



## L'inégalité (chantier non clôturé)

ANDRÉ WAUTERS

Descriptif annoncé en février

### L'inégalité, une étape indispensable dans la compensation

On insiste énormément sur l'égalité lorsqu'on travaille, par exemple la compensation ; or l'élève peut penser que derrière le signe « = », il doit écrire une réponse. Prendre le temps de s'arrêter à l'inégalité lors d'un raisonnement (calcul, équations) permet d'une part de redonner du sens au signe « = » et d'autre part de mieux comprendre ce que l'on fait.

Public concerné : élèves de 8 à 12 ans

#### Contenu de ce jour

1. S'arrêter à l'inégalité dans la compensation, pourquoi ?
2. L'inégalité pour travailler le "Si ..... alors ....."

**Ce qui suit est un chantier. Ce document ne prétend pas fournir des certitudes. Il a pour vocation de permettre une réflexion, une prise de recul sur certaines habitudes de classe par rapport à la compensation.**

## 1. S'arrêter à l'inégalité dans la compensation, pourquoi ?

### Origine de ce chantier sur inégalité et compensation

Une difficulté d'élèves :

Dans un calcul comme  $753 - 288$ , lorsqu'ils font  $753 - 288 = 765 - 300 = 465$ , mes bons élèves écrivent ensuite  $465 - 12 = 453$ .

Mes hypothèses :

- Es perturbés par l'absence de ressemblance entre le calcul de départ  $753 - 288$  et le calcul d'arrivée et/ou influence de la décomposition (longuement travaillée et utilisée)
- Non compréhension de la compensation : mémorisation d'un truc, un mécanisme et non un automatisme.
- ...

Une question fréquente :

*"Mr c'est normal qu'on ait 2 fois la même réponse ?"*

Qu'ont induit les pratiques de classe chez ces élèves ?

En quoi cette croyance / certitude va-t-elle bloquer les élèves par exemple pour la compensation ?

Une question que JE me pose à propos du passage du matériel au calcul

Souvent on travaille, avec du matériel (tours de blocs, bandelettes de papier, une balance à plateaux ...) pour montrer ce qu'est compenser. MAIS, l'élève voit-il le lien entre ce matériel (des petits nombres ou des mesures) et les calculs qu'il devra effectuer (grands nombres, nombres décimaux) ? ATTENTION : ne pas supprimer l'utilisation de ce matériel. Il reste indispensable dans TOUTES les années. Mais il faut aider les élèves à faire le transfert entre 2 tours de blocs duplos et  $425 - 187$  ?

Un constat que je fais :

Calculer c'est remplacer un calcul compliqué par un ou des calculs faciles. Pour ce faire, je choisis parmi l'infinité de calculs possibles celui (ceux) qui seront faciles.

Le matériel ne montre pas l'idée d'arriver à une situation facile. Avec le matériel, aucune situation n'est plus facile ni plus difficile qu'une autre.

## Pistes de travail que j'ai choisies en classe

### 1. LE principe du calcul mental

Remplacer un calcul compliqué par un calcul ou une suite de calculs faciles qui donneront la même réponse que si on faisait le calcul compliqué à la calculette.

Il y a une infinité de ... et j'ai un choix à poser

### 2. Boite à outil individuelle de calculs. (dans mon cerveau, il y a ...)

- Inventaire de ce qu'il y a dans ma boite à outils
  - sens des opérations, procédures ou procédés ou trucs ou propriétés
  - liste de calculs faciles et/ou types de calculs faciles
- Remplir les boites à outils individuelles
  - ajout d'une nouvel apprentissage (sens opération / propriété / calculs par cœur ...)
  - Est-ce simplement un ajout ou dois-je réorganiser (jeter / modifier) ?

### 3. Calculer demande d'anticiper (voir l'invisible ou le non encore visible)

Présentation des étapes d'une décomposition ou compensation en lignes les unes en dessous des autres avant d'arriver à une présentation en 1 ligne.

