Des situations pour introduire les variables aléatoires et les principales lois

Anne Bélenger, Ginette Cuisinier, Christine Docq, Christiane Hauchart,

Marc Lefebvre, Dany Legrand, André Malo, Rosane Tossut

Introduction

Cette séquence de cours sur les variables aléatoires est constituée de problèmes qui amènent les différentes notions. Chaque problème est résolu en détails et la résolution est accompagnée d'indications méthodologiques présentées sur fond grisé. Des synthèses sont proposées également.

Nous étudions dans un premier temps les variables aléatoires discrètes. La notion de variable aléatoire ainsi que la moyenne sont introduites au moyen du Keno. La comparaison de deux loteries amène les indices de dispersion.

Nous envisageons ensuite la loi binomiale, introduite par un problème relatif aux questionnaires à choix multiple, ainsi que son approximation par la loi de Poisson. Un tableur est utilisé pour comparer les distributions des deux lois et apprécier la validité de l'approximation selon la valeur de la probabilité que l'on fait varier à l'aide d'un curseur.

La notion de variable aléatoire continue apparaît dans un problème de temps d'attente du métro. Cette variable uniforme permet d'amener assez naturellement la fonction de distribution et la probabilité représentée par une aire.

La distribution des tailles dans une population introduit la loi normale. Celle-ci est envisagée ensuite comme approximation d'une loi binomiale à partir d'un problème de référendum.

1. <u>Variables aléatoires discrètes</u>

1. Le jeu du Keno

a) Explorons la fiche de jeu du Keno.

b) Imaginons qu'on joue sur une seule grille avec un tirage unique et une mise d'un euro. Combien de numéros cocheriez-vous ? Pourquoi ?

c) En jouant comme précédemment, quelle est la probabilité de gagner 250 000 € ?

d) A la dernière ligne, on lit « chance : 1 sur 7,38 » ; à quoi cela correspond-il ?
Pour répondre à cette question, intéressons-nous à présent aux autres probabilités de gain en choisissant 10 numéros. Construisons un tableau avec les deux premières colonnes de gauche du tableau des gains auxquelles nous ajoutons une colonne pour les probabilités. Pourquoi n'y a-t-il pas de gain dans les lignes 4, 3, 2, 1 ?

e) On voit qu'on a autant de chance de gagner avec 10 numéros qu'avec 5 numéros. Pourquoi certains choisissent-ils de jouer 5 numéros plutôt que 10 alors qu'on a à peu près la même chance de gagner mais on ne peut arriver à des montants aussi importants ?

f) Combien gagnerait-on si on remplissait tous les bulletins possibles avec 5 numéros ? Combien gagnerait-on en moyenne par grille ? Est-ce intéressant ?

g) Que gagnerait-on en moyenne par grille si on jouait 10 numéros ? Pour simplifier les calculs, il serait judicieux d'utiliser les probabilités calculées au d).

<u>Solution</u>

a) et b) Les élèves explorent librement. Il faut comprendre qu'on doit cocher au minimum 2 numéros et au maximum 10 par grille. Le tableau des gains se réduit à un tableau triangulaire puisqu'on ne peut pas avoir plus de numéros exacts que de numéros cochés.

c) On gagne 250 000 € si on a coché 10 numéros qui font partie des 20 tirés au sort. Pour trouver la probabilité d'avoir 10 numéros exacts, on cherche le quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles.
Le nombre de cas possibles est le nombre de tirages de 10 numéros parmi les 70 de la grille. Il s'agit donc de C_{70}^{10}.
Le nombre de cas favorables est le nombre de choix possibles de 10 numéros parmi les 20 tirés. Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 10 éléments parmi 20, l'ordre n'ayant pas d'importance : C_{20}^{10}.

Sur la plupart des calculatrices, il est impossible de trouver la valeur de 70! car cette valeur dépasse leur capacité. Il faut donc soit recourir aux fonctions spéciales de calcul des combinaisons, soit faire les simplifications qui s'imposent dans le calcul explicite.
On obtient :

$$\frac{C_{20}^{10}}{C_{70}^{10}} \cong 4{,}657 \cdot 10^{-7}$$

d) On observe que « 1 chance sur 7,38 » au bas de la colonne correspond à une probabilité beaucoup plus grande : elle tient compte de tous les cas de cette première colonne, puisqu'il y a aussi des gains lorsqu'on a 0 ou entre 5 et 9 numéros exacts.
On va élaborer une colonne des probabilités respectives d'avoir coché entre 0 et 10 numéros exacts.
On peut partager la tâche en répartissant entre les élèves les calculs des différentes probabilités.
Détaillons le calcul de la probabilité d'avoir 6 numéros exacts parmi les 10 cochés. Le nombre de cas favorables est donné par le nombre de choix de 6 numéros exacts parmi les 20 tirés multiplié par le nombre de choix des 4 autres parmi les 50 non tirés.
Donc la probabilité est donnée par :

$$\frac{C_{20}^{6} . C_{50}^{4}}{C_{70}^{10}} \cong 0{,}0225014$$

Voici le tableau complet :

Nombre de numéros exacts	Gain	Probabilité
10	250 000	$4{,}657.\ 10^{-7}$
9	2 000	$2{,}116.\ 10^{-5}$
8	200	0,0003889
7	10	0,0038300
6	4	0,0225014
5	1	0,0828053
4	0	0,1940750
3	0	0,2870353
2	0	0,2571358
1	0	0,1263123
0	3	0,0258940

Si on additionne toutes les probabilités des lignes pour lesquelles il y a un gain, on obtient un total de 0,135441483 qui est égal à la fraction $\frac{1}{7{,}38}$.
On peut s'étonner de l'absence de gain dans les lignes relatives à 4 ou 3 ou 2 ou 1 numéros exacts cochés. Le tableau fournit une explication : la probabilité d'obtenir entre 1 et 4 numéros exacts est nettement plus élevée que dans les autres cas, donc la loterie n'accorde pas de gain dans ces cas. Par contre, lorsqu'aucun numéro n'est exact, il y a un gain car ce cas est plus rare.

