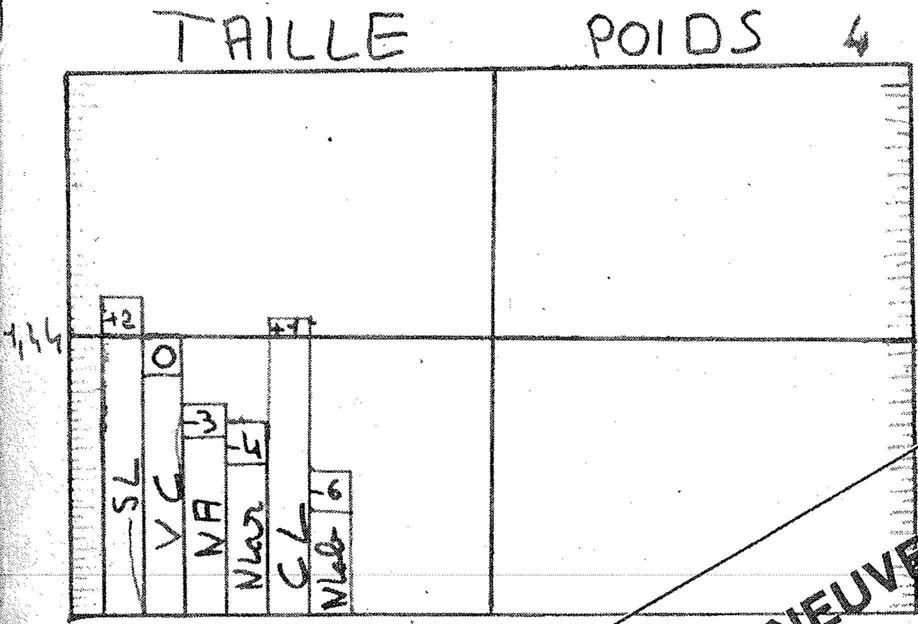
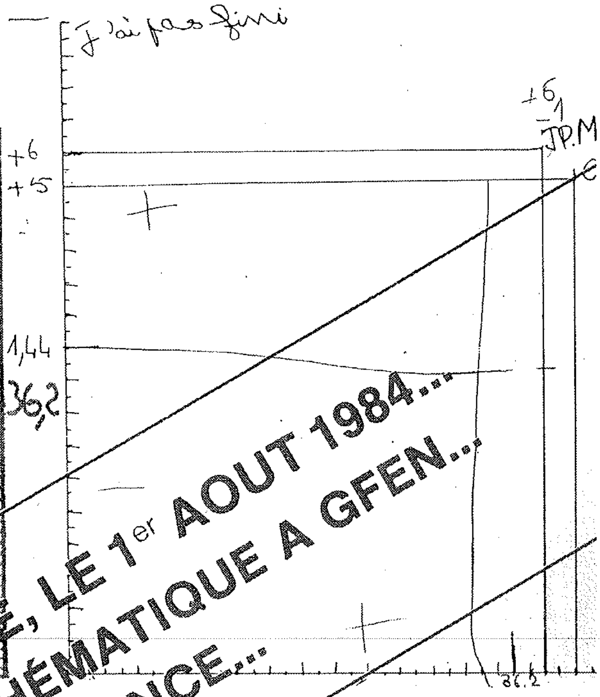
ISSN 0223-3592

DIALOGUE

GROUPE FRANÇAIS D'ÉDUCATION NOUVELLE

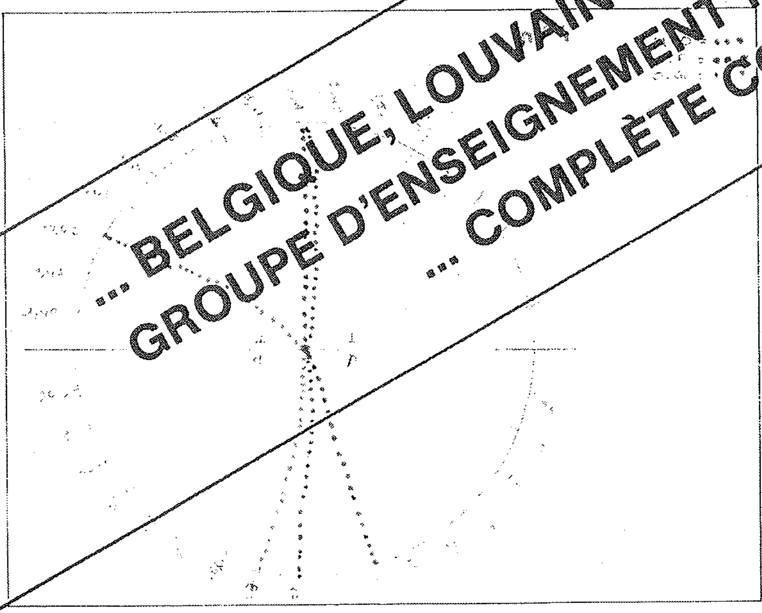


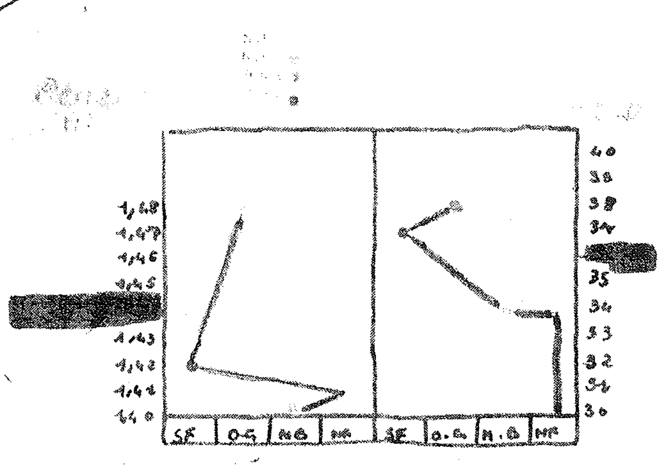


... BELGIQUE, LOUVAIN-LA-NEUVE, LE 1er AOUT 1984...

GROUPE D'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE A GFEN...

... COMPLÈTE CONVERGENCE...





20 F - 150 FB

n° 54 bis

PRIX DU NUMÉRO NORMAL : 20 F.
ABONNEMENT 1 AN
FRANCE 90 F.
ÉTRANGER 100 F.

DIALOGUE

Revue bimestrielle du Groupe Français d'Éducation Nouvelle
6, avenue Spinoza
94200 IVRY

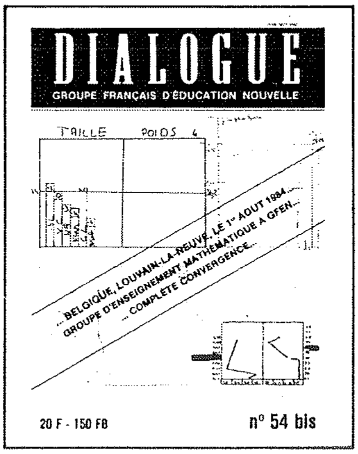
COLLECTIF PERMANENT DE CONCEPTION ET DE RÉALISATION

Catherine CHARLES
Colette CHARLET
Michel COSEM
Claude FRANÇOIS-UNGER
Robert GLOTON
Dominique GRANDIÈRE
Bernard HENAUX
Bernard IACCARRINI
Dominique PIVETAUD
Christiane ROUSSET
Evelyne ROUVIERE
Sylvie RAEPPEL
Alain ROBIN
SOUS LA RESPONSABILITÉ DE
Raymonde KAYSER

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION
Pierre OMNES
Les manuscrits ne sont pas retournés

Inscription à la Commission Paritaire N° 54 916
Imprimerie de Mormant 77720

Adressez votre abonnement à
G.F.E.N. - DIALOGUE
6, av. Spinoza
94200 IVRY
C.C.P. GFEN 5307-62 W Paris



Couverture et dessins : André LAMORTHE

sommaire

N° 54 bis **Mai 1985**

Publications du GFEN en page III de couverture.

CONVERGENCES

L'idée qui a donné naissance à ce numéro spécial de **Dialogue** *date de 1983, au colloque inter-I.R.E.M. de Poitiers. Le G.E.M. de Louvain-la-Neuve y animait un atelier où il présentait son travail dans les classes et les conceptions qui le sous-tendent. Sensible aux convergences entre le G.E.M. et le G.F.E.N., j'ai alors demandé au G.E.M. de rédiger à l'intention du G.F.E.N. un document explicitant ses idées-forces. En retour, des militants du G.F.E.N. et des animateurs I.R.E.M. réagiraient à ce document. Le texte envoyé par Louvain est d'une telle qualité que le G.F.E.N. a voulu lui assurer une large diffusion en le publiant dans* **Dialogue.**

On trouve donc, dans ce numéro, des textes émanant de trois sources : le G.E.M., le G.F.E.N. et les I.R.E.M. Cette rencontre n'a rien d'étonnant, car, entre ces trois organisations, pourtant si différentes par leur origine et leur statut institutionnel, les convergences sont nombreuses.

Convergence dans la conception de la recherche pédagogique. *La recherche implique une articulation étroite entre pratique et théorie, sans impérialisme ni de l'une ni de l'autre. Ce qui veut dire aussi que la recherche exige la collaboration, sans hiérarchie d'aucune sorte, d'enseignants exerçant à des niveaux différents du système scolaire.*

Cette convergence dans la conception de la recherche repose, plus fondamentalement encore, sur une **convergence dans la conception de l'enseignement et de l'apprentissage :** *il n'y a pas d'apprentissage sans recherche. Le savoir ne se déverse pas, il se construit. Les concepts n'existent pas de toute éternité dans le Ciel des Idées pures, ils s'édifient progressivement et se rectifient au contact des problèmes nouveaux. Penser, ce n'est pas regarder ou entendre, c'est travailler.*

Enfin, **la convergence** *se retrouve* **dans la prise en considération du statut social de l'élève et des mathématiques, et donc dans le rejet de l'angélisme pédagogique.** *L'élève appartient à un milieu social et se prépare à une insertion sociale. Ainsi, le fait que l'échec scolaire frappe particulièrement les jeunes des milieux populaires ne peut laisser indifférent celui qui s'interroge sur la pédagogie des mathématiques. Il le peut d'autant moins que les mathématiques ne sont pas un simple jeu de l'esprit mais un savoir qui a un statut social, comme nous le rappelle sans cesse le poids des mathématiques dans l'orientation scolaire.*

Telles sont les bases fondamentales, théoriques et pratiques, qui donnent son unité à ce numéro de **Dialogue,** *au-delà des différences personnelles et institutionnelles.*

Bernard CHARLOT

LETTRE DU GEM AU GFEN

Louvain-la-Neuve, le 1er août 1984

Chers amis,

Le Groupe d'Enseignement Mathématique qui s'adresse à vous aujourd'hui rassemble depuis 1978 une quarantaine de personnes activement engagées dans l'enseignement mathématique au niveau secondaire. Parmi elles, une majorité d'enseignants du secondaire, quelques enseignants universitaires travaillant dans le domaine de la méthodologie mathématique et quelques étudiants de dernière année de mathématiques qui se préparent à enseigner. Le GEM se réunit pendant trois heures chaque semaine, en général en quatre ou cinq sous-groupes, pour préparer les enseignements qu'il assure ou en discuter. Ceux-ci ont lieu dans les écoles et les classes les plus diverses par la situation géographique, l'âge ou l'origine sociale des élèves.

Au fil des années, nous avons accumulé toutes sortes de réflexions sur notre enseignement. Nous allons essayer de vous en communiquer l'essentiel dans cette lettre, en espérant qu'un dialogue fructueux s'établisse entre vous et nous.

Comme vous le verrez, il y a des points de convergence entre votre démarche et la nôtre. Pour une part, cela résulte de nos lectures communes (Bachelard, Wallon, Piaget...) et aussi de ce que vous nous avez influencés par l'intermédiaire de certains textes de B. Charlot, puis plus récemment du livre "Quelles pratiques pour une autre école ?". Au risque de vous conduire parfois dans des endroits connus, nous ne passerons pas sous silence ci-après les emprunts que nous vous avons faits : d'abord parce qu'ils sont nécessaires à la cohérence de notre exposé, ensuite pour vous laisser juger si la ressemblance est frappante ou vague entre ce que nous faisons et ce que vous faites.