Décomposition	Compensation
ligne n° 1 : $234 - 147 =$	$434 - 178 =$
ligne n° 2 : $234 - 34 - 100 - 13 =$	$+22$
ligne n° 3 : $(234 - 34) - 100 - 13 =$	$434 - 200 =$
ligne n° 4 : $(200 - 100) - 13 =$	$+ 22$
ligne n°5 : $100 - 13 = 87$	$446 - 200 =$

A quel moment l'élève a-t-il dû anticiper ? Où est l'invisible ?

Dans la décomposition, c'est le nombre 234 qui influence le choix de la décomposition, tandis que dans la compensation c'est le -178 qui détermine le choix.

Quelle différence y a-t-il entre les lignes dans chaque colonne ?

## La compensation dans MA classe

A) Compenser c'est remplacer le calcul à faire par un autre calcul plus facile qui donnera la même réponse.

- savoir dire pourquoi c'est normal ou pas d'avoir 2 fois la même réponse.
- qu'est-ce qu'un calcul facile ? facile pour qui ? → banque individuelle de calculs faciles
- Il y a une infinité de calculs qui donnent telle réponse. Lequel choisir ?

B) Lorsqu'un expert utilise la compensation :

- soit il a automatisé la compensation ou il connaît le mécanisme = le truc (compensation parallèle/croisée) OU un truc spécifique ex. pour : 2,5 on multiplie par 4 les 2 nombres. **PAS besoin de l'inégalité ici.**
- soit il construit son calcul facile  
Il travaille en 2 étapes : modifier un nombre et modifier ensuite l'autre en veillant à ce qu'il donne un calcul équivalent au calcul de départ



Ce sont ces 2 étapes (**modifier un nombre et modifier ensuite l'autre**) qu'on travaille lorsqu'on veut apprendre la compensation aux élèves.

C) 2 types de tâche habituelles lorsqu'on travaille la compensation

1<sup>er</sup> type de tâche : (exemple : soustraction) On fait des listes de paires d'objets qui ont tous comme caractéristique d'avoir la même réponse (ex. des paires de bandelettes qui ont 3 cm d'écart). On cherche comment il se fait qu'on ait toujours le même écart.

Ce travail met notamment en évidence le fait qu'on peut avoir plusieurs situations qui donnent le même résultat. On travaille sur l'idée "plusieurs calculs" peuvent donner la même réponse.

2<sup>e</sup> type de tâche : (exemple : addition) On donne un objet A et un objet B, sur lesquels on opère, ce qui donne une réponse (R). On modifie un des objets et on demande de modifier l'autre pour avoir la même réponse (R).

Ce travail permet de réfléchir sur "comment faire pour retrouver la situation de départ". On ne sait pas pourquoi on veut retrouver la réponse de départ. D'ailleurs les élèves sont très pragmatiques. Pour eux si on a ajouté 2 à A, il suffit de le retirer de A pour retrouver la situation de départ. Pourquoi aller modifier B alors que c'est si simple d'annuler ce qu'on a fait ?

C'est dans ce type de tâche que l'arrêt sur image de l'inégalité s'impose.

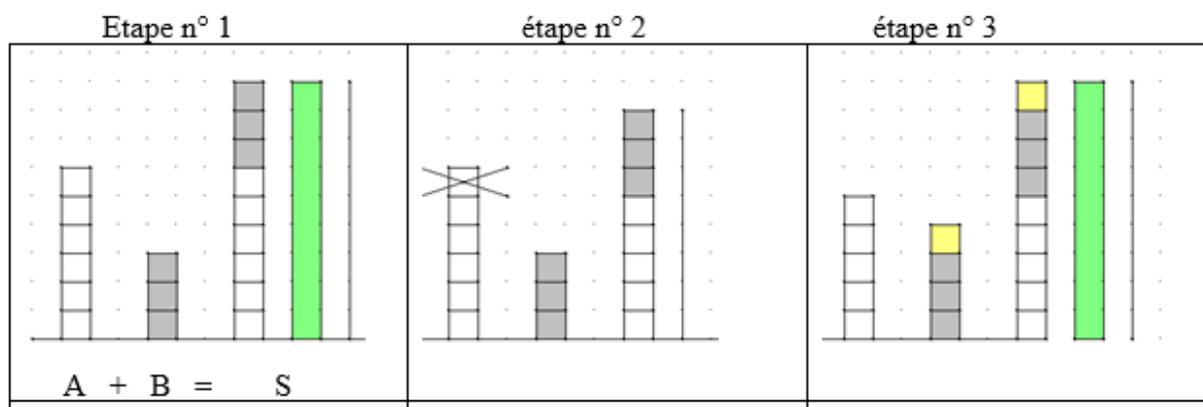
J'ai une étape n° 1  $A + B = S$ . Je supprime un élément de A. Quelle est la conséquence de cette action ?