A ce stade-ci de la résolution, on peut fournir aux élèves le tableau "épuré" des probabilités correspondant aux situations de gains (voir annexe 1).

e) On peut d'abord observer qu'on a environ 13% de chance de gagner, que l'on choisisse 10 ou 5 numéros. Lorsqu'on choisit 10 numéros, on peut gagner 250 000 € mais il y a vraiment

très peu de chance que cela se produise. Par contre, lorsqu'on choisit 5 numéros, on a environ 11% de chance de cocher 3 numéros exacts mais, dans ce cas, le gain est petit.
Il faut pouvoir tenir compte à la fois du montant du gain et de la chance de gagner. Nous nous attellerons à cette tâche ci-après.

f) Imaginons que l'on remplisse autant de grilles qu'il y a de possibilités de choisir 5 nombres parmi 70. Calculons ce nombre de choix :

$$C_{70}^{5} = \frac{70.69.68.67.66}{5!} = 12\,103\,014$$

A raison d'une mise de 1 € par grille, on dépenserait donc 12 103 014 € !
Que gagnerait-on dans ces conditions ? Tout ce qu'il y a à gagner !
C'est-à-dire autant de fois 150 € qu'il y a de possibilités d'avoir 5 bons numéros parmi les 20, plus autant de fois 5 € qu'il y a de possibilités d'avoir 4 bons numéros, plus autant de fois 2 € qu'il y a de possibilités d'avoir 2 numéros. Cela nous donne :

$$150.C_{20}^{5} + 5.C_{20}^{4}.C_{50}^{1} + 2.C_{20}^{3}.C_{50}^{2} = 6\,329\,850 \text{ €}.$$

On peut faire le rapport entre ce qu'on a gagné et ce qu'on a dépensé :

$$\frac{6\,329\,850}{12\,103\,014} \cong 0{,}52299$$

On gagne environ 52% de la mise. On peut dire qu'en moyenne, le gain par grille est de 0,52 €.
Mais on a aussi perdu environ 48 % de la mise soit 5 773 164 € !

g) Pour répondre à cette question, on peut reprendre le calcul précédent pour y faire apparaître des quotients de combinaisons comme ceux qui ont servi à établir les probabilités en réponse à la question c).

Reprenons le rapport construit ci-dessus :

$$\frac{6\,329\,850}{12\,103\,014} = \frac{150C_{20}^{5} + 5C_{20}^{4}C_{50}^{1} + 2C_{20}^{3}C_{50}^{2}}{C_{70}^{5}}$$

Ecrivons-le en séparant les termes de la somme :

$$150\frac{C_{20}^{5}}{C_{70}^{5}} + 5\frac{C_{20}^{4}C_{50}^{1}}{C_{70}^{5}} + 2\frac{C_{20}^{3}C_{50}^{2}}{C_{70}^{5}}$$

Nous réalisons que les quotients de combinaisons sont les probabilités d'avoir respectivement 5, 4 et 3 numéros exacts parmi les 5 numéros cochés.
Donc, la réponse peut aussi s'écrire

$$150\,P(\text{5 numéros exacts}) + 5\,P(\text{4 numéros exacts}) + 2\,P(\text{3 numéros exacts}) \cong 0{,}52299.$$

Ce nombre peut être interprété comme le gain moyen par grille. On peut espérer gagner 0,52 € pour une mise de 1 €. C'est ce qu'on appelle ***l'espérance de gain***.

Pour répondre à la question de l'espérance de gain si on joue 10 numéros, on peut construire, de manière analogue à ce qu'on vient de faire, un calcul avec les probabilités déjà déterminées précédemment pour cette colonne :

Nombre de numéros exacts	Gain	Probabilité
10	250 000	$4,657 . 10^{-7}$
9	2 000	$2,116 . 10^{-5}$
8	200	0,0003889
7	10	0,0038300
6	4	0,0225014
5	1	0,0828053
0	3	0,0258940

L'espérance de gain est obtenue en additionnant les produits des gains par la probabilité respective de les obtenir :

$$250\,000 . 4,657 . 10^{-7} + 2\,000 . 2,116 . 10^{-5} + ... + 3 . 0,0258940 \cong 0,53 \text{ €}$$

On remarque que l'espérance de gain quand on sélectionne 10 numéros est très proche de celle calculée pour la sélection de 5 numéros.

En faisant des calculs analogues pour les autres colonnes du tableau du Keno, on obtient des espérances entre 0,51 et 0,54. En effet, les montants des gains sont fixés, par la loterie, pour qu'il en soit ainsi.

Pour certains élèves, les deux dernières questions peuvent s'avérer trop complexes. On peut alors présenter des situations plus simples comme celles de la fiche 2 et ensuite revenir au jeu du Keno.

2. Comparaison de 2 loteries

Deux loteries sont organisées le jour de la fête du village. Pour chacune sont mis en vente cent billets à 4 €. La loterie organisée par le bourgmestre offre un lot de 200 € et dix lots de 5 €. Celle organisée par le club sportif offre deux lots de 50 €, dix lots de 10 € et dix lots de 5 €.

Comparez les deux loteries.

Remarquons que, pour les deux loteries (que nous noterons Lb et Lc), cent billets sont en jeu et le total des gains est de 250 €.