Cette lettre comprend trois parties. *La première décrit notre démarche concrète, c'est-à-dire les recherches des élèves, individuelles et par groupes, et les activités de synthèse réalisées avec la classe entière. Elle traite en outre du difficile problème du "contrôle des connaissances". La seconde explique comment nous croyons que les élèves se construisent un savoir théorique en travaillant une suite de problèmes dans un contexte approprié. Les concepts-clés de cette analyse sont ceux de seuil épistémologique et de contexte. La troisième enfin, s'interroge sur la pertinence de nos observations et réflexions sur l'enseignement, notre démarche globale s'apparentant davantage à celle de l'explorateur qu'à celle du physicien.*

Malheureusement, cette lettre est trop brève pour que nous ayons pu y inclure un exemple détaillé d'une séquence d'enseignement. Force nous est donc de renvoyer pour cela à une autre publication : "L'archipel des isométries" **[1]**, *qui relate et analyse en détail un enseignement des isométries planes à des élèves de 13 à 14 ans. Une autre étude est en préparation, - elle n'a pas encore de titre - sur les suites, la convergence et les limites enseignées à des élèves de 12 à 19 ans. Ces deux ouvrages expliquent en outre certains concepts relatifs à l'enseignement en général : ceux de seuil épistémologique et de contexte d'un problème, ainsi que les idées de sens lexical et contextuel. A ce titre, ils sont susceptibles d'intéresser des lecteurs non mathématiciens. Par ailleurs, vous trouverez en post-scriptum une liste de toutes les publications du GEM.*

Un premier brouillon de cette lettre a été discuté par l'Assemblée générale du GEM. Une deuxième version considérablement remaniée a provoqué de nombreuses critiques écrites, puis a été discutée par une nouvelle Assemblée générale. Elle donnait de nos conceptions une vue idéalisée. Une troisième version, expliquant davantage notre diversité et nos difficultés, a été soumise à une dernière Assemblée générale, dont les critiques ont conduit au présent texte. Celui qui a tenu la plume remercie au passage ceux qui, pour de très bonnes raisons, lui ont mené la vie dure. Il ne leur en veut pas, bien au contraire.

GEM, GROUPE D'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
Chemin du Cyclotron 2, B-1348 Louvain-la-Neuve - BELGIQUE

GFEN, GROUPE FRANÇAIS D'ÉDUCATION NOUVELLE
6, Avenue Spinoza, 94200 Ivry - FRANCE

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE : NOTRE DÉMARCHE

DEUXIÈME PARTIE : LA CONSTRUCTION D'UN SAVOIR

TROISIÈME PARTIE :
ÊTRE EN MÊME TEMPS ACTEUR ET OBSERVATEUR D'UN ENSEIGNEMENT

PREMIÈRE PARTIE :

NOTRE DÉMARCHE

Notre démarche ? Ce titre est déjà trop entier, trop carré. Nous sommes des enseignants divers, avec des pratiques diverses. Ce qui nous rassemble depuis des années, ce sont avant tout la recherche de situations problématiques proposées aux élèves comme chantiers de théorisation et conceptualisation, et nos échanges sur ce que ces situations provoquent dans les classes. L'ensemble de nos pratiques dans ces dernières ne dessine pas de façon nette une démarche pédagogique qui nous serait commune.

Néanmoins, certaines constantes reviennent dans nos façons diverses de provoquer et de gérer l'activité des élèves : des fiches de travail, l'effort individuel, la recherche par petits groupes, les synthèses, etc. A défaut de pouvoir décrire notre démarche commune comme telle - elle n'est en tous cas pas codifiable ! - nous esquissons ci-après une sorte de portrait-robot rassemblant nos pratiques les plus significatives. On pourra le lire aussi comme le résumé des idées qui nous servent de références. C'est dans ces termes-là que nous discutons souvent, même si aucun d'entre nous n'a jamais enseigné exactement, ni en tous cas toujours, comme cela.

1. LA RECHERCHE LIBRE

Quelle que soit la matière à enseigner, nous proposons aux élèves, pour commencer, des problèmes relatifs à des choses familières et énoncés dans la langue commune, mais qui sont aussi de nature à **enclencher une réflexion théorisante.**

Souvent, nous leur demandons d'attaquer les problèmes par une contribution individuelle (1). Pendant cette première phase du travail, chacun découvre la situation avec ses facultés de perception, ses formes d'imagination, avec ce que sa mémoire lui rapporte, ce que lui montre son intelligence particulière, et sans que rien d'extérieur, venu de l'esprit d'un autre, le pousse sur un chemin qui ne soit pas le sien. Les intuitions personnelles et subjectives se développent ainsi sans contraintes visibles (2).

Après que chacun ait pénétré dans le problème, se soit posé des questions, ait mûri l'une ou l'autre idée, les élèves sont invités à former, selon leurs affinités, des groupes de trois à cinq, et à discuter le plus librement possible, "comme si on n'était pas au cours de mathématiques". Il faut insister sur ce dernier point auprès de ceux qui n'ont pas l'habitude d'une certaine initiative de pensée. Même si un problème a été conçu pour les provoquer à une réflexion de plusieurs heures, il arrive qu'ils y répondent en deux lignes et attendent la suite.

Il faut alors **les émoustiller quelque peu.** Cela prend parfois des semaines pour que, venant d'un enseignement plus dirigé, ils découvrent la pertinence de leur propre réflexion.

Le travail en groupe oblige à s'entendre sur certains faits et sur l'usage de certains mots, à expliciter ses perceptions et ses pensées pour les autres et à prendre les leurs en compte. Il provoque une première objectivation du savoir.

La discussion de groupe avance à tâtons. Les exemples affrontent les contre-exemples. Les argumentations sont brèves.

Le professeur résiste à la tentation d'intervenir pendant que les élèves furètent sur les pistes du problème. Cette tentation est la plus grande lorsqu'ils sont le nez sur un résultat et ne le voient pas : on a envie de leur vendre la mèche. Mieux vaut ne pas le faire. Souvent un groupe frôle une solution, puis l'abandonne pour un mirage. S'il y revient par la suite, c'est qu'il n'était pas prêt au moment de la première approche : **il devait encore creuser autour.**

Découvrir ainsi des choses par eux-mêmes implique les élèves plus complètement dans l'acte de connaissance que de les recevoir d'un autre. Ils en sont davantage marqués et les manient mieux après. En outre, ils vivent la joie de leurs propres mouvements mentaux, de leurs illuminations subites (3).

Mais ils ne reconstruisent pas tout, tout seuls. Par moments, ils s'arrêtent, découragés, ou demandent de l'aide. Dans ces cas-là, le professeur parfois simplement attend : toute recherche a ses périodes sèches. Ou alors, il essaye de relancer le travail. Par exemple, il répète ce qu'un élève a dit à l'un ou l'autre moment et, ce faisant, ramène l'attention sur un point crucial. Ou encore il répond à une question en la reformulant. Quelque chose d'important se passe souvent chez l'élève lorsque le professeur lui renvoie (4), le cas échéant en la clarifiant quelque peu, une image de sa propre pensée : il repart, éventuellement, sur une piste nouvelle. Et si par hasard il ne reconnaît pas sa pensée reformulée, il réagit à la trahison et repart sans doute aussi. Le recours à des sources bibliographiques, à l'initiative des élèves, ou sinon du professeur, est un autre moyen de relancer le travail.

---

(1) Nous avons été fort intéressés par les réflexions du GFEN sur le sens d'une contribution individuelle précédant le travail en groupe.

(2) Au moins est-ce là ce qui arrive souvent, mais non toujours. En effet, certains élèves non habitués se bloquent dès ce premier stade. Il peut arriver qu'ils se débloquent dans le travail en groupe.

(3) L'enseignement magistral n'en est pas condamné pour autant. Il y a des circonstances où il s'indique, mais il réussit d'autant mieux que les élèves ont déjà débroussaillé le terrain et sont à l'affût d'informations qui ont, par avance, un sens pour eux. C'est par un effet analogue que l'effort individuel précédant le travail de groupe en augmente la pertinence.

(4) Cet effet de miroir mériterait d'être étudié. Il ressemble dans l'ordre intellectuel à l'effet analogue que C. Roger [II] a décrit et pratiqué dans l'ordre affectif. La parenté entre les deux est peut-être plus grande qu'il n'y paraît, car l'attention, la considération accordées à la pensée de l'élève ont certainement aussi un effet affectif. "L'objectif cherché, par cette attitude de renvoi", écrit Odette Bassis [III] est de permettre que chacun se décentre, entendant de quelqu'un d'autre (de l'extérieur) ce qui a été émis par lui et donc trouvant là un moyen de mise à distance, d'objectivation, sans pour autant recevoir de celui qui renvoie quelque norme à laquelle s'accrocher, qu'il n'aurait pas lui-même construite, ni même quelque sécurisation facile qui pourrait le relâcher dans son effort".

Garder le silence ou intervenir avec autant de réserve n'est pas facile pour le professeur, du fait que sa vue des choses est une vue instruite, au rebours de celle de l'élève. La théorie qu'il connait occupe le champ de sa conscience, canalise sa réflexion (5) et forme écran entre l'élève et lui.

Le cheminement des élèves, moins informé par la science, est moins ordonné, moins sûr, mais plus libre. Quand ils essayent toutes sortes de pensées personnelles sur un sujet donné, il leur arrive souvent de surprendre le professeur. Aussi importe-t-il que ce dernier les écoute sérieusement, ce qui établit entre eux et lui un bon climat de collaboration. On réalise combien, dans ce type d'enseignement ouvert, le professeur doit s'intéresser, outre à la matière qu'il enseigne, à ses tenants et aboutissants, aux excursions mentales qu'elle entraîne.

Avec l'habitude, l'expérience le prouve, un professeur seul dans une classe de taille normale, jusqu'à vingt-cinq élèves ou même un peu plus, suffit à assurer la bonne marche d'une recherche libre par groupes. Il intervient surtout à la demande, distribuant son temps entre les groupes selon leurs difficultés.

2. LES SYNTHÈSES

Après un temps de recherche libre, les résultats obtenus et les questions demeurées en suspens varient d'un élève à l'autre et d'un groupe à l'autre. La situation est touffue. Selon les difficultés qu'il a rencontrées, chacun ressent plus ou moins la nécessité d'une mise au point. C'est le moment pour le professeur de proposer une activité de synthèse qui, marquant la fin de l'étape, assure, à travers la diversité des acquis, que chaque élève est armé pour l'étape suivante.

La synthèse est annoncée quelques jours à l'avance et les élèves sont priés de la préparer. Le moment venu, le professeur dialogue avec la classe entière. On confronte et coordonne les résultats pour aboutir à un document. La première question posée est souvent : qu'est-ce que nous avons étudié ? Elle engage déjà le débat sur le fond, les divergences d'opinions provoquent la discussion et des mises au point, ou dégagent des questions pour la recherche future. Des définitions sont formulées. Certaines démonstrations déjà acquises sont rédigées. D'autres sont construites sur place. **Les étapes les plus saillantes de la recherche, et non seulement ses résultats, sont consignées dans la synthèse, car elles contribuent au sens du savoir construit.**

Marquant les points d'accord, la synthèse se constitue comme lieu de référence, document qui fera foi, officiel en quelque sorte. Comme l'écrit R. Thom [**V**] : "...la science est connaissance intersubjective. **Pour être scientifique, une acquisition doit être objet de consensus :** il faut donc que les observateurs y adhèrent et jouent un rôle égal dans l'acquisition et dans l'interprétation de ce savoir".

(5) Ce qui se passe ici, et qui appartient à nouveau à l'ordre intellectuel, est analogue à un effet décrit par H. Wallon [IV] à propos des perceptions : "Le champ sensoriel se modifie avec le pouvoir de structuration dont dispose le sujet agissant ou pensant".

3. UN SAVOIR SE CONSTRUIT

La construction d'un peu de théorie par la classe et le professeur demande davantage qu'une recherche libre suivie d'une synthèse. C'est un travail ample, qui progresse par étapes, de recherche libre en synthèse et de synthèse en recherche libre. Le savoir acquis à un moment donné est non seulement réinvesti dans de nouveaux problèmes, mais encore il y est remis sur le métier. Il n'y a pas accumulation monotone de connaissances définitives. Les synthèses ne sont pas empilées. Certaines en remplacent d'autres. Le savoir, en s'amplifiant, prend forme dans sa masse. Il faut défaire pour refaire en plus grand et en mieux.

Tout concept, tout élément théorique est conçu comme instrument pour résoudre des problèmes. *La théorie a essentiellement valeur instrumentale* (cette idée est développée au n° 9). Au début, la théorie, si on peut déjà l'appeler comme cela, est surtout faite d'observations, de résultats d'expériences graphiques ou numériques réussies et qui peuvent resservir. L'instrumentalité joue par rapport à des problèmes tirés du quotidien. Mais au fil des mois, la théorie mathématique se constitue et grandit, posant elle-même des problèmes. L'instrumentalité commence alors à jouer autant dans le champ des mathématiques théoriques qu'en dehors de lui.

Chaque phase d'apprentissage apporte son lot de connaissances particulières. Mais elle apporte aussi des connaissances méthodologiques générales, d'une part sur les tactiques utiles pour résoudre des problèmes - ce que l'on appelle l'heuristique - et d'autre part sur les grands types de raisonnement. Une aptitude mathématique se développe au fil des mois et des années.

On trouvera dans la deuxième partie de cette lettre un exposé beaucoup plus détaillé de la construction d'un savoir dans un contexte problématique.

4. QUEL SAVOIR ?
POUR QUOI ET POUR QUI ?
LE CONTROLE DES CONNAISSANCES

Jusqu'ici nous avons expliqué comment se passent les leçons de mathématiques dans nos classes et comment nous pensons que les élèves s'approprient un certain savoir instrumental. Interrogeons-nous à présent sur les fonctions générales qu'on assigne à ce savoir et sur la manière d'en contrôler l'acquisition. Les deux questions sont liées, la première surgissant d'elle-même dès qu'on cherche à répondre à la seconde. Elles conduisent à des contradictions que nous ne voulons pas éluder, même si nous n'espérons pas les résoudre.

Soit donc la question suivante : quand et comment, dans une démarche par problèmes ouverts, contrôler les connaissances des élèves ?

