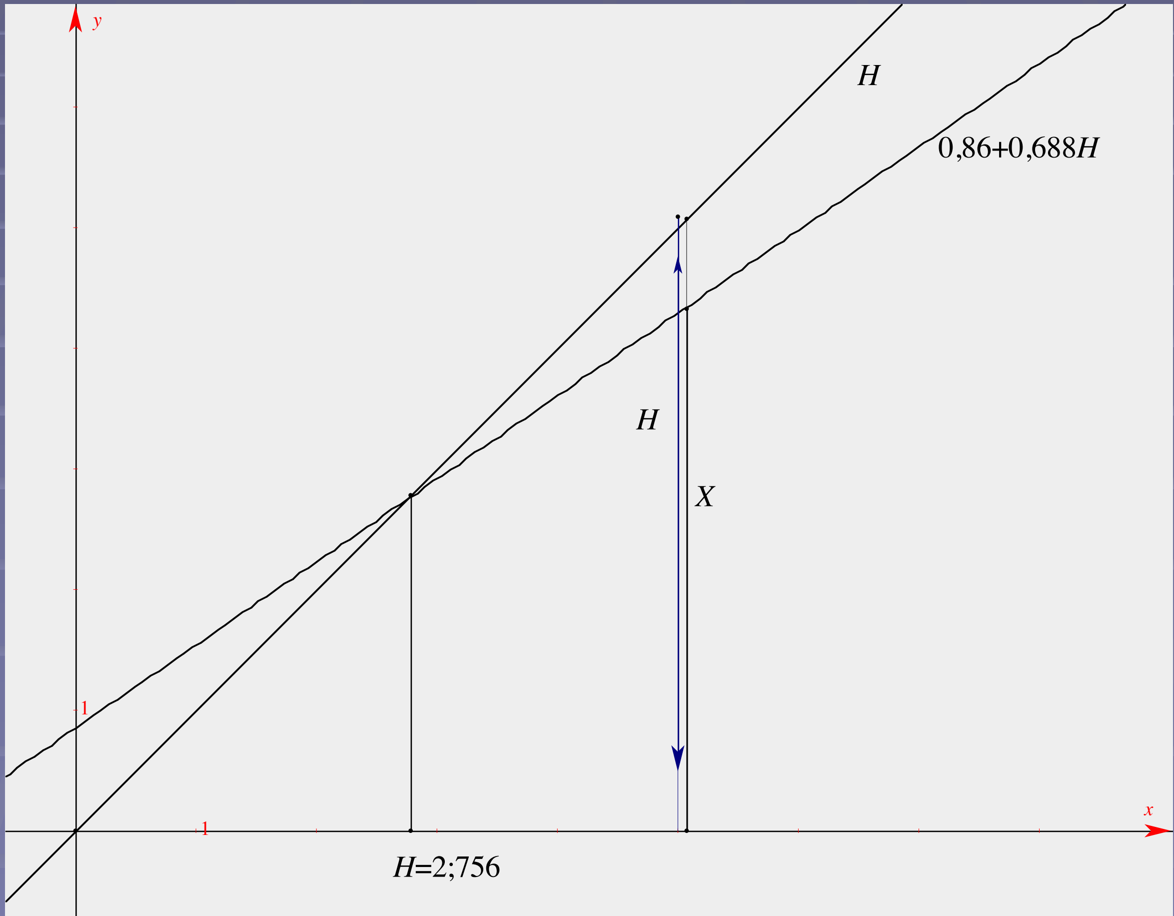
$$0{,}86 \leq 0{,}312H$$

Condition de flottaison pour la boîte 5×5 : $H \geq 2{,}756\ldots$

Boites de base 5 cm × 5 cm

- Interprétation graphique

  X* = 0,86+0,688*H*   : *X* est une fonction du premier degré de *H



Modèle algébrique $XL^2 = 0{,}86\cdot(L^2 + 4HL)$: Modèle général des boites de base de base 10 cm × 10 cm

