

# Mises en situation

N. ROUCHE,

*Mathématique et Pédagogie n° 70 - 1989*

## 1. Un problème de robinet

Donnons-nous un exemple de **mise en calcul** qui porte sur une situation familière ou physique.

L'eau qui coule d'un robinet cylindrique, quand elle n'est pas turbulente, a souvent la forme d'une surface de révolution qui s'amincit au fur et à mesure que l'eau s'écarte du robinet. Quelle est cette surface? Supposons que le robinet ait un diamètre intérieur égal à  $2r_0$  et que l'eau en sorte à la vitesse  $v_0$ . Le débit à la sortie du robinet vaut donc  $\pi r_0^2 v_0$ . Ce que l'on voudrait connaître, c'est la fonction  $r(z)$  qui donne le rayon du jet à la distance  $z$  de l'embouchure du robinet. Or qu'est-ce qu'on connaît dans ce problème? L'eau tombe dans le champ de la pesanteur, et on se souvient de la loi de la chute des corps. L'eau accélère en tombant. Donc, plus elle s'éloigne du robinet, plus elle va vite. N'est-il pas normal alors que le jet s'amincisse vers le bas, puisque, clairement, le débit est le même à toutes les hauteurs : l'eau ne s'accumule pas, ne forme bourrelet nulle part? Pour un même débit, si sa vitesse augmente, il faut qu'elle passe par une section de jet plus petite. Alors, pour obtenir  $r(z)$ , ne serait-il pas possible de calculer la vitesse, puis le débit à la distance  $z$ , puis d'exprimer que le débit est le même à la distance  $z$  qu'à l'embouchure du robinet? Voilà un programme de calcul raisonnable. C'est un exemple de calcul qui vient de quelque part et va quelque part. Il reste à l'exécuter, par moments en aveugle. Supposons qu'on ne se souvienne pas de la vitesse en fonction de  $z$  (peut-être même n'a-t-on jamais vu une telle formule). Mais on se souvient

Cet assez long article intitulé *Ils doivent savoir calculer* vitupérait en fait le *drill* : celui-ci n'améliore en rien la compréhension des relations, jugées par la capacité de restituer des faits oubliés à partir de souvenirs d'autres faits, ni la capacité de transférer l'apprentissage. Le calcul est objet de contradiction : il n'est rien en lui-même, ce qui compte c'est ce qu'il permet de faire, à savoir répondre à des questions, résoudre des problèmes. Le calcul en soi est toujours inintéressant. Mais il arrive que les résultats soient significatifs. Là est son unique enjeu. L'auteur déduisait de ces observations que la priorité absolue était « la mise en calcul » : tout calcul qui a du sens vient de quelque part et y retourne; cette mise en calcul devrait dans les classes de mathématique devenir aussi, sinon plus importante que l'exécution du calcul.

des équations plus familières qui donnent la vitesse et l'espace parcouru en fonction du temps, à savoir

$$v(t) = v_0 + gt$$

et

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t,$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur. Pour avoir  $v$  en fonction de  $z$ , il faudra éliminer  $t$  entre ces deux équations. C'est un calcul (aveugle) qui donne

$$v = (2gz + v_0^2)^{\frac{1}{2}}$$

avec un choix, non aveugle, du signe de la racine. On exprime alors l'égalité des débits, à savoir

$$\pi r^2 (2gz + v_0^2)^{\frac{1}{2}} = \pi r_0^2 v_0$$

et on résout (en aveugle) pour obtenir

$$r(z) = r_0 v_0^{\frac{1}{2}} (2gz + v_0^2)^{-\frac{1}{4}}, \quad (1)$$

avec un choix, non aveugle, du signe de la racine. Après, on revient à l'eau qui coule. D'abord  $r(0) = r_0$ , ce qui est rassurant (à défaut de ce résultat, il aurait fallu revoir les calculs). Ensuite, on se dit qu'une racine quatrième croît lentement, bien plus lentement qu'une racine carrée ou même troisième, et donc que l'inverse d'une racine quatrième décroît lentement. N'est-ce pas ce qu'on observe? Le diamètre du jet décroît lentement. Ensuite, on pourra vérifier numériquement le résultat. Mais pour cela, il faudrait connaître  $v_0$ . C'est un autre problème, l'objet d'une autre curiosité. Mais à supposer que la formule trouvée soit juste (et on a quand même des raisons de le penser), puisqu'on peut mesurer  $r_0$  sur le robinet, qu'on connaît  $g$ , qu'on peut se donner un  $z$  et mesurer  $r(z)$ , alors on connaît tout dans la formule sauf  $v_0$  et on pourra calculer  $v_0$ . D'où un calcul (aveugle) : tirer  $v_0$  de la formule obtenue pour  $r(z)$ , ce qui donne

$$v_0 = \frac{\sqrt{2}r^2 g^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}}{(r_0^4 - r^4)^{\frac{1}{2}}}.$$

Une condition nécessaire de validité de cette formule, c'est que son second membre ait bien les mêmes dimensions physiques que le premier, à savoir celles d'une vitesse. Il est rassurant de voir que c'est bien le cas.