Prenons d'abord la locution *contrôle des connaissances* dans son sens littéral, c'est-à-dire portons l'attention sur les connaissances plutôt que sur la personne, même s'il est vrai que toute connaissance est nécessairement connaissance d'une personne.

Au cours même d'une recherche, c'est-à-dire avant que les élèves aient rejoint la science dans sa forme "officielle", leurs connaissances leur servent, plus ou moins bien, d'instruments pour résoudre les problèmes posés. Elles sont contrôlées dans l'activité même de recherche, leur valeur instrumentale y est éprouvée. Les erreurs existent sur ce champ de connaissances, et certaines d'entre elles ont un sens pour les élèves, à savoir celles qui les empêchent d'avancer, qu'ils peuvent détecter et cerner sur leur chantier de travail, à force d'essayer des choses et de discuter.

Quant aux autres "erreurs", celles qui n'empêchent pas les connaissances de jouer leur rôle instrumental, il faut les ignorer momentanément, pour ne les mettre en évidence que dans de nouveaux problèmes où elles auront un sens. Par exemple, si des élèves n'ont sur leur chantier de travail que des suites monotones et s'ils ont défini la convergence par "il existe un a tel que pour tout $\varepsilon < 0$, il existe un n tel que $[a_n - a] \leqslant \varepsilon$", *ils* disposent là d'une définition instrumentale pour leur recherche. *Le moment venu,* ils découvriront, fut-ce à l'initiative du professeur, des suites non monotones (6), et remettront leur définition sur le métier.

Ainsi décrite, l'activité de l'élève est très semblable à celle du chercheur. Le contrôle des connaissances est le fait des chercheurs eux-mêmes, puisqu'il fait partie de la recherche.

Mais les connaissances que l'on acquiert à l'école ont d'autres fonctions que d'être opératoires dans une recherche instituée par l'école. On attend d'elles qu'elles arment les élèves pour la vie en leur donnant des moyens d'analyse des situations mathématiques ou mathématisables qu'ils risquent de rencontrer. Plus profondément, on voudrait qu'elles leur donnent, et surtout à ceux que leur condition sociale en prive ordinairement, accès à cette forme de pouvoir que donne la capacité d'argumenter, et d'argumenter scientifiquement. Ne serait-ce souvent que pour réfuter ceux qui substituent l'invocation de la science à l'argumentation. Plus immédiatement, on attend des connaissances acquises en classe par l'élève qu'elles permettent son insertion dans la classe ou le cycle d'enseignement suivant et sa réussite aux examens officiels.

Ainsi l'étude remplit, ou devrait remplir, de multiples fonctions sociales qu'on ne peut se permettre d'ignorer. Elles impliquent que les élèves rejoignent, au terme de leurs recherches (7), une partie adéquate de ce qu'on nous permettra d'appeler *la science véhiculaire,* celle qui s'exprime dans le langage convenu des spécialistes et se prête ainsi à la communication.

En première approximation, les mathématiques véhiculaires sont ce corpus de connaissances mathématiques que répertorient les programmes et qu'enseignent les manuels. On y trouve des théories, des méthodes, un langage, des notations. Par rapport aux mathématiques des chercheurs, elles sont aménagées à l'usage des écoles, utilement ou non selon le cas. Certains manuels introduisent des symboles et formalismes qui leur sont propres, imposent des mises en page types, et créent ainsi des canons d'expression réservés aux seules mathématiques scolaires. Ces pratiques aboutissent souvent à éliminer le français, qui est pourtant la langue des élèves, celle dans laquelle il est souvent le plus facile de communiquer avec eux.

Lorsqu'il est question pour le professeur de contrôler les connaissances véhiculaires des élèves, l'essentiel est qu'il en vérifie la valeur instrumentale, c'est-à-dire l'efficacité dans les problèmes (et non dans des exercices répétitifs), ou encore la compréhension de fond. Quant à la forme, elle n'est pas négligeable pour autant. Elle a valeur instrumentale dans la mesure où elle sert l'intelligibilité et facilite la communication.

Ceci dit, le contrôle des connaissances recèle trois équivoques dont il faut demeurer conscient.

D'abord, on glisse inévitablement et sans cesse du contrôle des connaissances à l'évaluation de la personne. C'est déjà ce qui arrive à l'élève lui-même selon qu'après avoir fait une erreur, il dit "y a une faute là", ou "j'ai commis une faute là", ou "je ne sais pas faire ça, je fais tout le temps des fautes", ou, exprimant le pire "je ne suis pas, ou ne serai jamais, capable de faire ça". De même, du côté positif, après avoir bien résolu un problème, il exprime sa confiance en lui. En outre, les élèves se jaugent les uns les autres et les enseignants jaugent les élèves : on est frappé par la vivacité de l'un, la lenteur d'un autre. Comment ne pas qualifier les personnes que l'on observe à la tâche ?

Il se fait malheureusement que si le contrôle des connaissances, en tant que vérification de leur valeur instrumentale, est une opération à peu près bien définie (on voit quand l'élève résout un problème), l'évaluation de la personne ne l'est pas du tout et qu'elle est hasardeuse. L'évaluateur, en effet, du simple fait de son évaluation, peut perturber considérablement la personne évaluée en suscitant chez elle une réaction émotive profonde et durable : juger une personne, c'est toucher son être même. Celui qui dit à un élève "toi, tu ne vois pas clair en math" est peut-être en train de compléter le travail de démoralisation entamé par ceux qui lui ont dit la même chose au long de sa carrière scolaire. A l'opposé, un élève qui entend dire de lui "il ira loin" se trouve fort aidé à aller loin.

Mais le contrôle des connaissances est aussi l'instrument de la sélection. Il conduit alors à des jugements sur les personnes inspirées non par leur intérêt, mais, à ce qu'on dit, par celui de la société. La menace sur la personne se précise, les jugements négatifs non seulement la touchent dans son être profond, mais encore lui barrent son avenir.

Le contrôle des connaissances sert encore, nécessairement, au professeur à évaluer son propre travail. Mais par un nouveau glissement, il le conduit aussi à s'évaluer lui-même, ce en quoi il est juge et partie. Tout jugement trop négatif lui serait insupportable (8).

En résumé, le contrôle des connaissances recèle trois contradictions : la première oppose l'évaluation des connaissances au jugement de la personne, la seconde l'avenir de l'élève à la sélection sociale, et la troisième l'appréciation du travail de l'élève à l'évaluation de celui du professeur. Les deux dernières renforcent la première : elles accusent la menace que celle-ci fait peser sur l'élève.

---

(6) C'est la notion de niveau de rigueur qui est en cause ici. On consultera utilement à ce propos H. Freudenthal [VI]. Imposer un niveau de rigueur superflu, c'est accepter de théoriser inutilement. C'est se contraindre à dire aux élèves : vous comprendrez plus tard.

(7) Sur le paradoxe de recherches qui, tout en étant qualifiées de libres, aboutissent à la science constituée, cf. plus loin n° 6.

(8) On perçoit ici comme le contrôle des connaissances n'est que la pointe apparente d'un énorme iceberg. Car le contrôle de l'action du professeur n'est lui-même qu'un aspect du contrôle de l'action éducative globale, celle de l'école et du système scolaire dont le professeur est un rouage. Que deviennent les connaissances des élèves tout au long de leur vie ? Selon quels critères et quelles méthodes apprécier leur utilité personnelle et sociale ? A défaut simplement de pouvoir être étudiées, ces questions demeurent matières à opinions.

L'apprentissage s'en trouve perturbé. Tel que nous l'avions envisagé, le droit à l'erreur assurait la mobilité de la pensée. Les erreurs jouaient un rôle essentiel, car sans elles il n'y avait pas moyen d'éprouver l'instrumentalité des connaissances. Or, voilà qu'elles se retournent contre l'élève en devenant les signes d'une faiblesse personnelle. Il doit les camoufler, à tout prix...

L'apprentissage est perturbé par les systèmes de pouvoir qui dominent et traversent la classe, celui de l'institution scolaire qui dicte au professeur des conduites précises, celui, plus vaste, de la société qui façonne l'institution scolaire et secrète des idéologies hiérarchisantes.

La situation morale de l'élève et sa vitalité dans l'apprentissage sont menacées chaque fois que son sort lui semble relever de décisions arbitraires du professeur. C'est ce qui arrive lorsque son échec est décidé au nom d'une science impénétrable et gratuite à ses yeux, ou parce qu'il a transgressé des règles de comportement scolaire dont le sens ne lui apparaît pas. C'est aussi le cas lorsqu'il réussit sans effort, le professeur n'étant pas arrivé à mobiliser la classe et distribuant les points sans trop regarder, à tout venant. En d'autres termes, ni la réussite ni l'échec ne mettront l'élève en route si son sort, quel qu'il soit, n'est décidé que par un autre.

Il faut tenter d'argumenter le sens de ce qui se passe et de ce que l'on fait dans la classe, et qui ne se ramène pas au face à face inter-subjectif et disproportionné de l'élève et du professeur. Pour atténuer les difficultés de s'entendre dans cette situation de pouvoir, il faut objectiver la relation pédagogique autant qu'on peut, la centrer sur un projet éducatif sans cesse clarifié, débouchant sur des actions délimitées et des résultats reconnaissables (9). Il faut tout faire pour laisser à **l'élève sa part d'initiative et de mérite. Il ne faut pas le faire réussir à n'importe quel prix. Mais il faut à tout prix l'amener à se battre tant et si bien qu'il se doive et s'attribue son succès.**

C'est un combat jamais achevé. L'ombre du pouvoir scolaire planera toujours sur les classes. Le professeur sera toujours pris entre l'enclume et le marteau. Mais il a un atout : mettre les élèves à la construction des outils d'une science instrumentale sur des chantiers de problèmes, transformer la classe en un atelier où l'on discute sans cesse du sens des choses qu'on y façonne.

Par delà cette conclusion essentielle, plusieurs aspects du contrôle des connaissances, pris en un sens large, méritent encore d'être traités.

D'abord, il faut éviter de répéter sur les examens les discours connus qui en masquent les contradictions, par exemple celui consistant à camoufler la sélection sociale sous l'idée d'orientation. L'inconnu, le danger soupçonné, font plus peur qu'une difficulté identifiée. Il faut parler du contrôle des connaissances avec les élèves, en essayant d'en cerner les équivoques.

Ensuite, s'il est vrai que juger une personne est impossible, s'il est vrai qu'on pourrait difficilement sous-estimer l'effet positif de la confiance en soi, conséquence commune de la confiance des autres, alors il faut croire avec O. Bassis que chaque élève a "d'immenses capacités à développer, susciter, décupler".

Pour le reste, autant il est utile qu'une grande partie du travail des élèves ne soit pas noté, "ne compte pas pour l'examen", autant faut-il aussi, le moment venu, leur apprendre à vivre avec des notes, les aguerrir contre les examens : ils n'y échapperont pas. Ces deux exigences sont contradictoires. Chacun fait ce qu'il peut.

Enfin, le professeur participe nécessairement aux conseils de classe et aux jurys. **Il est important qu'il y combatte les pratiques d'évaluation abusives :** par exemple celle qui consiste à recaler aveuglément un **élève pour une mauvaise moyenne de l'année, même s'il est en net progrès** (10).

Il est important aussi qu'il soit là pour y défendre des personnes, cas par cas, attentivement, sachant bien que l'orientation est aussi nécessaire que hasardeuse, et qu'elle ne peut être monopolisée par les enseignants : les élèves et leurs parents ont à faire leurs choix. Sachant aussi que par delà l'indispensable combat pour transformer la société, l'enjeu de l'orientation n'est pas seulement, hélas, la capacité intrinsèque de l'élève, mais son adaptation au système scolaire tel qu'il est, puis à la société.

Envers et contre toutes les contradictions qu'on n'extirpera jamais, il faut mettre en avant le souci de la formation : évaluer pour former (11).

Le problème n'est pas résolu. Cette conclusion tourne court. Nous n'en voyons pas d'autre.

5. C'EST BIEN BEAU TOUT ÇA...

Telles sont les pratiques et les idées dont nous nous entretenons souvent (et parmi elles, on vient de le voir, des contradictions non résolues). Derrière et à côté de ce débat, il y a nos pratiques individuelles. Chacun, selon son jugement, invente sa méthode et l'adapte aux circonstances. Notre vitalité de groupe s'enracine dans toutes les initiatives personnelles.

Mais le quotidien des classes se moque à tout bout de champ de nos intentions et de nos beaux discours. Nos difficultés sont multiples. Par delà un certain nombre de réussites évidentes et pleines de sens, nous avons souvent le sentiment de rester en deça du possible.

D'abord, il n'est pas si facile de trouver, dans l'univers des élèves, des thèmes de travail stimulants, à la mesure de leurs forces, ni trop vagues, ni trop contraignants. Nous nous y employons sans cesse et réussissons diversement.

Il est difficile, à côté d'un groupe d'élèves au travail, de se taire quand il faudrait, d'attendre assez longtemps les résultats imprévisibles de leurs réflexions. A défaut d'y arriver, on se raccroche à la bouée : quelque forme d'intervention qui déflore la situation de recherche.

(9) C'est le type de préoccupation qui conduit à la pédagogie du projet, à la classe atelier, à l'imprimerie de Freinet, etc.
(10) Cf. Le Grain [VII].
(11) C'est le titre de l'intéressante brochure du Grain citée à la note 10.