- **Peut-on déterminer la hauteur de la boîte de base 10 × 10 pour qu'elle coule ?**

$$10^2\, X = 0{,}86\times (10^2 + 4\times 10\times H).$$

D'où $\mathbf{X = 0{,}86+0{,}344\, H}$

La boîte flotte pour la valeur de *H telle que*

$$H \geq 0{,}86+0{,}344$$

ou telle que

$$0{,}656H \geq 0{,}86$$

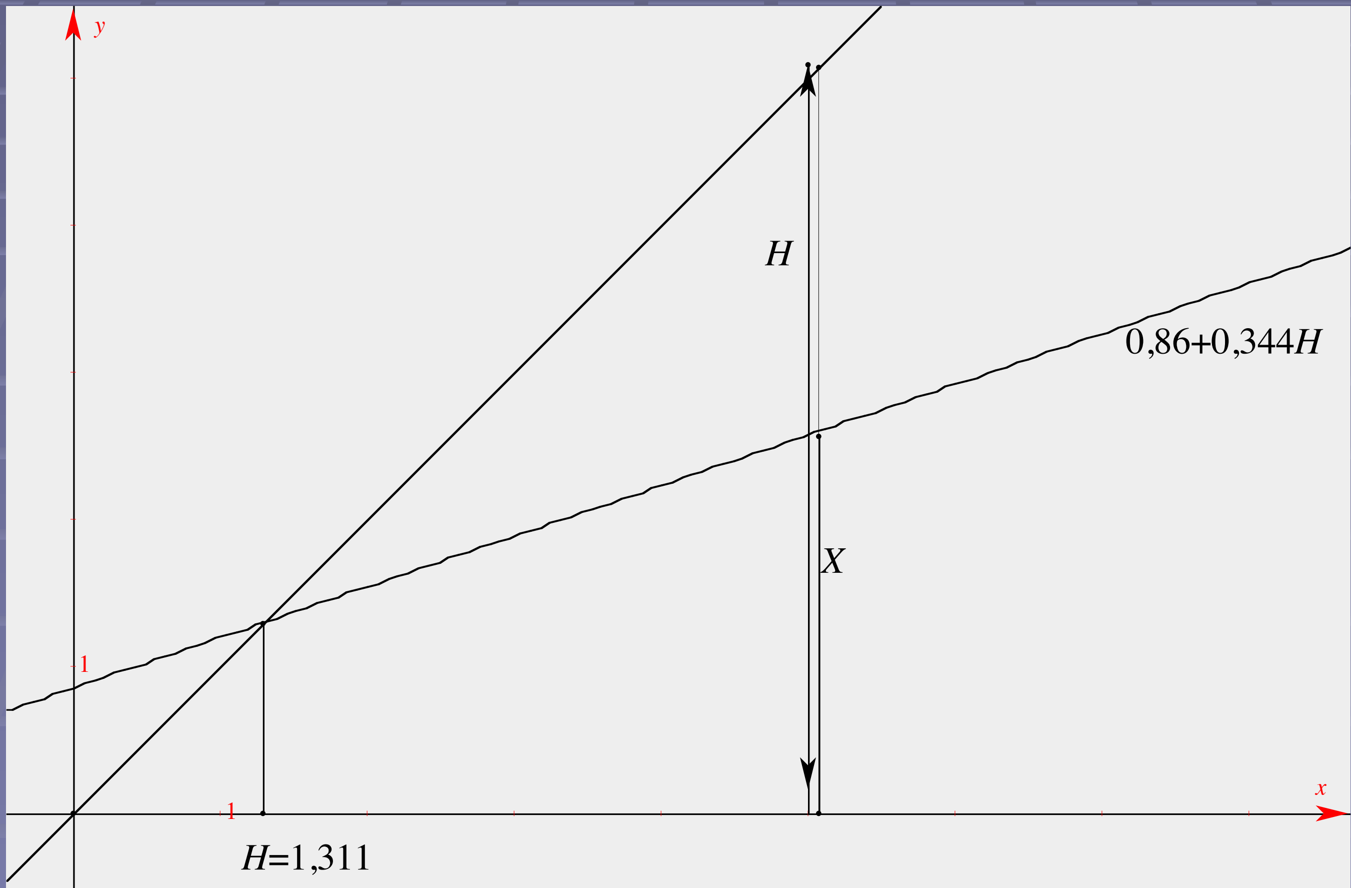
Condition de flottaison pour la boîte de base 10×10 :