Avec Lb, il y a onze billets gagnants ; avec Lc, vingt-deux billets gagnants. On gagnera donc deux fois plus souvent avec Lc, mais, par contre, on peut gagner quatre fois plus avec Lb.

Utilisons la notion d'espérance introduite à la section précédente qui tient compte, à la fois, des gains et de leurs probabilités.

Avec Lb :

$$200\cdot\frac{1}{100}+5\cdot\frac{10}{100}+0\cdot\frac{89}{100}=2{,}5\ €$$

Avec Lc :

$$50\cdot\frac{2}{100}+10\cdot\frac{10}{100}+5\cdot\frac{10}{100}+0\cdot\frac{78}{100}=2{,}5\ €$$

Nous obtenons le même montant. Cette ***espérance mathématique*** correspond au gain moyen par billet si on achetait tous les billets. Le prix de vente d'un billet étant de 4 €, la perte moyenne est donc de 1,5 €.

On se rend compte que pour différencier ces deux loteries, il faut s'intéresser aux écarts par rapport à l'espérance.

Les élèves ayant de bons souvenirs du cours de statistiques penseront à la variance. Dans le cas contraire, on peut les laisser essayer de mesurer ces écarts.

S'ils font la moyenne pondérée de ces écarts avec leurs signes, ils trouvent 0. Avec les valeurs absolues de ces écarts, ils trouvent l'écart-moyen. Mais le plus souvent, on préférera calculer la moyenne des carrés des écarts pour faciliter les calculs.

Calculons la variance.

Avec Lb :

$$V_B=(200-2{,}5)^2\ \frac{1}{100}+(5-2{,}5)^2\ \frac{10}{100}+(0-2{,}5)^2\ \frac{89}{100}=321.25\ €^2$$

Avec Lc :

$$V_C=(50-2{,}5)^2\ \frac{2}{100}+(10-2{,}5)^2\ \frac{10}{100}+(5-2{,}5)^2\ \frac{10}{100}+(0-2{,}5)^2\ \frac{78}{100}=56.25\ €^2$$

Pour revenir à l'euro, calculons les écarts-types.

Pour Lb : $\sigma_B = \sqrt{V_B} = 17.93$ €

Pour Lc : $\sigma_C = \sqrt{V_C} = 7{,}50$ €

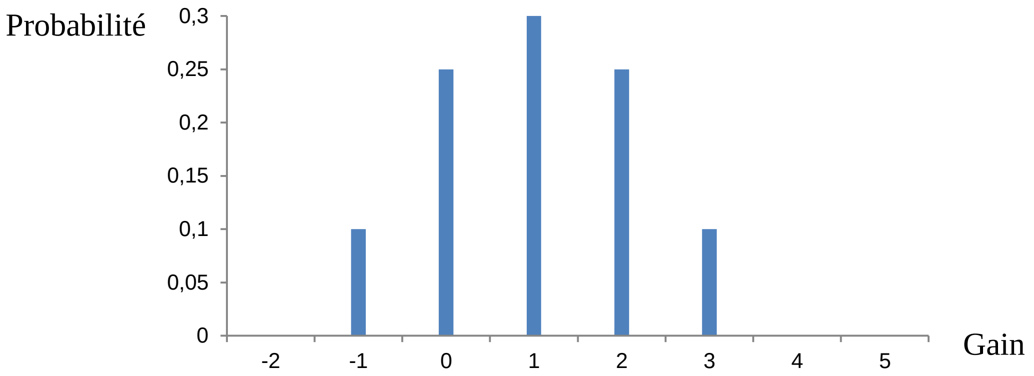
Dans le premier cas, les gains sont plus dispersés autour de l'espérance que dans le deuxième cas.

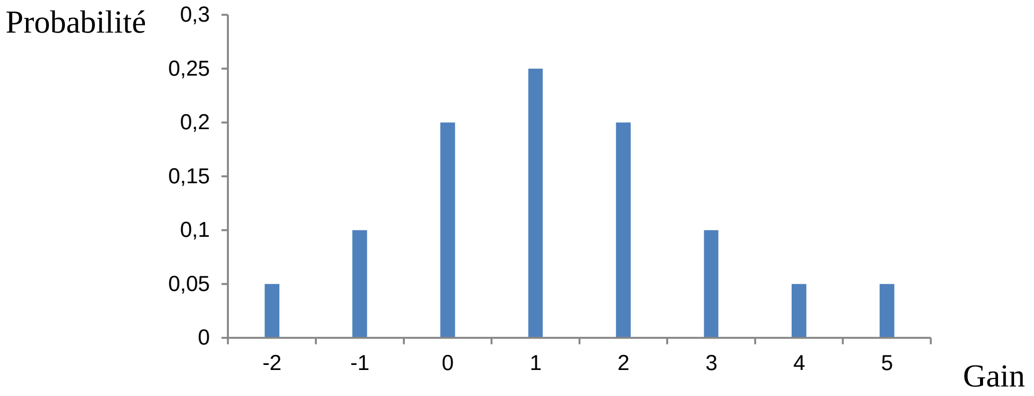
L'écart-type est un outil qui donne une mesure de la dispersion autour de l'espérance mathématique, ce qui peut être utile dans des situations plus complexes que celle-ci.

Finalement, que désire-t-on : gagner plus d'argent ou perdre le moins souvent possible ?
Si on aime le risque, on choisira Lb, sinon on préférera Lc.

3. Comparaison des gains de deux jeux de hasard

Comparez les distributions de gain de deux jeux de hasard, d'abord en observant puis en calculant, pour chaque jeu, le gain espéré et l'écart-type.