Au contraire, à d'autres moments, il faudrait intervenir, et on n'y arrive que maladroitement ou pas du tout. Un flottement s'installe, les élèves se demandent ce qu'on attend d'eux. Nous ne réussissons pas toujours à concilier la nécessité de consignes nettes et le respect d'une pensée indépendante.

Et puis, il y a les classes qu'on reçoit à l'automne et qui n'ont pas encore tâté de la confrontation des idées : les élèves, les groupes d'élèves s'impatientent, s'agitent, appellent au secours à tout bout de champ, réclament le retour à l'autre enseignement. Il est dur de garder son sang-froid. Il y a aussi les premières classes des écoles professionnelles - douze à quatorze ans et souvent beaucoup plus - soutenant difficilement l'effort scolaire et auxquelles on n'arrive pas toujours à ménager des succès assez rapprochés. Il y a, dans d'autres écoles, les élèves qui mordent pendant les leçons, mais dont l'effort ne se prolonge jamais au-delà. Il y a des groupes d'adolescents frondeurs, qui pèsent sur la liberté des autres, ébranlent le professeur qui a pris le parti de ne pas abuser de son pouvoir. Il y a encore les élèves usés par l'école : ils n'en veulent plus, à aucun prix, on n'arrive à rien négocier avec eux.

Certains d'entre nous connaissent des difficultés plus aiguës que d'autres : une direction d'école réticente, voire hostile, des collègues accumulant les critiques méfiantes, le confinement à une seule classe et la certitude que cet enseignement nouveau n'aura, pour les élèves, pas de lendemain : ils retrouveront l'année suivante un enseignement magistral au sens étroit. Avons-nous le droit d'éveiller ainsi chez eux un appétit qui ne sera plus satisfait dans la suite ? Ne leur préparons-nous pas des échecs, en les écartant des conduites scolaires menant aux succès scolaires ?

Ces raisons de doute sont identifiables. D'autres le sont moins et tiennent à la personne et à la vie des enseignants. Chacun de nous se demande par moment : mais qu'est-ce que je fais dans cette classe ? Question imprécise, perturbante. La classe perçoit l'ébranlement, renvoie le doute comme un miroir sans pitié. Tout le monde passe par là : comment tenir le cap quand on ne sait plus trop bien où il est ?

Voilà donc bien des difficultés et des réserves. Mais à trop s'y arrêter, on déforme aussi notre réalité. Il serait faux de nous voir comme des gens qui, ayant conçu quelque nouveau canon de l'enseignement mathématique, ne le réalisent pas complètement, restent en chemin. Nous n'avons pas de nouveau canon. Nous avons des réflexions communes, sources d'inspiration pour chacun d'entre nous. Elles se construisent et s'ajustent d'année en année, à la lumière de nos dificultés sans cesse confrontées. Nous sommes au milieu de la contradiction, sans cesse à l'œuvre pour la résoudre.

D'avoir reconnu, éprouvé que cette contradiction est inhérente à l'enseignement, nous donne cette sorte de réalisme qui prévient le découragement. Enseigner ne sera jamais de la tarte, on le sait. Mais on peut marquer des points, gagner des parties. Apprendre à nager à travers toutes ces difficultés. **Il y a au moins une menace que nous avons liquidée : celle de la routine, de la répétition sans joie. Nous ressentons comme une force de nous être groupés. Et si nous devions donner à d'autres un seul conseil, ce serait celui-ci : mettez-vous à plusieurs. Travaillez ensemble, discutez sans cesse de ce que vous faites et voudriez faire. Ce qui vous étonnera le plus au bout d'un temps, ce sera votre propre changement, une force nouvelle, un espoir, des projets... pour cinquante ans.**

DEUXIÈME PARTIE : LA CONSTRUCTION D'UN SAVOIR

6. UNE SUITE DE PROBLÈMES QUI VA QUELQUE PART

Pour le GEM, *apprendre des mathématiques, à tous les niveaux, c'est construire un savoir sur des chantiers de problèmes.* Il est essentiel que chaque élève se trouve en situation de recherche, à coups répétés, tout au long de son apprentissage. Nous pensons *qu'il a ainsi la meilleure chance de devenir capable de résoudre de nouveaux problèmes.* Un deuxième principe est que *l'enseignement doit partir (mais pas camper !) sur le terrain familier de l'élève et dans sa langue.* L'essentiel de notre travail tend à étayer et illustrer ces affirmations.

Le terrain familier des élèves évolue au fil des années qu'ils passent à l'école tandis que s'accroît leur culture scientifique. Les énoncés des problèmes qu'on leur pose font la part de plus en plus grande à cette culture. Mais au début, comment trouver des questions à la fois proches de leur vécu quotidien et susceptibles de les mettre sur la voie d'une théorisation ? Les meilleurs énoncés sont ceux dont les mots sont familiers aux élèves et dont les phrases sont limpides, mais pour la solution desquels il faut nécessairement passer par l'un ou l'autre morceau de théorie nouvelle. Ce dernier ne sera pas forcément construit du premier coup sur le chantier du problème, car il faut d'abord en avoir ressenti le besoin assez profondément et il ne se façonne souvent que par approximations.

Plusieurs exemples de tels problèmes seraient utiles ici : contentons-nous d'un seul, pour ne pas trop allonger l'exposé. On veut enseigner le P.G.C.D. Il ne faut surtout pas commencer par le définir. Il ne faut pas non plus commencer par faire chipoter les élèves sur quelques exemples en espérant qu'ils vont découvrir la définition : en l'absence de toute motivation, ils en seraient réduits à deviner ce que le professeur a envie de leur faire dire. Mais ce qu'on peut faire, c'est leur donner un rectangle de 42 sur 98 cm et leur demander de le paver avec des dalles carrées les plus grandes possible. Ensuite, on les laisse travailler une heure, deux heures, le temps qu'il faut, en discutant parfois avec eux, mais sans vendre la mèche. Puis on leur donne un rectangle analogue avec des côtés s'exprimant toujours en nombres entiers, mais plus grands. Après beaucoup d'efforts et de débats, le professeur et les élèves rédigent ensemble une synthèse sur le P.G.C.D.

A l'étape suivante, on leur demandera de paver avec des dalles les plus grandes possible un rectangle dont les longueurs des côtés s'expriment par des nombres rationnels. Nouvelle recherche, dont on acceptera qu'elle soit longue, et qui dégagera l'idée de (plus grande) *commune mesure.* Ensuite, on pourra proposer de paver, ou si on veut de quadriller la feuille de format A4, sachant que si on la plie en deux parallèlement à son petit côté, on obtient un rectangle semblable à la feuille de départ (soit dit en passant, ceci permet de démontrer que ses côtés sont entre eux comme 1 est à $\sqrt{2}$). Nouveaux tâtonnements, nouvelle recherche durant laquelle les élèves ont pleine liberté de penser. Ils découvrent, avec une aide minimale du professeur, l'impossibilité de quadriller la feuille et l'*irrationnalité* de $\sqrt{2}$. Comme on le voit, on n'a pas défini à l'avance la commune mesure. En outre, on a proposé une tâche impossible : quadriller la feuille. On n'a défini a priori ni $\sqrt{2}$, ni le concept d'irrationnel. Ces concepts sont construits sur les chantiers des problèmes.

Ceci dit, suffit-il de proposer à la classe des problèmes appropriés, liés à son univers quotidien, pour qu'elle reconstruise par ses propres forces les morceaux de la science véhiculaire (cf. n° 4) qu'on veut lui enseigner ? Certes non. Laissée à elle-même, elle manquerait l'objectif, elle dériverait au gré de son intérêt.

En effet, aucun secteur de l'environnement n'admet de théorisation univoque. On peut certes apercevoir une suite géométrique dans les rebondissements d'une balle, la spirale d'un coquillage, un dessin de polygones emboîtés, l'intérêt composé, les paradoxes de Zénon. Mais chacun de ces objets peut être perçu autrement : par exemple la balle en physique ou dans la pratique du ping-pong, le coquillage en biologie, les polygones emboîtés en art décoratif, l'intérêt composé en comptabilité et les paradoxes de Zénon en philosophie.

Ensuite, même si l'attention des élèves est orientée de force vers un point de vue mathématique (par exemple parce qu'ils se trouvent au cours de math), ils ne restitueront pas spontanément un morceau de la science véhiculaire, du simple fait que celle-ci est une construction historiquement contingente (on imagine qu'elle aurait pu évoluer autrement qu'elle n'a fait).

Enfin, même si l'entreprise de reconstruction théorique était univoquement définie, il resterait la disproportion de la tâche : on ne peut pas attendre des élèves qu'ils rebâtissent par leurs seules forces un édifice séculaire.

Ainsi, si l'objectif que la classe reconstruise un morceau de la science véhiculaire est atteint, il ne l'est que grâce à l'intervention du professeur. Celle-ci est déterminante.

On s'en rend compt encore en imaginant des classes conduites comme les nôtres, c'est-à-dire avec une large part faite aux recherches des élèves, mais il y a cinquante ou cent ans : elles auraient produit (ou re-produit) des mathématiques d'il y a cinquante ou cent ans, par exemple une notion de limite comme celle de la Vallée-Poussin ou Jordan.

Qu'on imagine aussi un élève étudiant sans professeur, dans une bibliothèque. Il devient un autodidacte : ses connaissances, quelle que soit leur valeur intrinsèque, présentent des lacunes par rapport aux mathématiques véhiculaires et ne sont pas hiérarchisées comme ces dernières.

Ainsi les élèves construisent - ou reconstruisent - un savoir, mais pas n'importe lequel, et le professeur est nécessairement présent sur le chantier. Comment se partage l'initiative ? Pour aller vers l'objectif, le professeur propose aux élèves une suite de problèmes dont les énoncés sont le plus ouvert possible, laissant le champ libre aux démarches individuelles et de groupe. Pendant les temps de recherche, les élèves sont invités à penser sans contrainte. Cela les amène, le cas échéant, à mettre de nouveaux problèmes sur le tapis. Bien entendu, la pensée libre n'est pas simple batifolage : elle doit déboucher sur des résultats communicables, bien organisés. Dans les moments de synthèse, les élèves ont la parole d'abord et ce qu'ils font d'inattendu est pris en compte. Ensuite, ils dialoguent avec le professeur, et celui-ci garde en moyenne un cap, oriente le travail et s'en explique autant qu'il peut.

Le reste de cette deuxième partie analyse la façon dont le savoir se construit dans une classe conduite de cette façon-là.

7. LA NOTION DE SEUIL ÉPISTÉMOLOGIQUE

Ainsi, les élèves partent de leur terrain familier et aboutissent à une théorie. Entre les deux, la distance est grande : il y a ce qu'on appelle un *seuil épistémologique*. Cernons cette notion par quelques exemples.

Voici trois notions familières rapprochées chacune du concept auquel elle a, d'une certaine façon, donné naissance.

— La règle graduée, instrument de mesure quotidien, a engendré en mathématique la droite réelle, bijection de la droite, elle-même objet très abstrait de la géométrie, sur un champ archimédien complet appelé champ des réels ;

— La vitesse du coureur ou celle de la voiture, perçue à la fuite du paysage, au vent de la course, au bruit du moteur, a engendré la dérivée d'une fonction vectorielle d'une variable réelle, c'est-à-dire la limite d'un certain quotient différentiel ;

— Les aires et volumes des objets simples, puis moins simples, tels que rectangles, cubes, cylindres, sphères, etc. ont engendré les intégrales.

On pourrait multiplier les exemples. Chacun d'eux illustre l'écart impressionnant, le seuil, entre une notion relevant de la pratique quotidienne et parfaitement adaptée à cette pratique, et le concept mathématique correspondant, lui-même parfaitement adapté à la pratique du mathématicien. On remarque, a contrario, que les concepts mathématiques sont totalement inadaptés à l'usage quotidien : le chauffeur n'a que faire de la dérivée et le menuisier de la droite réelle.

De même, les notions quotidiennes, tout en fournissant des supports intuitifs au travail de création mathématique, sont inappropriées à la construction et à la communication des démonstrations.