On obtient une étape n° 2  $C + B = T$  avec T qui vaut 1 en moins que S. L'élève voit-il où est l'inégalité ?

L'étape n° 1 n'est pas égale à l'étape 2.

L'étape n° 2 n'est pas égale à la n° 3 mais l'étape n° 1 sera égale à la n°3 si on a compensé correctement.

Exemple de représentation plus explicite (à verbaliser)



Ce travail avec du matériel reste indispensable mais il faut rendre explicite l'étape d'inégalité transitoire. Il faut être capable de verbaliser :

- la conséquence que la modification d'un terme aura → on obtient une inégalité de situation matérielle et donc une inégalité de réponse
- la façon de rétablir l'égalité.

## Et avec des calculs ? (évolution dans MA classe) Je n'e' suis pas encore satisfait. (chantier)

### Modèle 1 (insister sur ce qui donnera un calcul facile)

Départ  $324 - 187 = \text{réponse}$

Mon choix : ajouter 13 à 187 → 200 parce que faire - 200 est facile

1<sup>ère</sup> modif  $324 - 200 = \text{réponse}$  La réponse est plus petite que la rép. de  $324 - 127$ . Plus petite de 13

2<sup>e</sup> modif : j'ajoute 13 à 324 et la réponse augmente de 13. **Remarque du 13/11/17 Je constate que cette formulation contient beaucoup d'implicite. Je n'explique pas pourquoi le fait d'ajouter 13 à 324 entrainera une augmentation de 13 sur la réponse. En classe, on a régulièrement fait +13 et - 13 à 324 et on a expliqué pourquoi dans un cas la réponse augmentait et dans l'autre elle diminuait.**

### Modèle 2 (insister sur l'inégalité)

Etape n° 1

$$324 - 187 = \text{rép 1}$$

$$\begin{array}{l} \uparrow +13 \\ 324 - 200 = \text{rép 2} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \uparrow +13 \\ 324 - 200 = \text{rép 2} \end{array}} \right\} \text{la rép. 2 est plus petite de 13 que la rép 1 que je cherche}$$

Etape n° 2

$$324 - 187 = \text{rép 1}$$

$$\begin{array}{l} \uparrow +13 \\ 324 - 200 = \text{rép 2 calcul facile} \end{array}$$

$$\uparrow +13$$

$$337 - 200 = 137 \rightarrow 137 \text{ est la même réponse que celle de } 324 - 187$$

### Modèle 3

		égalité ou inégalité entre les lignes ?
calcul à faire	$324 - 187 = \text{rép 1}$	
calcul intermédiaire	$324 - 200 = \text{rép 2}$	$324 - 187 \neq 324 - 200$
calcul facile final	$337 - 200 = \text{rép 1}$	$324 - 187 = 337 - 200 = 137$

Chaque calcul devra, dans un premier temps, être effectué selon les 3 modèles 1,2,3.

Par la suite, il pourra utiliser un seul modèle mais en changeant de modèle à chaque calcul. L'élève devra à tout moment être capable de verbaliser ce qu'il écrit.

Une fois que c'est automatisé (pas mécanisé), on passe à des modèles plus économiques en écriture et donc en temps.