Avant tout calcul, on peut réaliser plusieurs choses en observant les graphiques :

- étant donnée la symétrie de la distribution de gain du premier jeu, le gain espéré est de 1 € ;
- le gain espéré du second jeu est légèrement supérieur à celui du premier jeu car il y a une légère dissymétrie vers la droite ;
- le second jeu présente un écart-type plus grand que le premier.

Les calculs permettent d'obtenir les résultats suivants :

- pour le premier jeu, le gain espéré est de 1 € et l'écart-type du gain de 1,14 € ;
- pour le second jeu, le gain espéré est de 1,2 € et l'écart-type du gain de 1,69 €.

Notons que cet exercice est l'occasion d'appliquer les formules dans le cas où des valeurs sont négatives (les valeurs étaient toutes positives dans les exemples précédents).

2. Loi binomiale

4. Questionnaire à choix multiples

Un questionnaire à choix multiples comporte 5 questions. Pour chacune, 4 réponses sont proposées dont une seule est correcte. Un élève qui n'a pas étudié (cet exercice est fictif !) répond au hasard.

a) Quel risque a-t-il d'avoir tout faux ?

b) Quelle chance a-t-il d'avoir exactement 3 bonnes réponses ?

c) Quelle chance a-t-il de réussir s'il faut au moins 60% ?

d) Combien de réponses justes peut-il espérer en répondant au hasard ?

e) Représentez la distribution de probabilités.

Observons tout d'abord qu'il n'est pas si simple de cocher réellement au hasard des réponses dans un QCM. Il faudrait pour cela, par exemple, lancer un dé tétraédrique bien équilibré aux faces numérotées de 1 à 4 et cocher la réponse dont le numéro est caché lors du lancer du dé.

a) C'est la probabilité d'avoir 0 bonne réponse : des mauvaises réponses sont cochées à 5 reprises avec chaque fois une probabilité de $\frac{3}{4}$.
Pour autant que les différentes questions soient considérées comme indépendantes, les probabilités se multiplient. Si on désigne par X le nombre de questions réussies, cela donne :

$$P(X=0)=\left(\frac{3}{4}\right)^5=\frac{243}{1\,024}$$

b) L'élève coche la bonne réponse pour 3 questions **et** une mauvaise réponse pour 2 questions.
Chaque répartition possible des 3 questions réussies et des 2 questions ratées a une probabilité de $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$. Il reste à multiplier ce résultat par le nombre de répartitions possibles des questions réussies parmi les 5 questions.
Il y a C_5^3 choix possibles des 3 places pour les questions réussies parmi les 5 questions posées.
Observons que cela revient au même de compter le nombre de répartitions possibles des 2 questions ratées parmi les 5 posées puisque $C_5^3 = C_5^2$.

$$P(X=3) = C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{9}{16} = \frac{90}{1\,024} .$$

c) L'élève réussira s'il a 60 % … ou davantage bien sûr.
C'est donc la probabilité d'avoir 3 **ou** 4 **ou** 5 questions réussies.
Nous avons déjà calculé la probabilité d'avoir 3 questions réussies. Nous procédons d'une manière analogue pour les 2 autres cas.
Nous additionnons ensuite les probabilités obtenues puisqu'il s'agit de probabilités d'événements qui s'excluent mutuellement.

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) \\ &= C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + C_5^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^1 + C_5^5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \\ &= 10 \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{9}{16} + 5 \cdot \frac{1}{256} \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{1024} = \frac{106}{1024} \end{aligned}$$

On peut généraliser à partir de cet exercice.

On répète 5 fois une même expérience aléatoire : répondre au hasard à une question d'un QCM.	On répète n fois une même expérience aléatoire
On considère que les réponses aux différentes questions sont indépendantes les unes des autres puisque l'élève répond au hasard.	de manière indépendante
Chaque expérience aléatoire n'a que deux issues possibles : la réponse est bonne (avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ = 0,25) ou mauvaise (avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ = 0,75).	n'ayant que deux issues possibles appelées « réussite » avec une probabilité p et « échec » avec une probabilité $q = 1 - p$.
On compte le nombre de questions réussies.	On s'intéresse à la variable aléatoire : le nombre de « réussites ».

Cette variable aléatoire est appelée ***variable binomiale*** et sa loi de probabilité, ***loi binomiale***.
Les paramètres de la loi binomiale sont :

probabilité de succès : p

nombre d'expériences aléatoires indépendantes : n.

C'est une loi notée $\boldsymbol{B}(n; p)$.

La probabilité de k réussites se calcule de la manière suivante :

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

Dans notre exemple, il s'agit d'une loi binomiale $\boldsymbol{B}(5; \frac{1}{4})$.

d) Ce que l'on attend, c'est l'espérance de cette loi de probabilité. Cela correspond environ au nombre moyen de questions réussies par étudiant, si on considère un grand nombre d'étudiants répondant au hasard.

La question est volontairement provocatrice pour faire surgir un débat en classe.
- « Moi, j'espère avoir 5 bonnes réponses ! ».