$$\mathbf{H \geq 1{,}3109\ldots}$$

Modèle algébrique $XL^2 = 0{,}86\cdot(L^2 + 4HL)$: boites de base 10 cm × 10 cm

Interprétation graphique

$X = 0{,}86+0{,}344\ H$: X est une fonction du premier degré de H



Premières conclusions

- Il y a des bases $L \times L$ pour lesquelles les boites ne flottent pas quelle que soit la hauteur H
- Lorsqu'une boîte flotte pour une base donnée $L \times L$, *alors* il existe une valeur minimale de H en dessous de laquelle la boîte coule.

D'où

- Il existe une condition de **flottabilité** imposée à L pour une boîte de base $L \times L$
- Il existe une condition de **flottaisons** imposée à H pour une boîte de base $L \times L$ satisfaisant la condition de la flottabilité

Condition de la flottabilité d’une famille de boites

Modèle algébrique général

Quelles sont les valeurs de *L* pour lesquelles les boites ne flottent pas quelle que soit la hauteur *H* ? (condition de flottabilité)

Soit H la hauteur de la boîte, X la hauteur de la partie immergée de la boîte de base $L \times L$.

$$XL^2 = 0{,}86(L^2+4LH)$$

D'où X est une fonction du premier degré de H:

$$X = 0{,}86+(3{,}44/L)H$$

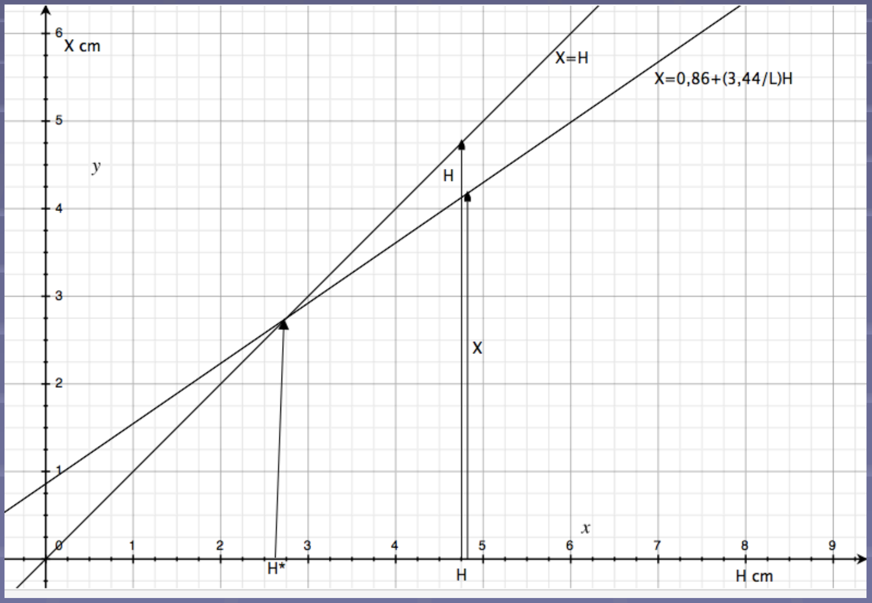
- Si X<H, alors la boite flotte.
- Si $X>H$ alors la boîte coule.
- Si $X=H$ alors la boite juste flotte.

Condition de flottabilité

Interprétation graphique:

X est une fonction du premier degré de H: $\boldsymbol{X = 0{,}86+(3{,}44/L)H}$

.