Quelles sont les propriétés qui rendent les concepts mathématiques inopérants dans le quotidien et instrumentaux dans le champ des mathématiques ? On en distingue (12) sans peine plusieurs (13).

a) D'abord, il arrive qu'une notion quotidienne et le concept mathématique qui la modélise soient dotés de propriétés contradictoires. Il en va ainsi pour la force : pour l'expérience commune, il faut une force pour maintenir un mouvement à vitesse constante, tandis que pour la mécanique rationnelle, il n'en faut pas. Cette dernière propriété n'est autre que le principe d'inertie de Galilée.

b) Pour accéder au statut d'objet mathématique, un objet quotidien est nettoyé de celles de ses connotations qui ne servent pas, voire qui seraient nuisibles dans la théorie. Qui plus est, il est souvent doté de propriétés nouvelles, absentes de l'objet quotidien. Ainsi, pour donner naissance à la droite, la ficelle tendue perd sa matière, ses irrégularités, son épaisseur, sa couleur.., et par contre elle s'allonge beaucoup (14) (jusqu'à l'infini, dit-on...). La droite n'est pas meilleure que la ficelle, il va de soi qu'elle ne la remplace pas. Elles ont des usages différents.

c) Abstraire, c'est dégager des propriétés communes à plusieurs objets, c'est les regarder d'un point de vue qui permet de les déclarer "équivalents". On comprend ainsi pourquoi une forme d'abstraction génératrice de concepts soit le passage à l'espace quotient pour une relation d'équivalence. Les nouveaux objets définis par ce procédé sont les classes d'équivalence, et les anciens ne sont plus que les représentants des nouveaux : un couple de points *représente* un vecteur, un couple de demi-droites issues d'un point *représente* un angle, etc. Une profusion d'objets est soudain, avec une apparence d'arbitraire, vue comme un objet unique. Que reste-t-il donc pour le profane de la distinction commune entre l'un et le multiple, entre la vache et le troupeau, la maison et la ville ?

d) Ces ensembles-objets deviennent eux-mêmes éléments d'ensembles nouveaux munis de structures : l'espace des vecteurs libres, le groupe des angles... A ce niveau et sans danger pour lui, mais non pour le bon sens, le mathématicien identifie des ensembles isomorphes, même si ceux-ci se présentent comme dissemblables à l'imagination : par exemple, l'ensemble des translations et celui des vecteurs libres, ou le groupe des angles et celui des rotations du plan vectoriel.

e) Aux points c) et d), nous venons d'apercevoir dans la formation des concepts, une autre difficulté qui contribue à les éloigner du quotidien, à savoir la multiplication des niveaux ensemblistes. Par exemple au début de la géométrie, on trouve le plan π ensemble de points. Un couple de points est une partie ensemble de points. Une translation est une partie de ordonnée de π. Une translation est une partie de l'ensemble des couples de points. Sous le nom de vecteur, les translations sont le matériau de base de la géométrie reprise dans un cadre nouveau. Soit l'ensemble des vecteurs. L'addition vectorielle est un application de $V \times V$ dans V, etc.

(12) Ce qui suit est inspiré par N. Rouche et *al.*, *L'archipel des isométries* [I], p. 5.
(13) Le lecteur non mathématicien ne perdra pas le fil de l'exposé s'il se contente de parcourir rapidement les points a) à i).
(14) Voir dans A. Dejardin et *altr*, *Foutter un chat avec une droite* [VIII], une analyse approfondie du seuil épistémologique de la droite.

f) L'identification de choses perçues initialement comme distinctes ne porte pas seulement, comme au point d), sur des ensembles structurés. Les débutants, par exemple, ont bien de la peine à identifier les diverses apparitions d'une même valeur dans une suite non bijective, à un seul et même élément de l'ensemble image de la suite : pour eux les termes de la suite sont trop marqués par leur position, ils les voient distincts.

g) Non seulement les mathématiciens identifient des objets perçus comme distincts, mais ils font aussi souvent l'inverse : distinguer des choses perçues comme identiques. Par exemple, la translation et le mouvement de translation, la continuité et la continuité uniforme.

h) Un concept mathématique peut être directement déterminé par des axiomes, c'est-à-dire se trouver au départ d'un système déductif. C'est le cas par exemple de la droite en géométrie d'incidence ou de la distance dans la théorie des espaces métriques. Souvent aussi le concept apparaît à une autre place, parfois très éloignée des axiomes. Ainsi en va-t-il de la dérivée et de l'angle qui ne se trouvent construits tous deux qu'après une longue théorie préparatoire, la première en analyse et le second en géométrie. Le fossé entre la réalité familière et sa contre-partie mathématique n'en est que plus profond.

i) Pour la commodité logique, les mathématiciens englobent des cas limites ou triviaux dans la plupart de leurs concepts. En ce faisant, ils associent des termes opposés et heurtent le sens commun : ils considèrent le repos comme un mouvement, la transformation identique du plan comme une translation, une rotation, une homothétie, l'égalité de deux ensembles comme une inclusion, un carré comme un trapèze, etc.

Les exemples de seuil épistémologique évoqués sommairement plus haut (ils séparaient la règle graduée de la droite réelle, la vitesse du chauffeur de la dérivée et les aires et volumes quotidiens de l'intégrale) pourraient donner à penser qu'un seuil sépare ***un*** **objet familier ou** ***une*** **notion quotidienne** ***au*** **concept mathématique qui lui correspond. Or, il n'en** est rien. Une telle correspondance univoque entre l'univers quotidien et les mathématiques n'existe pas. C'est toujours une famille, et souvent une famille éparse, de notions et d'objets quotidiens qui renvoie, non à un concept, mais à tout un secteur des mathématiques, c'est-à-dire à une théorie.

Soient par exemple les isométries, transformations bijectives du plan ou de l'espace conservant les distances. Elles s'ordonnent dans une théorie assez ample. Si on cherche leurs racines dans l'univers familier, on trouve des choses aussi diverses que les déplacements de solides, les objets symétriques ou répétés, les reflets dans les miroirs, les pliages, les calques, etc. De même ce qui préfigure le calcul différentiel dans l'univers quotidien, c'est la famille à première vue hétéroclite des vitesses, tangentes, pentes, taux de croissance, etc. Le mathématicien ne perçoit plus bien ce caractère hétéroclite, du fait qu'il dispose de la dérivée comme clé d'interprétation générale. Il doit se déconditionner pour revenir sur le terrain de l'élève et admettre qu'il n'y a pas de parenté conceptuelle immédiate par exemple entre la vitesse du cycliste et la pente de la route.

L'identification et la description de seuils épistémologiques séparant la réalité familière des théories mathématiques véhiculaires pourrait donner à penser que ces théories sont cachées (bien cachées si on veut...) dans le familier. Et que l'éducation mathématique consisterait à les y découvrir. Or, nous n'avons pas voulu dire cela. Nous reviendrons sur ce point à propos du sens instrumental des connaissances, au n° 9.

Voilà donc la notion de seuil épistémologique esquissée et illustrée de quelques exemples. Montrons maintenant comment les élèves au travail pour franchir un seuil, c'est-à-dire pour construire une théorie sur des chantiers de problèmes, agissent et réfléchissent dans un contexte qui déborde largement les énoncés des problèmes.

8. LA THÉORIE EN CROISSANCE SE NOURRIT D'UN CONTEXTE

Une classe quelque peu habituée au travail de recherche est un lieu d'échanges actifs. A regarder de plus près la matière de ces échanges, on y distingue deux parties complémentaires : d'une part la structure théorique en gestation et d'autre part le contexte dont elle nourrit sa croissance. Ce dernier comprend les perceptions, les images, les idées suscitées par les problèmes et qui, sans appartenir à la théorie visée, entretiennent des liens de parenté avec elle. Une théorie ne peut pas être construite sans référence à autre chose qu'elle-même (même si, une fois qu'elle existe, on peut l'exposer en elle-même). Un contexte problématique est nécessaire. Il est traversé par des relations qui éclairent l'objet de la théorie soit par analogie, soit par opposition, par conflits de structure. Il assure la mobilité de l'esprit, parce qu'il est source de sens et de contresens. Mais la construction du sens passe par le contresens.

Nous analyserons ci-après (cf. n° 10) le déroulement temporel des échanges entre la théorie en formation et le contexte, c'est-à-dire le franchissement du seuil épistémologique.

Retenons pour l'instant l'existence et la nécessité du *contexte*. Pour éclairer cette notion, voici, à titre d'exemples, quelques faits de contexte.

a) Pour étudier les translations planes, on considère des couples de motifs dessinés. La translation est plus facile à découvrir si le motif, comme sur la **Figure 1, comporte des segments qui orientent le regard dans la bonne direction. A l'opposé, sur la Figure 2, les segments de F guident le regard selon** deux directions différentes de celle de la translation, si bien que beaucoup d'élèves imaginent un passage d'un motif à l'autre en deux temps, empruntant successivement ces deux directions. Cet effet est renforcé par un autre fait de contexte : les directions **privilégiées des segments du F coïncident avec les** directions prégnantes des bords de la feuille. Le regard en est d'autant plus fortement sollicité de glisser dans ces deux directions.

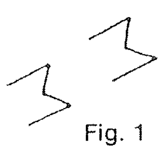


Fig. 1

Fig. 2

b) Pour étudier les suites géométriques, on examine des figures.

Par exemple, on enlève la moitié d'un carré, puis la moitié du reste, et ainsi de suite (Fig. 3). Le reste diminue tellement vite qu'il tend vers zéro en un sens intuitif assez clair. Par contre, la même constatation est beaucoup moins évidente sur une figure construite en retirant chaque fois un millième du reste. Ces deux faits de contexte jettent un éclairage fort inégal sur la proposition qui dit que :

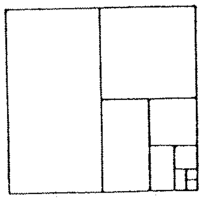


Fig. 3

$$a^n \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty \text{, si } 0 < a < 1.$$

c) Pour étudier les suites géométriques encore, on considère l'intérêt composé. Un capital C placé à intérêt composé au taux de 3 % évolue d'année en année comme la suite géométrique C. $(1{,}03)^n$. Mais dans l'explication commune de l'intérêt composé, on dit qu'à la fin de chaque année, on *ajoute* l'intérêt au capital. D'où le glissement vers une vue additive du processus et la construction d'une suite dont le caractère géométrique est dissimulé, à savoir :

$$C + 0{,}03\ C + 0{,}003\ (C + 0{,}03\ C) + \ldots$$

On voit qu'un même problème, selon sa formulation, peut conduire la pensée dans des voies inégales.

d) Pour introduire la notion de moyenne arithmétique, on peut évoquer, par exemple, le salaire moyen des employés d'une entreprise, ou la température moyenne pour un mois donné dans un lieu donné. Dans le premier cas, il s'agit du salaire que gagnerait chacun si tout le monde gagnait la même chose. En d'autres termes, il s'agit de la somme distribuée en salaires, divisée par le nombre d'employés. La somme distribuée en salaires existe bel et bien : elle se trouve dans la mallette du payeur lors de sa tournée de fin de mois.

Dans le second cas, il s'agit de la somme des températures journalières divisée par le nombre de jours du mois. Mais la sommes des températures journalières va chercher dans les 500 à 600 degrés. Personne ne l'observe jamais. Elle n'est qu'un relais de calcul, dépourvu de sens dans la réalité.

e) Un fait de contexte peut être d'ordre affectif. Par exemple, les processus infinis pèsent souvent sur l'être mental en y développant un sentiment d'impuissance : ils sont tels par nature qu'on en vient jamais à bout, qu'on ne peut les saisir entièrement, et c'est pénible. A l'opposé, la subtilité des raisonnements sur l'infini peut séduire. Ou encore l'étude des symétries peut provoquer un sentiment esthétique d'équilibre ou d'harmonie susceptible d'orienter la construction théorique.

Comme on le voit, le contexte regroupe des choses et des formes variées, et qui de plus peuvent être perçues différemment selon les personnes. Le lien entre elles, ce qui en fait la parenté profonde, structurelle, quoique souvent cachée, c'est précisément celui qu'exhibe à la fin la théorie. Aucune théorie ne peut se former sans contexte. Pourtant, les faits de contexte sont absents de la théorie achevée. Celle-ci étant déracinée du terreau où elle a poussé, l'enseignant qui prépare un cours magistral au départ de la théorie a toutes les chances de méconnaître le terreau et de sous-estimer son rôle. Nous trouvons indispensable d'explorer le contexte de chaque théorie. Autant que faire se peut, avant de l'enseigner, mais aussi sur le chantier de l'enseignement, en observant les élèves au travail : non seulement ils créent l'essentiel du contexte, l'enrichissent et le transforment, mais encore ils sont les seuls à pouvoir montrer comment ils s'y meuvent.

9. L'INSTRUMENTALITÉ DU SAVOIR

Avant d'analyser, à la section suivante, les péripéties du franchissement du seuil épistémologique, interrogeons-nous sur le fil conducteur d'un savoir construit sur des chantiers de problèmes.

Les élèves partent de leurs évidences familières. Ils n'élaborent (avec l'aide du professeur) les premiers **éléments de théorie *que* pour résoudre des difficultés** dépassant ces évidences. Ainsi dès le début, la théorie est un instrument, elle sert à résoudre les premiers problèmes. Mais d'autres problèmes suivent. Ils débordent de plus en plus le contexte quotidien de départ et traitent parfois de difficultés de la construction théorique elle-même. Dans tous les cas, on n'amplifie et ne revoit la théorie que pour résoudre des questions demeurées jusque-là sans réponse. Dans cette perspective, la théorie a valeur *instrumentale*. C'est cela seul qui lui donne son sens.

Il faut se garder d'une méprise que pourrait provoquer ce choix de l'adjectif *instrumental*. Les mathématiques instrumentales ne sont pas celles que beaucoup de physiciens et ingénieurs évoquent en disant "les mathématiques sont un outil", entendant par là qu'elles fournissent des procédés de calcul pour débrouiller des problèmes situés en dehors d'elles. Ramener les mathématiques à cela, c'est leur ôter leurs dimensions principales. En effet, les théories mathématiques ont toutes été élaborées comme moyen de pensée (et non seulement de calcul) sur des chantiers de problèmes situés en dehors ou en bordure d'elles-mêmes, mais aussi à l'intérieur des mathématiques. Un exemple (cf. [**IX**]) est celui de la théorie des nombres réels, complétée au XIX^e siècle pour servir d'instrument à la construction de l'analyse. C'est bien là un cas d'instrumentalité s'exerçant à l'intérieur des mathématiques... (même si, par ailleurs, l'analyse sert aussi beaucoup à l'extérieur).