### Modèle 5 a

$$324 - 187 = ?$$

$$\begin{array}{l} \uparrow +13 \\ 324 - 200 = 124 \end{array}$$

$$\downarrow +13 \\ 337 - 200 = ?$$

137

### Modèle 5 b avec des lettres

$$\begin{array}{l} A + B = C \\ \downarrow +5 \text{ J'ajoute 5 à A, conséquence la réponse C augmentera de 5 (E = C+5)} \\ D + B = E \\ \downarrow -5 \text{ Pour retrouver la réponse C, je dois retirer 5 à B} \\ D + F = C \end{array}$$

### Modèle 6

$$324 - 187 = (324 + 13) - (187 + 13) = 337 - 200 = 137$$

Modèle qui finira en  $324 - 187 = 337 - 200 = 137$

Remarque : Dans ce dernier modèle (fréquemment utilisé au CEB) la compensation (agir sur un élément et réagir sur l'autre) est tout à fait cachée. On ne montre que les résultats des actions et réactions.

### Remarques faites par les participants lors de l'atelier du 11 novembre 2017.

(Je ne me souviens pas de toutes)

A la p 1 de ce document, à propos des hypothèses pour expliquer le -12 que certains élèves font après avoir compensé

- Comme ils ont ajouté 12 à un moment, ils trouvent normal de le retirer à un autre moment.

A propos de l'infinité de possibilités de décomposition ou de compensation :

- travailler sur l'idée "quel calcul vais-je choisir dans ce cas-ci ?"

Travailler aussi le savoir conditionnel (J. Tardif) :

- Quand est-ce utile, intéressant d'utiliser la compensation ? Dans quel cas n'est-elle pas intéressante ?  
Exemple :  $245 - 87$  OUI mais  $245 - 37$  NON
- proposer plusieurs compensations pour un même calcul et demander celle(s) qu'ils choisissent et pourquoi ?  
Exemples  $14,2 - 7,8 =$

compensation n° 1	compensation n° 2	compensation n° 3	compensation n° 4
$14,2 - 7,8 =$	$14,2 - 7,8 =$	$14,2 - 7,8 =$	$14,2 - 7,8 =$
$-0,8 \quad -0,8$	$+0,2 \quad +0,2$	$-0,4 \quad -0,4$	$+2,2 \quad +2,2$
$\dots\dots - \dots\dots =$			

## 2. L'inégalité pour travailler le "Si ..... alors ....."

Activité : "Comparer le contenu de 2 enveloppes"

But :

- travailler sur la modification d'un élément d'une situation A - B et chercher la conséquence.
- Travailler le concept "Si ..... alors ....."

voir p. suivantes

**Remarque à propos du mot "hypothèse" utilisé dans l'activité:**

En primaire en math et en français, le mot "hypothèse" signifie "quelque chose dont on n'est pas certain", ce sont des suppositions

Dans le secondaire, en math, le mot "hypothèse" a un autre sens " Proposition que l'on accepte comme vraie et à partir de laquelle on raisonne pour résoudre un problème, ou démontrer un théorème".

En math au secondaire, l'équivalent du mot "hypothèse" du primaire est le mot "conjecture".

Activité de 1<sup>ère</sup> année citée par une participante (Martine).

But : modifier un élément d'une situation et voir l'influence

En 1<sup>ère</sup> année, on a des jetons ou cubes ou ... dans chaque main. Que peut-on en dire ?

On met les mains derrière le dos avec les jetons en main. On en laisse tomber un. Que peut-on en dire ?



## L'inégalité (chantier non clôturé)

ANDRÉ WAUTERS

### Situation n° 1 ( départ) :

Voici 2 enveloppes qui contiennent des €. Tout ce qu'on sait, c'est qu'elles ne contiennent pas de cents (pas de 0,50 €/0,20€ /0,10 €/ 0,05€/ 0,02€/ 0,01€).

Quelles hypothèses pouvez-vous formuler si on compare le contenu de ces 2 enveloppes ?

Hypothèses libres.

Hypothèses cadrées

On cherche des hypothèses qui parlent de l'enveloppe qui a le plus ou le moins.

Différentes formulations d'une même hypothèse

Hypothèse 1	Hypothèse 2	Hypothèse 3
La différence en faveur de A pourrait être ..... ..... .....	Il n'y a pas ..... ..... .....	La différence en faveur de B pourrait être ..... ..... .....