Condition de **flottabilité** pour une boîte de base $L \times L$:

l'équation $H = 0{,}86+(3{,}44/L)H$ doit avoir une solution positive

$H(1-3{,}44/L) = 0{,}86$ d'où $3{,}44/L<1$ ou $L>3{,}44$

Condition de flottabilité

Interprétation:

- Si une boite de base L cm × L cm ne flotte pas, on peut espérer arranger les choses si, en augmentant sa hauteur de h cm, on ajoute un espace dont la masse en eau sera supérieure à la masse de plomb ajoutée .
- Le volume ajouté : L×L×h cm^3 - la masse d'eau correspondant : L×L×h g
- La masse de plomb ajouté : 0,86 × 4×L×h g = 3,44×L×h g

La masse d'eau plus grande que la masse de plomb ajoutée - boite pourrait flotter

$$L \times L \times h > 3{,}44 \times L \times h$$

lorsque

$$L > 3{,}44$$

Modèle algébrique pour les boites cubiques

- **Quelles sont le boites cubiques qui flottent ?**

  La condition de la flottabilité *L*>3,44 ne suffit pas:

  La boite 3,5×3,5×3,5   coule car *3,5<50,1666…*

  (*50,1666…* est la hauteur minimale des boites de base 3,5×3,5 pour qu'elles flottent)

Modèle algébrique pour les boites cubiques

Le modèle général

$$XL^2 = 0{,}86(L^2+4LH)$$

devient

$$XL^2 = 0{,}86(L^2+4L^2) = 0{,}86\times 5L^2 = 4{,}3L^2$$

d'où

$$X = 4{,}3$$

- Conclusions:
  - Les boites cubiques d'arrête $L \geq 4{,}3$ sont toutes flottantes
  - La hauteur immergée est égale à $X = 4{,}3$ cm quelle que soit une boîte cubique

Modèle algébrique pour les boites cubiques

Y a t-il d'autres familles de boites caractérisées par une même hauteur immergée?

Modèle algébrique générale pour la hauteur X immergée:

$$X = 0{,}86+(3{,}44/L)H$$

ou

$$\mathbf{X = 0{,}86+3{,}44(H/L)}$$

La hauteur immergée *X* est une fonction du rapport *H/L.*

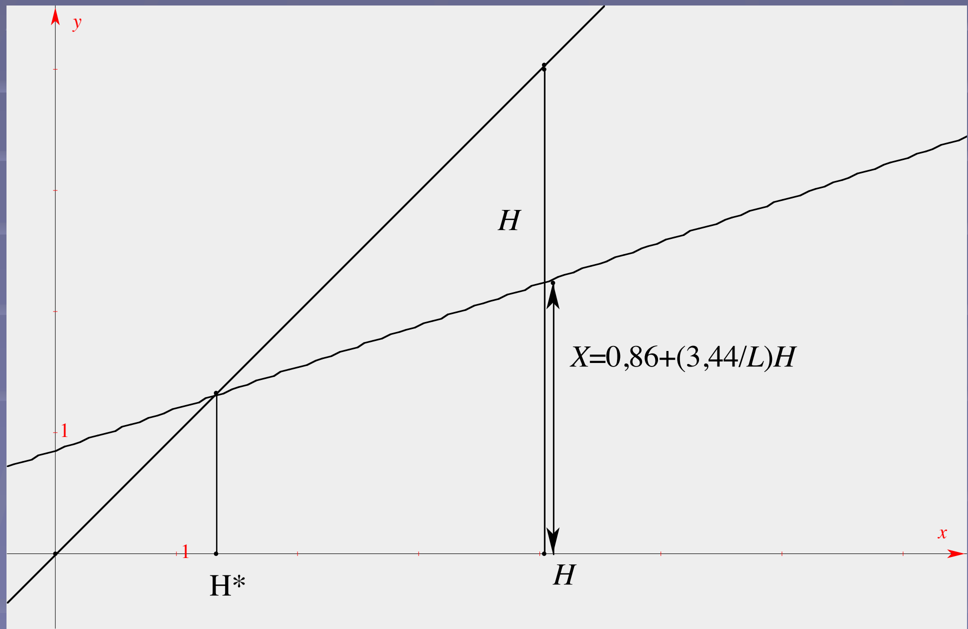
Conclusions : toutes les boites de même rapport *H/L* auront une même hauteur immergée

La valeur minimale de la hauteur pour qu 'une boîte flotte

- Quelle est la valeur minimale *H** de la hauteur requise pour qu'une boîte de base *L×L* donnée flotte?