L'instrumentalité peut être reconnue, pour ainsi dire, en gros et en détail. En gros comme c'est le cas ci-dessus pour les réels servant à fonder l'analyse : une théorie d'une certaine ampleur est instrumentale dans une autre. En détail puisque chaque concept reçoit la forme la plus adéquate aux énoncés et démonstrations où il est engagé, et que de même chaque énoncé est mis en forme pour être exploité dans d'autres qui le suivent (15).

(15) D'où les actions en retour dans la construction théorique : chaque morceau de la théorie est façonné et refaçonné pour améliorer son fonctionnement en aval.

L'instrumentalité, c'est la structure en action, la structure vécue. Toute partie des mathématiques opère dans une autre, ou dans d'autres, ou en dehors des mathématiques, et trouve là sa raison d'être. L'instrumentalité, c'est l'adéquation des éléments de la structure les uns aux autres, et de la structure à sa fonction.

Un instrument, quel qu'il soit, a ses limites. Par exemple, une théorie mathématique ne modélise jamais un phénomène physique ou technique avec une entière fidélité : elle ignore nécessairement certains aspects du réel. Les renseignements qu'elle apporte, les prévisions expérimentales qu'elle permet demandent critique et interprétation. Ainsi, si on représente les rebondissements d'une balle sur un sol dur par une suite géométrique, on ne restitue pas l'effet de la résistance de l'air, et de plus la suite géométrique perd tout son sens dès que la hauteur des bonds est de l'ordre des dimensions moléculaires. Le praticien qui recourt aux mathématiques doit savoir ce qu'il veut, choisir adéquatement son instrument et en changer dès que nécessaire.

De même, une théorie mathématique peut embrayer fort bien sur un champ de problèmes à l'intérieur des mathématiques, puis se trouver un jour dépassée et devoir être remplacée lorsque le champ de problèmes s'est approfondi. L'histoire est remplie d'ajustements de ce genre. Pour n'en citer qu'un, l'axiomatique élémentaire des probabilités suffit à l'étude des ensembles probabilisés finis et tombe en échec à la rencontre du premier ensemble infini. Elle doit alors être remplacée par l'axiomatique de Kolmogorov.

L'idée d'une conception instrumentale des mathématiques est proposée par B. Charlot dans un article [**IX**] où il la contraste, du point de vue de leur enseignement, à deux autres conceptions. Il distingue d'abord *les mathématiques du ciel* (16), discours révélant les idées intemporelles d'une sorte de paradis platonicien dont le professeur est comme le gardien, ou le prêtre, et qu'il dévoile aux élèves dans des leçons magistrales. D'autre part, il y a *les mathématiques de la terre,* celles qui expriment l'ordre de la nature et que révèle l'étude de celle-ci : les élèves les découvrent, avec l'aide du professeur, par des observations, des expériences, des constructions, des manipulations.

Dans les deux cas, les mathématiques sont appréhendées comme pré-existant au sujet pensant. Leur étude consiste à découvrir des vérités cachées. A l'opposé, **les mathématiques instrumentales sont perçues comme construites (ou re-construites) par le sujet pensant pour résoudre des difficultés. Pour y arriver, il passe aussi par des observations, des essais, des manipulations... Mais c'est pour façonner des outils adaptés aux difficultés rencontrées, des outils qui ont vocation de lui obéir, qu'il cherche à avoir bien en main et qu'il est prêt à changer pour faire face à de nouvelles difficultés.**

On comprend pourquoi choisir d'enseigner les mathématiques en s'appuyant sur leur caractère instrumental est une option socialement importante.

En effet, le point de vue instrumental est sans doute celui auquel les enfants d'origine populaire sont le plus sensibles. Pour eux, comme l'écrit ailleurs Charlot [**IX**], "Un savoir doit servir à quelque chose et pour cela n'être pas simplement beau discours mais déboucher sur des actes, des opérations". Et puisque l'activité mathématique telle qu'elle apparaît dans l'histoire et les travaux des chercheurs est instrumentale par essence, on peut dire que les enfants d'origine populaire réclament, à leur niveau, le savoir dans son fonctionnement (17) vrai.

Qui plus est, on ne peut que révéler des vérités venues d'ailleurs, tandis que les instruments sont faits pour être maîtrisés.

Ainsi, décider d'enseigner les mathématiques en s'appuyant sur leur caractère instrumental est aussi une option politique. Dans la société qui est la nôtre, le pouvoir est de plus en plus fondé non seulement sur la science, mais sur l'invocation de la science, la persuasion, voire l'intimidation par la science. Pour que la société se maintienne telle qu'elle est, avec le pouvoir où il est, il est sans doute essentiel que la plus grande partie des citoyens acquièrent de la science l'image qu'on leur en donne aujourd'hui : celle d'un mouvement incontestable. Une certaine idée de la démocratie exige qu'on remette la science à sa place, place qui n'est pas petite, mais qui n'est pas celle d'un monument incontestable.

10. LE FRANCHISSEMENT DU SEUIL ÉPISTÉMOLOGIQUE

Voyons maintenant ce qui se passe entre le départ d'une recherche sur le terrain des élèves et la mise au point de la théorie à laquelle elle aboutit.

Chaque problème crée une sorte de vide face auquel la pensée va et vient, glisse d'un point de vue à un autre, passe par des contradictions sans toujours en prendre une conscience immédiate, perçoit comme identiques des choses qu'elle discernera plus tard, quand le problème sera cerné.

Pour dégager un fait mathématique d'une situation concrète et pouvoir en parler, il faut souvent dépasser des difficultés de mesure ou de construction, ou des imprécisions numériques. Il n'est pas si facile de prendre en considération un décimal illimité, une droite illimitée, une suite infinie de polygones impossibles à dessiner. Certains objets idéaux des mathématiques sont pressentis, mais pas plus que pressentis, derrière ces premières difficultés.

Au début, les élèves observent ou construisent des exemples et contre-exemples. Ils n'ont ni la pratique, ni à fortiori le réflexe des démonstrations de quelque ampleur, ce qui ne les empêche pas d'argumenter sur le tas, brièvement : "c'est comme ça parce que" ou "parce que sinon...".

L'évidence inductive les satisfait : ils considèrent volontiers qu'une propriété est établie dès qu'elle est constatée en quelques circonstances.

Quand ils abordent une matière nouvelle, ils sont absorbés successivement par chacun des problèmes posés et établissent peu de liens entre eux. Il leur arrive ainsi de développer, sans s'en apercevoir, deux convictions contradictoires, l'une sur un chantier de problème, et l'autre sur un autre. Ultérieurement, la jonction s'établit d'un problème à l'autre, et la contradiction vient au grand jour éventuellement avec l'aide du professeur. D'où une perplexité, parfois un affrontement. La recherche d'exemples et de contre-exemples est relancée.

---

(16) B. Charlot emprunte cette expression à J.T. Desanti.

La conclusion d'un article de J. Ladrière [**X**] recourt à la même comparaison " Ainsi (...) se révèle peu à peu la figure de ce monde invisible, souverain, et éclatant comme un ciel constellé, que les grands mathématiciens du XVIIe siècle avaient nommé d'un nom majestueux et inoubliable : la mathesis universalis ".

(17) Nous ne voulons pas soulever ici la question de la nature ontologique des êtres mathématiques. Quelle que soit la conviction que l'on ait à cet égard, force est de reconnaître leur usage instrumental. Citons pour en témoigner J. Ladrière [**X**] qui, dans le texte déjà cité où il défend une position idéaliste sur le plan ontologique, observe que "toute théorie mathématique, en dehors de son contenu propre, possède un rôle instrumental à l'égard d'autres théories et fournit la clef de problèmes posés dans d'autres secteurs des mathématiques".

Le besoin et l'esquisse, d'une démonstration peuvent naître chez certains du *désir de prouver que "l'adversaire" ne pourra pas produire de contre-exemple.* Esquisse de démonstration, et non démonstration "en forme" : l'argumentation est le prélude de la démonstration formalisée. Celle-ci proposée trop tôt à des élèves non habitués les rebutera plus qu'elle ne les convaincra.

La rencontre d'un fait surprenant est un autre type d'incitant à démontrer. En voici un exemple. En expérimentant la composition de deux symétries orthogonales d'axes parallèles **A** et **B** (voir Fig. 4), on s'aperçoit que les sauts d'un point **a** du plan vers sa première image **a**, puis de cette dernière vers l'image finale **a"** sont très différentes des deux sauts d'un point **b** choisi ailleurs dans le plan, par exemple à droite de **B.**

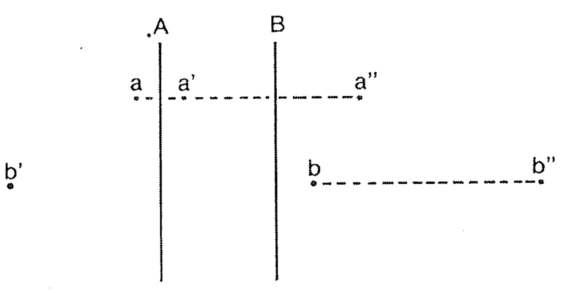


Fig. 4

Comment (par quel mécanisme) se fait-il alors que le point initial avance toujours d'une même longueur vers la droite, quelle que soit sa situation de départ ? Dans un cas comme celui-là, une argumentation suivie éventuellement d'une démonstration répondra à la question : *comment est-ce que ça se fait ?* Quant à la question *est-ce vrai ?*, elle a été liquidée auparavant par l'observation du comportement de quelques points, les élèves, comme noté plus haut, acceptant volontiers l'évidence inductive.

Au fur et à mesure que les élèves avancent dans leur recherche, non seulement ils jettent des ponts entre problèmes particuliers, mais encore ils envisagent des classes de problèmes et donc des classes d'objets. Ils passent par exemple de quelques suites géométriques de raison positive à toutes les suites de ce type, puis à toutes les suites géométriques. Ou bien quelques rotations et translations particulières les amènent à l'ensemble des déplacements. La question naturelle, source d'argumentation puis de démonstration, est alors, à propos de l'une ou l'autre propriété : *est-ce que c'est toujours comme ça ?* C'est celle qui accompagne la démarche de généralisation.

Nous avons cité ci-dessus la rencontre d'un fait surprenant comme incitant à démontrer. Des faits surprenants d'une nature nouvelle interviennent lorsque les élèves débouchent sur des classes d'objets : ils découvrent avec étonnement une structure connue sous des vêtements inattendus : par exemple ils décèlent une série géométrique sous le déguisement de l'intérêt composé, ou d'un décimal illimité périodique. Ou bien ils croient, dans un déplacement plan assez quelconque, apercevoir une rotation, puis ils l'exhibent en construisant son centre (18).

Voilà donc quelques incitations à argumenter puis à démontrer. Mais comment fait-on pour démontrer ? Et surtout quand on n'en a pas l'habitude ? Considérons donc des élèves qui ont rassemblé quelques évidences intuitives et quelques résultats expérimentaux sur un sujet donné, et supposons les en arrêt sur un doute, une contradiction, un fait étonnant, une généralisation soupçonnée mais non évidente. Il leur faut démontrer et le professeur doit les y amener au départ de leur champ même de travail. Mais démontrer n'est pas si simple. Quelque chose d'entièrement nouveau va se passer. En essayant de démontrer, les élèves vont s'apercevoir que les concepts spontanés ne sont pas appropriés au type de raisonnement discursif qu'ils cherchent à produire.

Par exemple *converger* compris comme *tendre vers* ou *s'approcher de* ne permet pas d'enchaîner la suite d'inégalités en ε et qui identifie techniquement une limite. Pour démontrer, il va falloir définir le terme *limite* de l'une ou l'autre façon qui se prête au raisonnement. De même les *déplacements,* vus de prime abord comme concernant les objets solides et bornés de l'espace, doivent faire place à des bijections de l'espace entier, sous peine de conduire à des impasses dans les démonstrations qui les concernent (voir dans **[I]** une analyse détaillée de ce point).

On voit par là la nature instrumentale des concepts : ils sont des outils pour raisonner et doivent être mis en forme à cet effet. La question *à quoi ça sert ?* trouve ici sur le champ un début de réponse. Cette vue s'oppose à la conception plus commune qui veut que les définitions aient pour fonction première de lire l'essence des choses et soient donc données avant tout le reste.

Ceci nous ramène aux mathématiques essentialistes, qu'elles soient du ciel ou de la terre (cf. n° 9), par opposition aux mathématiques instrumentales, celles que l'on construit pour résoudre certains problèmes.

Dans cette optique, le doute et l'erreur (19) ne sont pas des insuffisances des élèves qui ne seraient pas arrivés à saisir le fond des choses.

Ce ne sont pas non plus des accidents tous comptes faits regrettables, même si le professeur s'efforce d'en tirer le meilleur parti didactique. Ce ne sont même pas seulement des points de passage obligés de toute recherche. Bien plus fondamentalement, **il n'y aurait pas de recherche s'il n'y avait pas de doute et d'erreur.** La recherche n'a d'autre objectif que de les réduire et l'effort de recherche s'éteint dès qu'ils disparaissent. Qui plus est, le doute et l'erreur font plus que manifester la nécessité de la recherche, ils l'orientent, ils indiquent les points faibles où il faut creuser. Les erreurs reconnues montrent ce que la solution n'est pas.