On peut calculer directement cette espérance :

$$E(X)=0P(X=0)+1P(X=1)+2P(X=2)+3P(X=3)+4P(X=4)+5P(X=5)$$

L'espérance obtenue est donc $\frac{1280}{1024}$.
Pour faire le calcul, on peut utiliser le tableau suivant :

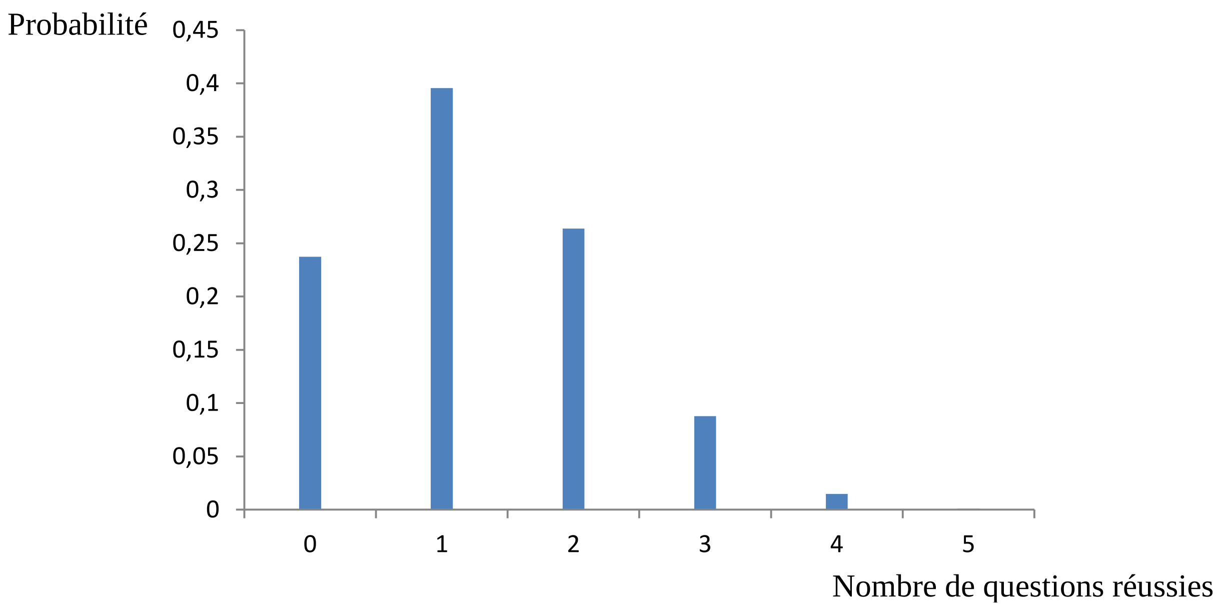
x_i	$P(X = x_i)$	$x_i.\ P(X = x_i)$
0	$\frac{243}{1024}$	0
1	$\frac{405}{1024}$	$\frac{405}{1024}$
2	$\frac{270}{1024}$	$\frac{540}{1024}$
3	$\frac{90}{1024}$	$\frac{270}{1024}$
4	$\frac{15}{1024}$	$\frac{60}{1024}$
5	$\frac{1}{1024}$	$\frac{5}{1024}$
Total	$\frac{1024}{1024}=1$	$\frac{1280}{1024}=1{,}25$

On peut inviter les élèves à faire le lien entre cette espérance et les données. On constate que 1,25 c'est 5 fois 0,25, donc le nombre de questions multiplié par la probabilité d'une bonne réponse par question. Hasard ou pas ? Si chaque bonne réponse rapporte un point, on a « en moyenne » $\frac{1}{4}$ de point à la première question et ainsi de suite pour les autres questions. Cela fait $\frac{5}{4}$ de points au total.
Suivant le niveau des élèves ou de leur motivation, on peut se contenter de ce raisonnement et admettre ce résultat ou bien le démontrer.

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\ P(X=k)\ =\ \sum_{k=0}^{n} k\ C_n^k\, p^k\, q^{n-k}\ =\ \sum_{k=1}^{n} k\ \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\ p^k\, q^{n-k}$$
$$=\ n\,p\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!}\ p^{k-1}\, q^{(n-1)-(k-1)}\ =\ n\,p\ (p+q)^{n-1}\ =\ n\,p$$

On pourrait démontrer de même que $V(X)=n\,p\,q$

e) Pour construire le graphique, on place les valeurs de la variable en abscisse et les probabilités en ordonnée.



On le voit, rien de tel que l'étude pour réussir !

5. L'indépendance, une hypothèse importante ?

Une urne contient 12 boules blanches et 23 noires. On prend sept fois une boule. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 5 boules blanches
a) si on remet chaque fois la boule prise dans l'urne avant de prendre la suivante ?
b) si on ne la remet pas ?

Il s'agit dans cet exercice "modèle" de bien intégrer le champ d'application d'une binomiale en le contrastant avec un exercice fort semblable où elle ne s'applique pas.

a) La probabilité d'avoir une blanche est ici identique à chacune des prises. Celles-ci sont indépendantes les unes des autres. La variable aléatoire X, nombre de boules blanches, est donc une loi binomiale $\boldsymbol{B}(7, \frac{12}{35})$.
On a donc :

$$P(X=5)=C_7^5\left(\frac{12}{35}\right)^5\left(\frac{23}{35}\right)^2 \cong 0{,}0430$$

b) Dans ce cas-ci, la probabilité d'avoir une blanche change à chacune des prises. Celles-ci ne sont plus indépendantes entre elles. Il faut donc procéder autrement.
On peut calculer la probabilité d'avoir cinq blanches puis deux noires. Celle-ci vaut :

$$\frac{12}{35}\cdot\frac{11}{34}\cdot\frac{10}{33}\cdot\frac{9}{32}\cdot\frac{8}{31}\cdot\frac{23}{30}\cdot\frac{22}{29} \cong 0{,}0014$$