  Condition de la flottabilité satisfaite: $L>3{,}44$

  Modèle général: $X = 0{,}86+(3{,}44/L)H$



La valeur minimale de la hauteur pour qu ‘une boîte flotte

La hauteur minimum H^* requise pour qu’une boîte de la largeur donnée L flotte doit satisfaire la condition

$$H^*=0{,}86+(3{,}44/L)H^*$$

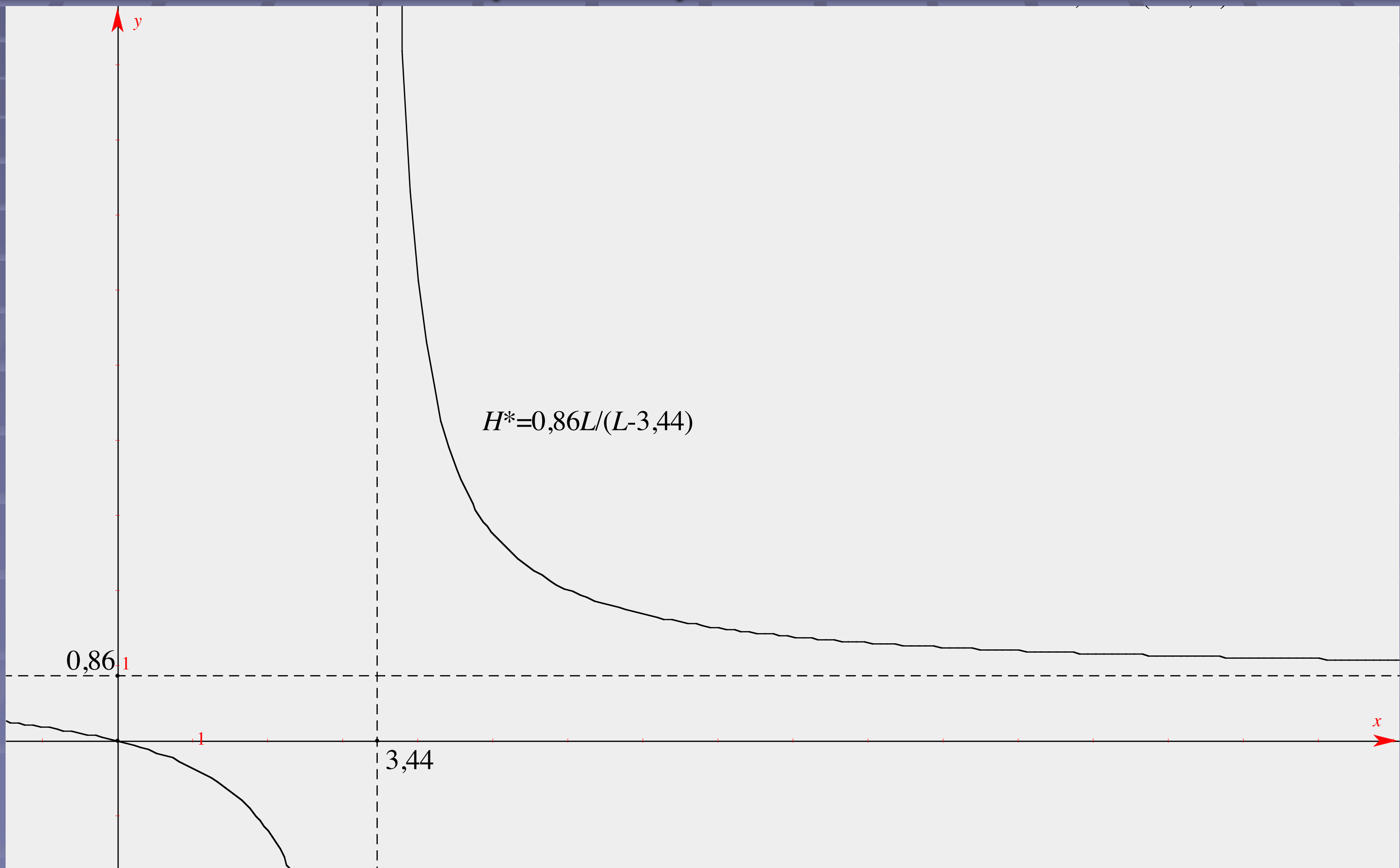
d’où

$$H^*=0{,}86L\ /\ (L-3{,}44)$$

La valeur minimale H^* est une fonction homographique de L

La valeur minimale de la hauteur pour qu'une boîte flotte

Etude de $H^*=0{,}86L\ /\ (L-3{,}44)$ en fonction de L



La valeur minimale de la hauteur pour pour qu 'une boîte flotte

Etude de $H^*=0{,}86L/(L-3{,}44)$ en fonction de L

- Domaine de la validité de $H^*(L)$: $L>3{,}44$, le même que le domaine de la flottabilité;
- Asymptote horizontale $H^* = 0{,}86$: la hauteur minimale nécessaire pour que la boîte continue à flotter s'approche de 0,86
- Asymptote verticale $L= 3{,}44$: lorsque L s'approche de 3,44 , la hauteur minimum requise H^* tend vers l'infini (elle s'envole);
- La fonction est décroissante, les valeurs de H^* diminuent lorsque les valeurs de L augmentent

La valeur minimale de la hauteur pour qu’une boîte flotte

- **Comment interpréter le fait que la hauteur minimale nécessaire pour que la boîte continue à flotter s’approche de 0,86 ?**

- La valeur minimale de la hauteur *X* de flottaison est de 0,86 cm ;

$$X = 0{,}86 + (3{,}44/L)H$$

- La hauteur *H* d’une boite qui flotte ne peut pas être plus petite que 0,86 cm.
- Une boite de hauteur de 0,86 cm ne peut pas flotter:

$$\mathbf{X = 0{,}86 + (3{,}44/L) \bullet 0{,}86 >} \; 0{,}86$$

Mais plus la base est grande, plus la masse correspondant aux parois verticales devient négligeable par rapport à celle de la base et on peut sans doute sentir que cette hauteur peut ‘théoriquement’ être approchée aussi près qu’on le veut pourvu que l’on prenne une base suffisamment grande.

Conclusions didactiques

La contribution de l'activité de la modélisation fonctionnelle à l'appréhension du concept de fonction lui-même