Comme nous l'avons vu (voir n° 2) le travail des élèves sur une suite de problèmes est entrecoupé par des phases de mise en ordre des acquis : c'est ce que nous avons appelé les synthèses. Ces deux activités rythment la vie de la classe : de recherche en synthèse et de synthèse en recherche, un certain savoir se construit.

---

(18) Leur expérience mentale ressemble étonnament à celle du chercheur dont Bourbaki **[XI]** parle en ces termes : "... chaque structure apporte avec elle son langage propre, tout chargé de résonances intuitives particulières, issues des théories d'où l'a dégagée l'analyse axiomatique (...) ; et pour le chercheur qui brusquement découvre cette structure dans les phénomènes qu'il étudie, c'est comme une modulation subite orientant d'un seul coup dans une direction inattendue le courant intuitif de sa pensée, et éclairant d'un jour nouveau le paysage mathématique où il se meut".

(19) En toute rigueur, il s'agit ici des erreurs fructueuses, celles qui ont un sens pour les partenaires d'un débat, et non des erreurs stériles. Sur cette distinction des erreurs, voir n° 4.

Si, comme on l'a vu, on ne théorise que pour résoudre des difficultés déterminées sur un champ problématique nécessairement limité, alors on n'acquiert pas à chaque étape un savoir définitif qu'il suffirait d'augmenter à l'étape suivante. Au contraire, chaque étape est caractérisée par *un état de la question,* induit par le champ de problèmes du moment. Cet état est consigné dans le document *nommé synthèse.* Il est provisoire, sa durée de validité ne s'étendant que jusqu'aux problèmes suivants.

En effet, de nouveaux problèmes obligent à repenser la théorie déjà construite : ils ont été choisis pour cela par le professeur. Repenser veut dire défaire et refaire. Un concept jusque là satisfaisant devra être remplacé par un autre, voire par plusieurs autres. Il faut produire de nouvelles démonstrations, mais aussi revoir les anciennes puisque les concepts ont changé.

Devoir défaire et refaire, c'est affronter une crise. Pour qu'elle ait un sens, il faut que l'anomalie à traiter soit mise à jour clairement, et donc que le savoir sapé par la crise opère d'abord efficacement sur un champ contextuel. C'est même cela qui induit la crise. S'accrochant à un état de la question jugé satisfaisant jusque-là, les élèves ont beaucoup de peine à ouvrir les yeux sur la crise. Quand ils y arrivent, le choc est grand et dépasse souvent le simple plan intellectuel.

La crise doit cependant être tolérable et le constat de difficulté ne peut pas être un constat d'impuissance. Il doit renvoyer à des actions possibles : la recherche reprend en se concentrant sur ce qui ne va pas. La crise enclenche une réflexion intense, riche en découvertes.

Les crises deviennent de plus en plus profondes au fur et à mesure que la classe avance. En effet, le savoir s'étend en se structurant toujours davantage. Les menaces sont d'autant plus vivement ressenties, mais aussi ont d'autant plus de sens, qu'elles s'exercent contre un objet théorique important, longuement façonné.

Les élèves s'aguerrissent, petit à petit, leur éducation à la recherche leur apprenant qu'un savoir acquis, parfois durement, peut être revu, amélioré, refait. Ils puisent dans cette expérience la conviction que la science produit des outils de pensée : on peut toujours améliorer ses outils. Nous voici ramenés, une fois encore, au point de vue instrumental.

Partie d'une situation en quelque sorte embryonnaire, la construction théorique procède surtout par différenciation et coordination de concepts, pour répondre aux contraintes objectives des exemples et contre-exemples dont le contexte est l'inépuisable pourvoyeur. Au fil de sa croissance, elle découvre ses liens avec des faits et des propositions de plus en plus nombreux. Le contexte de la croissance théorique s'étend. En outre, les élèves le perçoivent autrement, du fait même de leurs connaissances théoriques nouvelles, qui leurs fournissent des clés d'interprétation insoupçonnées. Le contexte enfin inclut de plus en plus de connaissances elles-mêmes théoriques : la théorie étudiée se découvre des liens ou des adhérences avec d'autres théories. La culture mathématique des élèves s'approfondit.

Partie de situations problématiques familières, la classe devient, d'étape en étape, par une sorte de dérive d'intérêt, plus sensible aux défis de la construction théorique. Sa motivation évolue. Le besoin d'instrumentalité des éléments théoriques commence à jouer à l'intérieur des mathématiques autant que par rapport aux applications.

Le franchissement du seuil épistémologique est une progression dialectique entre la théorie en construction et le contexte en évolution. L'adjectif *dialectique* est pris dans un sens qui rassemble plusieurs de ses connotations communes : la rencontre et la résolution d'une suite de contradictions, l'impulsion donnée à l'esprit par la conscience de ces contradictions, l'entraînement de proche en proche d'une pensée en devenir sans cesse relancée vers sa constitution théorique. Par opposition à la construction logique de la science, le mot dialectique renvoie à sa construction historique, qu'il s'agisse de l'effort séculaire de l'humanité ou de celui d'une personne.

Pour beaucoup d'enseignants, la théorie achevée est à ce point prégnante qu'elle éclipse à leurs yeux le contexte dont sa croissance est nourrie. C'est ce qui les amène à substituer dans leur enseignement l'enchaînement logique à la progression dialectique. Mais dans cette optique, les erreurs sont perçues comme nocives et sont pourchassées, puisque l'enchaînement logique ne les tolère pas, et les faits de contexte sont soit ignorés, soit réduits au rôle passif d'illustration.

C'est ainsi que l'enchaînement logique emprisonne la pensée et aboutit souvent à la détruire. Qu'on ne nous fasse cependant pas dire ici que nous sommes opposés à la forme déductive des exposés mathématiques. Un, l'objectif de l'enseignement mathématique est précisément d'y aboutir. Nous pensons qu'il est souvent ineffice d'en partir.

11. LES ACQUIS MÉTHODOLOGIQUES

Franchir un seuil épistémologique en travaillant sur des problèmes, c'est faire des mathématiques assez profondément pour que, par delà l'acquisition théorique immédiate, il reste une expérience de cette pratique. Parce qu'elle est réinvestissable dans des activités mathématiques ultérieures, éventuellement tout autres, cette expérience contribue à la capacité générale de faire des mathématiques. On la discerne à divers niveaux.

D'abord, comme il va de soi, au plan des procédés généraux de raisonnement : l'implication, la condition nécessaire et suffisante, le sens et l'utilité de la contraposée, la preuve par l'absurde, le raisonnement par récurrence, etc.

Les élèves s'habituent, au fil des problèmes, à modéliser des situations familières, à comprendre les dénaturations conceptuelles qu'impose la forme mathématique du raisonnement. Ils acquièrent le réflexe de la symbolisation et des manipulations algébriques.

Ils apprennent à choisir opportunément parmi les supports possibles de la pensée : dessins et graphiphes divers, diverses expressions des nombres, symboles, etc.

Ils apprennent à évoquer, selon leur utilité, certaines catégories d'intuitions, par exemple celles qui sont liées à des symétries, ou à des emboîtements de figures. Par exemple encore, ils se servent selon les cas de la perception dynamique des fonctions (un ensemble envoyé sur un autre) ou de leur perception statique (un certain ensemble de couples). Ils utilisent les interférences des directions spatiales privilégiées, horizontale et verticale, avec les raisonnements de géométrie synthétique sur des droites et plans orthogonaux ; et parfois ils déjouent les pièges et ces interférences.

Ils s'habituent à passer du fini à l'infini, comme quand leur attention se porte de quelques points remarquables d'une figure (sommets d'un polygone) soumise à une transformation linéaire à tous les points de la figure ou à tout l'espace. Il en va de même pour le passage d'un point générique à tous les points ou du *pour un quelconque* au *pour tout,* etc., etc.

Sur un plan plus général, *l'expérience du travail mathématique* enseigne à particulariser (chercher des exemples), ou généraliser au bon moment, à évoquer les cas limites ou extrêmes, à multiplier les cas de figure ou de raisonnement, et à vérifier qu'on n'en a pas oublié, à changer de point de vue, à "penser à côté", etc... bref à utiliser les ressources tactiques regroupées sous le nom d'heuristique.

Elle familiarise ainsi avec les types d'accidents de la construction d'un savoir, comme par exemple les découvertes et identifications de structures isomorphes, ou encore les contradictions provoquant des bifurcations conceptuelles (ainsi par exemple, dans certains problèmes concernant des ensembles finis, l'égalité et l'équipotence sont confondus sans dommage, alors que ces deux propriétés doivent être distinguées pour les ensembles infinis).

Ce qui rassemble ces acquis méthodologiques, c'est qu'ils se situent au-delà de la théorie particulière visée par une suite de problèmes. Ils sont ce qu'il y a de plus important dans la formation mathématique. Bien entendu, les élèves ne les perçoivent habituellement pas du premier coup, ni de façon claire. Il faut les aider à en prendre conscience, à les expliciter.

Cette connaissance plus intime, qui est d'abor(pour lui-même un progrès intellectuel, l'aide à cerne les difficultés des élèves sur leur chantier de re construction théorique, et à en débattre avec eux.

Plusieurs fois déjà, le GEM a récrit dans cett(optique certains morceaux de théorie, soit en géomé trie, soit en analyse. Ces travaux ont été facilités par l: présence, dans le groupe, de ses membres étudiant: ou attachés à l'Université.

C'est ainsi par exemple qu'en réordonnant le: éléments de la théorie des suites, nous avons donn(de l'axiome d'Archimède divers énoncés plus parlant: que l'énoncé le plus commun. Entre autres celui-ci toute suite arithmétique de raison strictement positiv(tend vers l'infini. Ensuite, nous avons réalisé, chos(simple mais dont on ne s'avise pas nécessairement que la notion de limite et les propriétés qui fondent l(calcul des limites sont indépendantes de l'Axiom(d'Archimède. Mais aussi que si on cherche à illustre cette théorie dans un contexte où l'Axiome d'Archi mède n'est pas encore présent, on ne trouve guèr(d'autres exemples que les suites constantes ou celle: qui "deviennent" constantes après un nombre fini d(termes.

12. LE CHEMINEMENT DU PROFESSEUR

Jusqu'ici nous avons esquissé l'évolution, du point de vue des élèves, du champ de pensée que constitue la classe : franchissement d'un seuil épistémologique, c'est-à-dire construction progressive d'une théorie nourrie et formée par un contexte problématique, et en même temps apprentissage méthodologique.

Mais l'enseignant est aussi actif dans le champ de pensée, ce qui l'amène à évoluer de deux façons.

D'abord, en observant les élèves, il retrouve un point de vue "naïf" face aux questions qu'il a la responsabilité d'enseigner : il prend conscience des paliers de la conceptualisation, que sa formation scientifique l'empêche de discerner à priori.

Ensuite, retournant pour soutenir son enseignement aux exposés théoriques ordinaires, il redécouvre leur ordonnance linéaire habituelle et la critique du point de vue de ce qui est sa tâche à lui : organiser la construction du savoir par la classe. Il s'aperçoit que certains concepts ou propositions y exhibent mal leur fonction instrumentale, soit parce qu'ils sont énoncés dans une forme peu appropriée, soit parce qu'ils interviennent prématurément, loin en amont de l'endroit où ils sont appelés à jouer un rôle clé. Il est ainsi amené à clarifier et parfois à récrire la théorie, non pas le plus souvent pour en servir telle quelle aux élèves une vision révisée, mais bien pour percevoir mieux les liens nécessaires qui en unissent les parties, en somme pour en discerner mieux le sens interne.

TROISIÈME PARTIE :

ÊTRE EN MÊME TEMPS ACTEUR ET OBSERVATEUR D'UN ENSEIGNEMENT

13. NOUS AVONS ÉTUDIÉ NOTRE ENSEIGNEMENT

Nous avons exposé, dans la deuxième partie de cette lettre, comment nous voyons la construction d'un savoir mathématique : la théorie éclot et grandit dans un **contexte** problématique : les élèves, soutenus par le professeur, franchissent un **seuil épistémologique ;** ce qu'ils construisent déborde la théorie mathématique choisie comme objet d'enseignement et s'étend à des **acquisitions méthodologiques ;** le professeur de son côté **aménage la théorie** pour en pénétrer le sens le plus possible.

Les mots soulignés ci-dessus représentent pour nous quatre concepts clés qui nous aident à comprendre et organiser notre action. Nous ne nous sommes pas bornés à les identifier et les définir, dans la mesure où ils se laissent cerner. Pour le sujet des isométries du plan, nous avons longuement étudié le contexte, le passage par étapes du seuil épistémologique et les acquis méthodologiques, et nous avons récrit la théorie, en tâchant de choisir des axiomes inspirés par l'intuition. Il en est résulté un livre intitulé *L'Archipel des Isométries* (c'est un archipel d'îlots déductifs) inspiré par un travail de plusieurs années dans des classes très diverses.