Si l'ordre de tirage des boules est différent, les nombres au numérateur changent de place mais la réponse sera identique.
Le nombre de cas correspond au nombre de choix de 5 emplacements des blanches parmi les 7 places soit C_7^5.
On a donc :

$$P(\text{5 boules blanches et 2 boules noires}) = C_7^5\cdot\frac{12}{35}\cdot\frac{11}{34}\cdot\frac{10}{33}\cdot\frac{9}{32}\cdot\frac{8}{31}\cdot\frac{23}{30}\cdot\frac{22}{29} \cong 0{,}0298$$

On aurait pu aussi utiliser le quotient des cas favorables par les cas possibles :

$$P(\text{5 boules blanches et 2 boules noires}) = \frac{C_{12}^5.C_{23}^2}{C_{35}^7} \cong 0{,}0298$$

3. Loi de Poisson

6. Des lancers pour attraper … Poisson !

a) On lance 40 fois une pièce de monnaie non truquée. Calculez la probabilité d'obtenir exactement 5 fois « *face* ».

b) On lance 40 fois un dé non truqué. Calculez la probabilité d'obtenir exactement 5 fois le « 1 ».

c) On lance 40 fois un dé icosaédrique (polyèdre régulier à 20 faces) non truqué. Calculez la probabilité d'obtenir exactement 5 fois le « 1 ».

a) $P(X = 5) = C_{40}^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{35} \cong 0{,}000000598$

b) $P(X = 5) = C_{40}^5\left(\frac{1}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{35} \cong 0{,}143262099$

c) $P(X = 5) = C_{40}^{5}\left(\frac{1}{20}\right)^{5} \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^{35} \cong 0{,}034151311$

Après avoir calculé ces cas, on montre, à l'aide d'un tableur, les distributions correspondant à ces variables binomiales. On montre également que le tableur propose une autre variable aléatoire : la variable de Poisson pour laquelle on ne demande comme information que l'espérance notée λ.

En utilisant la loi de Poisson avec comme espérance celle de la loi binomiale correspondante, le tableur donne les valeurs :

a) $\lambda = 40 \, . \, \frac{1}{2} = 20$ $\quad P(X = 5) \cong 0.00005496$

b) $\lambda = 40 \, . \, \frac{1}{6} = \frac{40}{6}$ $\quad P(X = 5) \cong 0{,}13965803$

c) $\lambda = 40 \, . \, \frac{1}{20} = 2$ $\quad P(X = 5) \cong 0{,}03608941$

On observe que, pour n fixé, la variable aléatoire de Poisson donne une meilleure approximation de la variable aléatoire binomiale de paramètres n et p lorsque la probabilité p de réussite est la plus petite.

En pratique on considère que l'approximation d'une variable aléatoire binomiale par une loi de Poisson peut se faire lorsque $p < 0{,}1$ et $n > 30$ (ou $n > 50$ selon les sources).

	n	p	Espérance $n\,p$	Variance $n\,p\,q$
a)	40	$\frac{1}{2}$	20	10
b)	40	$\frac{1}{6}$	6,67	5,56
c)	40	$\frac{1}{20}$	2	1,9

Lorsque p est proche de 0, la probabilité d'échec $q = 1 - p$ est alors voisine de 1 et les calculs de l'espérance et de la variance de la loi binomiale donnent des résultats très proches l'un de l'autre puisque $E(X) = n\,p$ et $\sigma^2(X) = n\,p\,q \cong n\,p$.

Une loi de Poisson est régie par la formule :

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!}$$

On peut démontrer à partir de cette formule que l'espérance et la variance sont égales au paramètre λ.

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

Des variables aléatoires binomiales différentes peuvent avoir la même espérance et des variances différentes. Pour une variable aléatoire de Poisson, une fois l'espérance fixée, la variance l'est aussi, ce qui est cohérent avec le fait qu'il n'y ait qu'un seul paramètre.

7. Les boulons défectueux

A la sortie d'une chaîne de fabrication de boulons, pour estimer le risque d'avoir des boulons défectueux, le responsable « qualité » a tiré, au hasard, un lot de 100 000 boulons. Il a compté le nombre de boulons mal calibrés : 295 étaient défectueux.

L'usine doit livrer une commande de 500 boulons.
a) Calculez la probabilité qu'il y ait deux boulons défectueux dans cette commande.
b) Calculez la probabilité qu'il y ait au plus deux boulons défectueux dans cette commande.
c) Comparez les résultats obtenus par la loi binomiale et la loi de Poisson.

De l'énoncé on peut déduire la probabilité a posteriori qu'un boulon soit défectueux : p = 0,00295.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de boulons défectueux dans un lot de 500.

La probabilité de trouver un boulon défectueux restant constante, on utilise une loi binomiale. Comme dans les exemples précédents, on répète 500 fois une expérience dont la probabilité de succès reste constante.

a) Calculons la probabilité qu'il y ait 2 boulons défectueux dans un lot de n = 500 boulons prélevés :

$$P(X = 2) = C_{500}^{2} \,.\, (0{,}00295)^{2} \,.\, (0{,}99705)^{498} \cong 0{,}2493$$

b) Calculons la probabilité qu'il y ait au plus deux boulons défectueux dans ce même lot de 500 boulons :

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= C_{500}^{0} \,.\, (0{,}00295)^{0} \,.\, (0{,}99705)^{500} + C_{500}^{1} \,.\, (0{,}00295)^{1} \,.\, (0{,}99705)^{499} + C_{500}^{2} \,.\, (0{,}00295)^{2} \,.\, (0{,}99705)^{498}$$

$$\cong 0{,}22828 + 0{,}33771 + 0{,}2493 \cong 0{,}815289$$

c) On peut utiliser la loi de Poisson parce que p est proche de zéro (0,00295) et n = 500.

$$\lambda = n\,p = 500 \,.\, 0{,}00295 \cong 1{,}475$$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-1{,}475} \,.\, 1{,}475^{2}}{2!} \cong 0{,}2489$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= \frac{e^{-1{,}475} .1{,}475^{0}}{0!} + \frac{e^{-1{,}475} .1{,}475^{1}}{1!} + \frac{e^{-1{,}475} .1{,}475^{2}}{2!} \cong 0{,}815096$$

8. Le péage de l'autoroute

On sait qu'en moyenne, le week-end vers minuit, il se présente 3 voitures à la minute à un péage donné.
Quelle est la probabilité qu'exactement 5 voitures se présentent en une minute ?
Supposons que cette variable aléatoire (le nombre de voitures arrivant par minute) suive une loi de Poisson.