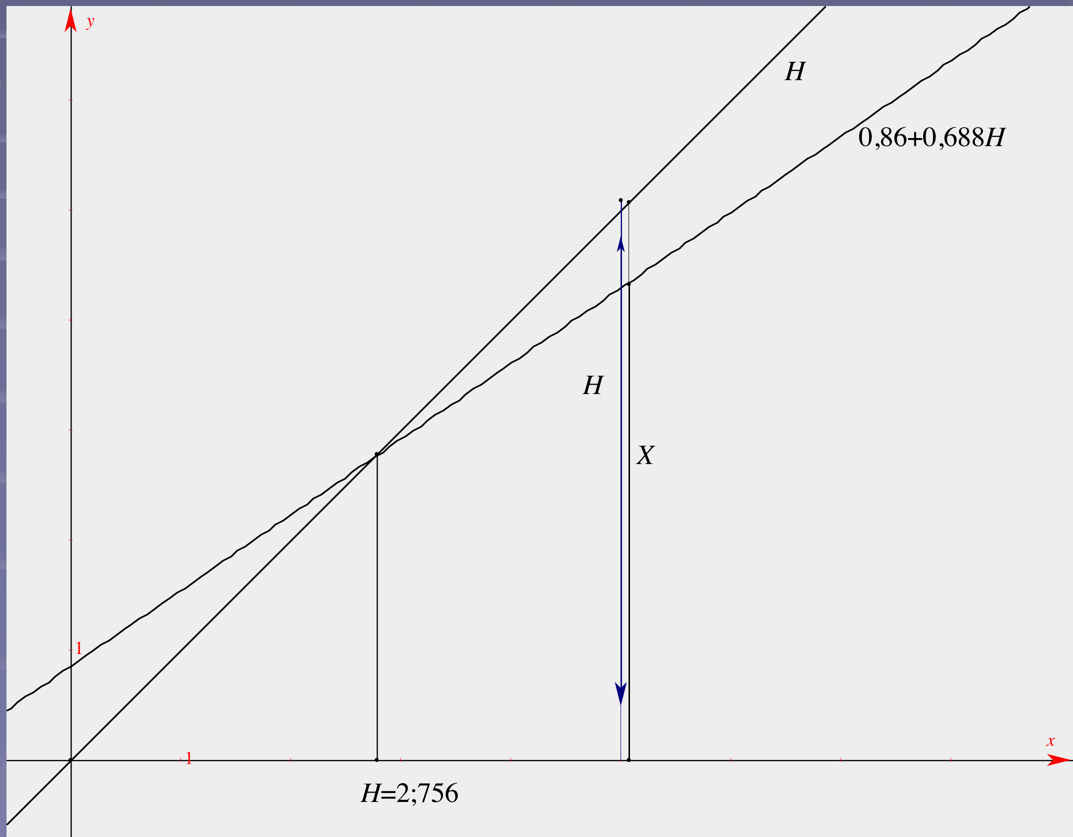
- La nécessité de distinguer la variable indépendante de la variable dépendante
- La nécessitée de discriminer des rôles des lettres entre les variables et les paramètres :

$$X = 0{,}86+(3{,}44/L)H \quad ou \ X = 0{,}86+3{,}44H/L$$

- L'intérêt d'étudier les fonctions par classes (classe de fonctions du premier degré, classe de fonctions homographiques) et de connaître les rôles des paramètres
- La nécessité d'avoir une convention de la représentation graphique d'une fonction

Conclusions didactiques

- Convention pour les graphiques: la valeur de la variable indépendante *H* est représentée par le segment horizontal, la valeur de la variable dépendante est représentée par le segment vertical placé au bout du segment horizontal, le graphique est la courbe dessinée par les sommets de tous les segments verticaux



Conclusions didactiques

- Modèle algébrique général de la hauteur de la partie immergée X - famille de fonctions du premier degré :
  - $X= 0{,}86+(3{,}44/L)H$: H variable indépendante, X variable dépendante, L paramètre (condition sur L: $L>3{,}44$)
  - $X= 0{,}86+3{,}44H/L$: H/L variable indépendante, X variable dépendante (condition sur L: $L>3{,}44$)

- Modèle algébrique général de la valeur minimale de la hauteur d'une boite - fonction homographique
  - $H^*=0{,}86L/(L-3{,}44)$: L variable indépendante, H^* variable dépendante

Conclusions didactiques

La résolution du problème des boites doit être envisagée dans la perspective

« de la modélisation (de la construction de formules) et de l'emplois des formules par le biais de l'étude de fonctions - processus solidaire que le langage algébrique ainsi entendu permet de mener à bien » (Chevallard)

Références

Chevallard Y., (1989) *Arithmétique, Algèbre, Modélisation, étapes d'une recherche*, ed. IREM Aix-Marseille

Krysinska M., (2017) Boites qui flottent, boites qui coulent, *in* Gilbert T., Ninove L., *Le plaisir de chercher en mathématiques*, ed. Cripedis et Presses Universitaires de Louvain