Comme il nous semblait que cette première étude avait un sens et une utilité, nous en avons fait une deuxième sur le sujet des suites, de la convergence et des limites, en traitant à nouveau des quatre points clés : contexte, passage du seuil, acquis méthodologiques et aménagement de la théorie. Il se confirme que des études de ce genre sont, par nature, amples : un nouveau livre, à paraître d'ici quelques mois, rendra compte de nos observations et réflexions sur les suites et limites.

Entretemps, nous avons traité plus brièvement, mais dans le même esprit, divers autres sujets : les fonctions et leur représentation, la droite, les représentations planes d'objets à trois dimensions, les vecteurs, le calcul algébrique. Evidemment, nous n'avons pu mener à bien ces travaux que parce que nous sommes assez nombreux (une quarantaine) et que nous nous voyons souvent (trois heures chaque semaine, non compte tenu des heures passées à plusieurs dans des classes).

14. LE STATUT D'UNE REFLEXION COMME LA NOTRE : L'ÉPISTÉMOLOGIE SUR LE TAS

Nous avons cru prendre un recul critique par rapport à notre enseignement. Mais était-ce vraiment possible ? Etait-ce sérieux ? Selon quels principes avons-nous regroupé nos observations et nos réflexions ? Avions-nous quelque chance d'échapper aux hasards et aux pièges d'un terrain de réflexion aussi touffu, mouvant et mal défini ? Nos classe sont en permanence de vastes champs de pensée évoluant par étapes, par saccades souvent, du quotidien vers la théorie. En tant qu'enseignants, nous avons été acteurs de cette évolution. Dans quelles conditions pouvions-nous en outre en devenir observateurs ? Notre intention *première* a été d'enseigner. Mais il est vrai aussi que nous avons, sur le chantier, expérimenté une certaine manière d'enseigner.

Or, il faut bien voir que l'institution de l'expérience éducative n'est pas libre : on ne peut pas prendre les élèves pour cobayes. Chaque enseignant choisit le mode d'enseignement qui lui paraît le meilleur en vertu de son expérience, de ses lectures et d'une **réflexion à *priori*. C'est ce que nous avons fait. Mais ce** choix nécessaire basé sur une conviction préalable ne semble guère compatible avec une position d'observateur impartial.

On pourrait proposer, pour expérimenter en classe sans menacer l'apprentissage global des élèves, de ne soumettre ceux-ci que de temps en temps à l'une ou l'autre séquence brève d'enseignement expérimental. Mais à réduire ainsi l'enjeu, on réduit aussi le sens de l'expérience. Enseigner par courtes séquences isolées, ce n'est pas vraiment enseigner. Or, on peut croire que pour expérimenter sur l'enseignement, il faut enseigner.

Nous avons choisi notre manière d'enseigner à partir d'une conviction épistémologique : *la reconstruction d'une théorie est un processus global.* D'abord parce qu'une théorie n'est pas analysable en petits morceaux indépendants : les définitions et les théorèmes n'ont de sens que les uns par rapport aux autres, les définitions sont des outils dans les démonstrations, les théorèmes servent les uns dans les autres, l'essentiel du sens est dans la structure de l'ensemble (20).

(20) Voir dans *L'Archipel des Isométries* [1] une discussion sur la pauvreté du sens lexical (c'est-à-dire le sens étroit tel qu'on le trouve dans les dictionnaires de termes mathématiques) comparé au sens global, issu de la richesse structurale de la matière (le "sens contextuel"). C'est de ce dernier sens qu'il est question ici.

Ensuite, comme nous l'avons vu à propos des seuils épistémologiques (cf. n° 7), chaque théorie renvoie à des objets ou des facettes multiples de la réalité quotidienne. L'appropriation d'une théorie ne résulte pas de l'accumulation sur un terrain vierge de petits morceaux clairs et définitifs. Elle est une transformation, alternativement continue et saccadée, d'une réalité mentale structurée mathématiquement. En outre, elle transforme la personne et son appréhension du quotidien. Qui plus est, le savoir, comme nous l'avons vu, se construit entre autres à travers de multiples communications entre élèves, et entre élèves et professeur : c'est un processus social. Ce qu'il faut donc étudier, c'est le champ de pensées complexe que constitue la classe entière. On ne peut pas le diviser, le morceler, pour mieux en discerner les composantes, car alors il cesse d'exister. Il faut partir de l'ensemble. Une pensée théorique en construction se nourrit autant de richesse et d'échanges que de clarté.

C'est pour cela que notre recherche a ressemblé beaucoup plus à celle de l'explorateur qu'à celle du physicien ou du biologiste. Par une exigence critique évidente, ces derniers isolent les phénomènes pour les rendre reproductibles et pouvoir manipuler séparément chacun de leurs facteurs. Nous nous trouvions, à l'opposé, dans des situations impossibles à isoler et à reproduire : non seulement parce l'imagination des élèves est imprévisible et inépuisable, mais encore parce que les facteurs déterminants de la classe au travail et des individus qui la composent sont impossibles à maîtriser : on y trouve tout le passé intellectuel et affectif de chacun. C'est pourquoi, et paradoxalement, par une exigence critique inverse de celle des sciences naturelles, nous avons travaillé dans les classes les plus diverses possible. Nous nous donnions ainsi une meilleure chance de ne pas monter en épingle des observations isolées ou fortuites, ou de passer fortuitement à côté d'un fait commun. L'explorateur ne gagne rien à focaliser son attention sur un petit secteur, il doit découvrir et observer le plus possible.

Nous nous sommes donnés une garantie d'ouverture critique en travaillant en équipe composite : enseignants du secondaire de divers âges et formations rompus à la pratique et à la réflexion sur le tas, enseignants universitaires familiers d'une autre pratique et particulièrement sensibles à la théorie, étudiants proches encore de leurs études secondaires et se trouvant toujours dans la condition d'enseigné. Tous, par moments, avons été plongés dans la tâche d'enseignement, le nez dessus, mais à d'autres moments nous avons pris du recul dans de longues heures de discussion et d'analyse.

Nous avons essayé de comprendre ce que les élèves comprennent quand "ils ne comprennent pas encore". Ce n'est pas facile et c'est long. Le professeur-observateur est en quelque sorte aveuglé par sa science, source de clartés trop vives. Il doit s'entraîner à oublier (provisoirement) les clés d'nterprétation immédiate que fournissent les connaissances scientifiques et devenir par là capable de capter la "naïveté" du débutant. Nous nous sommes aidés de lectures historiques pour nous déconditionner, retrouver des points de vue "primitifs" sur des questions depuis longtemps scientifiquement classées.

Pour expliquer ce qui nous est arrivé au fil de cinq ou six années de recherche, revenons à la métaphore de l'explorateur. Celui qui s'aventure dans une forêt touffue s'attend à ne rassembler au début que des observations désordonnées. A la longue cependant, il discerne des zones, non autonomes certes, mais dont chacune se prête à une description cohérente : le raz du sol, la zone moyenne, les cimes, les clairières... Le fonctionnement de l'ensemble se ramène par après à des échanges, des articulations entre les zones.

Quelque chose d'analogue s'est passé pour nous. Notre forêt d'observations s'est à la longue ordonnée assez naturellement en quelques zones principales : le contexte, la théorie en formation dans la tête des élèves, de chaque élève, le seuil, les acquis méthodologiques, le réaménagement de la théorie dans la tête de l'enseignant.

Il y a là, nous l'avons dit, quelques concepts qui inspirent actuellement notre travail. Nous n'en avons pas, bien entendu, disposé *a priori*. Au contraire, nous les avons reconnus et essayés petit à petit, au fil des années, et pas tous à la fois. Ils n'ont rien d'absolu, car ils ont un lien avec nos options pédagogiques particulières. Nous n'avons nulle envie de les proposer comme une grille définitive d'analyse des actions d'enseignement mathématique. Ils ont évolué, ils évolueront encore avec nos tentatives et nos recherches futures. Mais tels que nous les avons décrits ci-dessus, ils nous aident à pénétrer dans la réalité de l'apprentissage, toujours plus touffue et plus imprévue qu'on ne s'y attend. Ils nous aident à nous y retrouver quelque peu, à construire, non une théorie générale, mais quelques îlots de rationalité locale. Ils nous aident à réfléchir et à faire des projets.

EPILOGUE

Chers amis du G.F.E.N., notre lettre se termine ici. Elle est bien longue et nous vous prions de nous en excuser, mais nous n'avons pas vu le moyen de vous communiquer tout cela en moins de pages sans risquer des obscurités. Nous espérons que vous ne nous ménagerez pas vos critiques. Merci à Bernard Charlot de nous avoir demandé ce texte : il a été pour nous l'occasion d'un progrès.

Nous espérons engager avec vous une collaboration fructueuse et nous vous adressons nos salutations très cordiales.

Le GEM

BIBLIOGRAPHIE

[I] GEM, *L'archipel des isométries,* Louvain-la-Neuve, 1982.
[II] C.R. Rogers, *Le développement de la personne,* Dunod, Paris, 1972.
[III] GFEN, *Quelles pratiques pour une autre école ?,* Casterman, Tournai, 1982.
[IV] H. Wallon, *De l'acte à la pensée,* Flammarion, Paris, rééd. 1970.
[V] R. Thom, *Paraboles et catastrophes,* Flammarion, Paris, 1983.
[VI] H. Freudenthal, *Mathematics as an educational task,* D. Reidel, Dordrecht, 1973.
[VII] Le GRAIN, *Evaluer pour former,* Les Cahiers du GRAIN 2 (sans date).
[VIII] GEM, *Fouetter un chat avec une droite,* Louvain-la-Neuve, 1981.
[IX] B. Charlot, *Les contenus non mathématiques dans l'enseignement des mathématiques,* Cahiers Galilée n° 42 (1978), 5-9.
[X] J. Ladrière, Objectivité et réalité en mathématiques, *Dialectica 20,* 215-241.
[XI] N. Bourbaki, L'architecture des mathématiques, dans F. Le Lionnais (éd.), *Les grands courants de la pensée mathématique,* Cahiers du Sud, 1948.

PUBLICATIONS DU GEM

DOSSIER 1 : UNE EXPÉRIENCE D'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE A L'ECOLE PROFESSIONNELLE, 1979, 22 pages, Prix : 40 FB.
Apprendre à localiser, repérer, situer.

DOSSIER 2 : UNE GÉOMÉTRIE POUR TOUS LES JOURS (Axiomatique et enseignement de la géométrie), deuxième édition, 1981, 104 pages. Prix : 130 FB.
Pourquoi enseigner la géométrie à partir de situations ouvertes.

DOSSIER 3 : L'ARCHIPEL DES ISOMÉTRIES, Essai de redécouverte, 1982, 288 pages. Prix : 480 FB.
Livre destiné aux professeurs mais contenant des fiches de travail pour les élèves. Archipel formé d'îlots déductifs construits avec les élèves. La relation des mathématiques au quotidien et les étapes de la construction d'un savoir mathématique.

PROPOSITIONS 1 : LE GROUPE D'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE, 1981, 13 pages. Prix : 30 FB.
Description et fonctionnement du GEM qui pratique l'enseignement des maths dans son insertion sociale réelle et complète en isolant le moins possible le champ de sa réflexion et de son action.

PROPOSITIONS 2 : RENCONTRES AVEC L'INFINI, 1981, 44 pages. Prix : 100 FB.
Quatorze problèmes de difficulté croissante sur les suites et les séries.

PROPOSITIONS 3 : L'OUTIL VECTORIEL, 1981, 21 pages. Prix : 60 FB.
Cet outil est créé sur des chantiers de démonstration de théorèmes sur les transformations planes.

PROPOSITIONS 4 : LES FONCTIONS, C'EST AUSSI AUTRE CHOSE..., 1981, 44 pages. Prix : 100 FB.
Une fonction c'est bien plus qu'un ensemble de couples.
Contient beaucoup de matériaux pour enseigner concrètement les fonctions.

PROPOSITIONS 5 : FOUETTER UN CHAT AVEC UNE DROITE, 1981, 24 pages. Prix : 75 FB.
Le concept de droite ne va pas de soi : du fil tendu à la droite axiomatique.

PROPOSITIONS 6 : UNE ISOMÉTRIE DE L'ESPACE VUE A BASSE, MOYENNE ET HAUTE ALTITUDE, 1982, 24 pages. Prix : 80 FB.
Tout déplacement de l'espace admettant un point fixe est une rotation.

PROPOSITIONS 7 : ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES POUR LES ÉCOLES PROFESSIONNELLES... ET LES AUTRES, 1982, 63 pages. Prix : 150 FB.
Représentation en plan d'objets de l'espace pour communiquer des formes et des dimensions.

PROPOSITIONS 8 : ECRIRE DES MATHÉMATIQUES, 1983, 24 pages. Prix : 100 FB.
Ou l'art de présenter des mathématiques par écrit et avec des figures évocatrices.

M. PELTIER, N. ROUCHE, M. MANDERICK, CONTREMANUEL DE STATISTIQUE ET PROBABILITÉ, 1982, 210 pages. Prix : 530 FB.
Initiation théorique introduite par des exemples multiples et socialement importants.

LA GÉOMÉTRIE SUR LE TERRAIN DES ÉLÈVES, Actes du Colloque inter-IREM de géométrie de mai 1983, 1984 ; 163 pages. Prix : 200 FB.
Une douzaine d'auteurs présentent des expériences d'enseignement de la géométrie dans diverses classes de France et de Belgique.