Nous n'avons pas d'information sur le nombre total de voitures ni sur la probabilité de passage d'une voiture au péage, mais nous pouvons calculer la probabilité demandée car seule la moyenne est nécessaire dans le cas d'une loi de Poisson.

La moyenne est l'espérance de cette variable aléatoire : $\lambda = 3$.
Nous obtenons comme résultat :

$$P(\mathrm{X} = 5) = \frac{e^{-3}.3^5}{5!} \cong 0{,}1008188.$$

Synthèse sur les variables aléatoires discrètes

Une ***variable aléatoire***, notée *X*, associe à chaque résultat d'une expérience aléatoire un nombre (par exemple : un gain).

Rigoureusement, une variable aléatoire est une fonction dont le domaine est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. Dans le cas du Keno, déterminer exactement cette fonction nécessite de connaître le résultat du tirage mais cela n'a pas grand intérêt puisque seules les probabilités de chaque gain sont intéressantes.

La ***distribution de probabilités*** d'une variable aléatoire est une fonction qui associe à chaque valeur possible de la variable aléatoire sa probabilité, souvent sous forme d'un tableau.

L'espérance mathématique de la variable aléatoire *X* se calcule de manière analogue à la moyenne :

$$E(X) = x_1\ p_1 + x_2\ p_2 + ... + x_n\ p_n$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\ p_i$$

où les x_i sont les valeurs prises par la variable aléatoire et les p_i les probabilités correspondantes.

Pour avoir une idée de la dispersion des valeurs autour de l'espérance, on calcule la ***variance de la variable aléatoire*** qui est la moyenne des carrés des écarts par rapport à l'espérance :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2\ p_i$$

Pour se ramener à l'unité de départ, on prend la racine de la variance qu'on appelle ***écart-type*** et qu'on note σ.

<u>Une variable aléatoire particulière</u> : la loi binomiale

Lorsqu'une expérience aléatoire n'a que deux issues possibles (qu'on appellera succès et échec), on parle d'***expérience de Bernoulli***.

Lorsqu'on répète *n* fois une expérience de Bernoulli de manière indépendante (la probabilité de succès reste constante), on parle d'un ***schéma de Bernoulli*** et la variable aléatoire « nombre de succès » est une ***binomiale***.

Il n'y a que deux choses à connaître pour une binomiale *B(n,p)* : le nombre d'épreuves *n* et la probabilité du succès *p*.
On désigne par *q* la probabilité d'un échec. On a donc *q = 1 – p*.

$$P(X = k) = C_n^k\ p^k\ q^{n-k}$$

Dans le cas d'une variable aléatoire binomiale, E(X) = *np* et V(X) = *npq*.

Approximation de la binomiale par une loi de Poisson

Lorsque n devient très grand, l'emploi de la loi binomiale est fastidieux, on utilise d'autres lois.

En théorie, on approxime la loi binomiale par une ***loi de Poisson*** quand n est grand et p petit. En pratique, les conditions sont $n > 30$ et $np < 5$.

La loi de Poisson ne possède qu'un seul paramètre qu'on note λ et qui est à la fois la valeur de son espérance et de sa variance.

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

L'espérance mathématique est égale à la variance : E(X) = V(X) = λ.

La variable de Poisson s'utilise en général pour des phénomènes rares et sans mémoire.

4. Variables aléatoires continues

9. Le métro

Un usager arrive dans une station de métro sans savoir qu'un métro arrive toutes les 8 minutes.

a) A-t-il plus de chance d'attendre moins de 2 minutes, entre 2 et 4 minutes, ou plus de 6 minutes ?
b) Déterminez pour chaque cas ci-dessus la probabilité.
c) Déterminez la probabilité d'attendre
   - moins d'une minute
   - plus d'une minute
   - exactement une minute.
d) Comment mettre ces probabilités en graphique ?

a) Il faut comprendre que le temps d'attente, bien qu'étant une durée, est un nombre compris entre 0 et 8. Les trois périodes données dans l'énoncé sont égales et donc les chances le sont aussi.
b) Comme le passager arrive aléatoirement et que le temps d'attente maximum est de 8 minutes, les 3 probabilités sont égales et valent $\frac{1}{4}$.
c) Une minute correspond à $\frac{1}{8}$ du temps maximal d'attente, donc la probabilité d'attendre le métro moins d'une minute est de 0,125. Par complémentarité, la probabilité d'attendre le métro plus d'une minute est de 1 – 0,125 = 0,875.