Situation n° 2 : Je modifie la situation n°1

**J'ajoute 5€ dans l'enveloppe B.** Comment évolue chaque hypothèse ? (Elles ne changent pas / Elles changent ? Si elles changent, que deviennent-elles ?).

Ce que tu as noté dans les cases "La différence" à la situation n° 1 change-t-il ? Si oui, écris ce que ça devient.

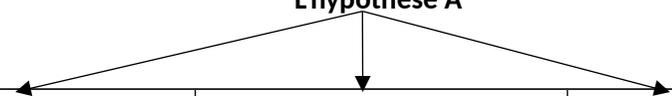
*(Avec des élèves ne pas proposer un tableau en 3 colonnes mais 3 feuilles séparées (1 hypothèse par feuille). Ça permettra de ne se focaliser que sur 1 hypothèse à la fois.)*

Situation n° 3 : Je modifie la situation n° 2

**J'ajoute 2€ dans l'enveloppe A.** Comment évolue chaque hypothèse de la situation n° 2 ? Ce que tu as noté dans les cases "La différence" à la situation n° 1 change-t-il ? Si oui, écris ce que ça devient.



<b>Situation n° 1</b>	comparer le contenu de 2 enveloppes qui contiennent des euros (pas de cents)	
<b>hypothèse A</b>	<b>hypothèse B</b>	<b>hypothèse C</b>
Il y a plus d'euros dans l'enveloppe A que dans la B.	Il y a la même chose dans les 2 enveloppes	Il y a plus d'euros dans l'enveloppe B que dans la A
La différence peut être de 1€, 2€, 3€, ...52€, 1456€, ... en faveur de A	Il n'y a pas de différence. La différence = 0 €	La différence peut être de 1€, 2€, 3€, ...52€, 1456€, ... en faveur de B

<b>Situation n°2</b>	Je reprends les 2 enveloppes de la situation 1 et j'ajoute 5€ dans l'enveloppe B. Comment évoluent les hypothèses A, B et C ?			
<b>L'hypothèse A</b>			<b>L' hypothèse B évolue en</b>	<b>L' hypothèse C évolue en</b>
			↓	↓
<b>hypothèse A 1.</b>	<b>hypothèse A 2.</b>	<b>hypothèse A 3</b>	<b>hypothèse B 1.</b>	<b>hypothèse C 1.</b>
Il y a toujours plus dans l'enveloppe A que dans la B.	Maintenant il y a plus dans la B que dans la A	Maintenant, il y a la même somme dans les 2 enveloppes	Il y a 5€ en plus dans l'enveloppe B.	Il y a encore plus d'euros dans l'enveloppe B que dans la A
<b>Si</b> le A avait 6 € de plus dans la situation 1 <b>alors</b> il y a 2€ de plus dans l'enveloppe A <b>Si</b> le A avait 7 € de plus dans la situation 1 <b>alors</b> il y a 2€ de plus dans l'enveloppe A <b>Si</b> le A avait 8 € de plus dans la situation 1 <b>alors</b> il y a 3€ de plus dans l'enveloppe A Si ... alors ... Si ... alors ... Si ... alors ... etc	<b>Si</b> le A avait 4 € de plus dans la situation 1 <b>alors</b> c'est dans la B qu'il y a plus. (1 €) <b>Si</b> le A avait 3 € de plus dans la situation 1 <b>alors</b> maintenant il y a 2€ de plus dans l'enveloppe B <b>Si</b> le A avait 2€ de plus dans la situation 1 <b>alors</b> il y a 3 € de plus dans l'enveloppe B <b>Si</b> le A avait 1 € de plus dans la situation 1 <b>alors</b> il y a 4€ de plus dans l'enveloppe B	<b>Si</b> le A avait 5 € de plus dans la situation 1 <b>alors</b> il n'y a plus de différence. Il y a la même chose dans les 2 enveloppes. La différence = 0 €	La différence est de 5€ en faveur de B.	La différence peut être de 6€, 7€, 8€, ...57€, 1461€, ... en faveur de B