Par ailleurs, n'est-il pas inquiétant que lorsque  $z$  tend vers 0, alors que  $r$  tend vers  $r_0$ , on obtienne pour  $v_0$  l'horreur familière  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ? Cela implique que si on veut déterminer pratiquement  $v_0$ , on a intérêt à choisir  $z$  assez grand, de manière à éviter d'avoir à faire, numériquement, le quotient de deux quantités très petites (ce qui serait malsain, et c'est l'occasion d'en discuter).

Remarquons enfin que la fonction au second membre de l'équation (1) a un domaine plus grand que celui de sa validité en tant que modèle mathématique. Elle représente correctement le phénomène étudié pour  $z \geq 0$ , alors que son domaine au sens mathématique, en tant que fonction réelle d'une variable réelle, est l'intervalle  $\left[-\frac{v_0^2}{2g}, \infty\right]$ . La considération du domaine de validité d'une fonction en tant que modèle d'un phénomène est une question importante, mais qui ne se pose jamais à des élèves en train de faire des calculs venus de nulle part et conduisant à des solutions que personne n'attend.

## 2. Dessine-moi un rectangle

Voici à présent un exemple de mise en calcul d'une situation appartenant dès le départ au champ des mathématiques.

Soit à dessiner un rectangle qui admet pour périmètre un nombre  $p$  et pour aire un nombre  $a$ .

Une première remarque : le problème n'a de sens que si  $p > 0$  et  $a > 0$ . Soient alors  $x$  et  $y$  les deux côtés du rectangle cherché. On a

$$x + y = \frac{p}{2} \quad \text{et} \quad xy = a \quad (2)$$

Ce système à deux inconnues fournit par élimination de  $y$

$$x^2 - \frac{p}{2}x + a = 0.$$

D'où

$$x = \frac{\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - 4a}}{2} \quad (3)$$

Il se peut que le problème n'ait pas de solution, puisque les racines complexes ne peuvent pas être interprétées comme côté d'un rectangle. C'est le cas si

$$\frac{p^2}{4} - 4a < 0 \quad \text{ou encore } p < 4\sqrt{a}.$$

(Il faut évidemment choisir le signe + pour la racine.)

Si maintenant

$$\frac{p^2}{4} - 4a \geq 0 \quad \text{ou encore } p \geq 4\sqrt{a} \quad (4)$$

on aura une ou deux solutions. Le cas de l'égalité est intéressant. Il lui correspond

$$x = \frac{p}{4} \quad \text{et donc} \quad y = \frac{p}{4}$$

grâce à la première équation (2). La solution est un carré. Il est bien normal que  $p = 4\sqrt{a}$ , puisque le côté d'un carré d'aire  $a$  vaut  $\sqrt{a}$ .

Quand on a en (4) une inégalité stricte, on obtient en (3) deux racines réelles. Comment choisir entre elles? Et d'abord, faut-il choisir? Toutes deux sont positives, et donc a priori acceptables. Ainsi, on trouve deux solutions, deux rectangles ayant  $p$  pour périmètre et  $a$  pour aire. C'est curieux, on peut explorer le problème en traitant un cas numérique, juste pour voir. On peut aussi observer que,  $x$  étant donné par (3),  $y$  sera grâce à (2) donné par

$$y = \frac{p}{2} - x = \frac{\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - 4a}}{2}$$

Ce qui veut dire que si l'on choisit pour  $x$  une des deux racines (3), on obtient l'autre pour  $y$ .

Ainsi, le problème a deux solutions algébriques, mais, substantiellement, une seule solution géométrique, puisqu'il était implicitement tout à fait clair que la question posée portait sur les rectangles considérés à isométrie près.

Voilà donc un exemple de problème situé d'emblée dans le champ des mathématiques, mais qui vient de quelque part, et donc exige une mise en calcul, et qui va quelque part, et donc exige une interprétation. On laisse au lecteur le soin d'en comparer la richesse avec le problème nu qui s'énonce :

Etudiez, selon les règles apprises, l'équation du deuxième degré paramétrique

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0$$