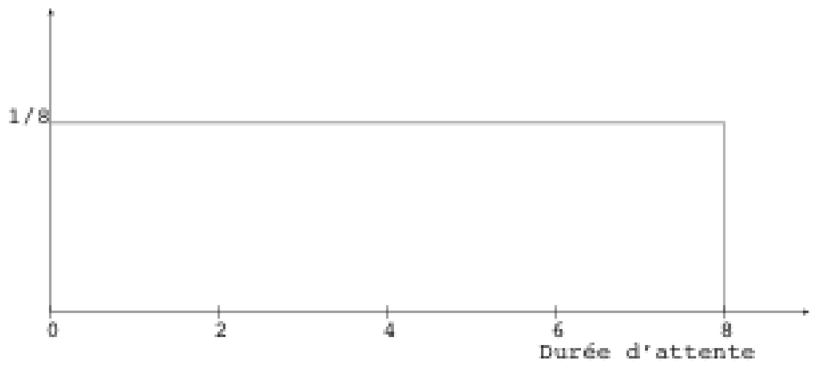
Par contre, il est quasi impossible que le temps d'attente soit <u>exactement</u> une minute. On modélise en disant que cet événement est impossible et, donc, que sa probabilité est nulle. Si on appelle X la variable aléatoire « temps d'attente », on a : $P(X=1)=0$.
Il en est de même pour n'importe quel temps d'attente : $P(X=k)=0$ pour n'importe quel réel k fixé.

On se trouve devant un nouveau type de variable, elle peut prendre toutes les valeurs à l'intérieur d'un intervalle donné contrairement aux variables aléatoires rencontrées jusqu'ici. Une telle variable aléatoire est dite ***continue.***

d) Il est impossible de représenter ces probabilités à l'aide de bâtonnets car ils seraient tous de hauteur nulle. Comment faire ? On observe que la probabilité est directement proportionnelle à la longueur de l'intervalle considéré :

- pour moins d'une minute, on a une probabilité de $\frac{1}{8}$: $P(X\leq 1)=\dfrac{1}{8}$
- pour moins de 2 minutes, on a une probabilité de $\frac{1}{4}$: $P(X\leq 2)=\dfrac{1}{4}$.

On peut penser alors à utiliser des aires plutôt que des bâtonnets : on place en abscisse les durées d'attente avec un maximum de 8 minutes et la probabilité est donnée par l'aire du rectangle surmontant l'intervalle considéré. I faut qu'on ait un rectangle de base 8 et d'aire unitaire. Il doit donc avoir une hauteur de $\frac{1}{8}$.



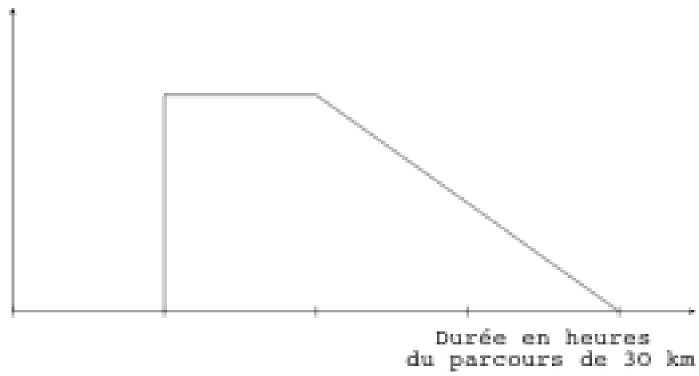
La fonction *f* définie par *f(x)* = $\frac{1}{8}$ sur l'intervalle [0,8] et *f(x)* = 0 partout ailleurs est un premier exemple de ce qu'on appelle ***fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire continue***.

Ici, comme cette fonction est constante, on dit que la variable aléatoire continue est ***uniforme***.

Nous voyons que la probabilité d'attendre moins d'une minute correspond à une aire partielle du rectangle total : il s'agit de l'aire du petit rectangle de base 1 et de hauteur $\frac{1}{8}$, ce qui donne bien le nombre $\frac{1}{8}$ obtenu précédemment. De la même manière, la probabilité d'attendre moins de 2 minutes correspond à une autre aire partielle, celle d'un rectangle de base 2 et de hauteur $\frac{1}{8}$.
La probabilité d'attendre exactement une minute est nulle car elle correspondrait à l'aire d'un petit segment élevé verticalement en l'abscisse 1, donc à un rectangle de base nulle.

10. Sur une autoroute

Examinons une autre variable aléatoire : le temps (mesuré en heures) mis pour accomplir un parcours de 30 km sur autoroute en respectant les limitations de vitesse. Ce temps est supposé inférieur à 1 heure.
Supposons que la fonction de densité de probabilité de cette variable aléatoire soit représentée par le graphique suivant. Complétez ce graphique en graduant les axes et commentez la forme de ce graphique.



Ici, la variable aléatoire continue n'est plus uniforme. La répartition des durées de parcours comprises entre 15 et 30 minutes est uniforme et certaines personnes mettent plus de 30 minutes à cause des encombrements routiers.
Si on choisit l'heure comme unité de temps, le graphique commence à l'abscisse $\frac{1}{4}$ et se termine à l'abscisse 1.
L'aire totale du trapèze doit valoir l'unité, l'aire du rectangle qui constitue la partie gauche de la figure est égale à l'aire du triangle rectangle qui constitue la partie droite. Donc chacune de ces figures doit avoir $\frac{1}{2}$ comme aire. Comme le rectangle a une base valant $\frac{1}{4}$, il doit avoir une hauteur de 2 unités.

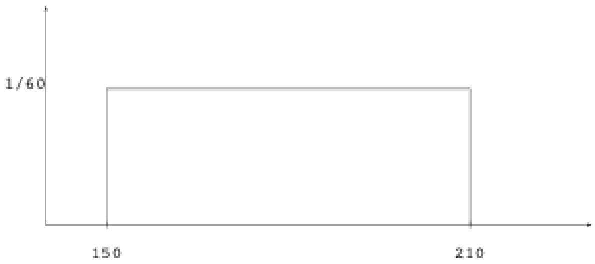
5. <u>Loi Normale</u>

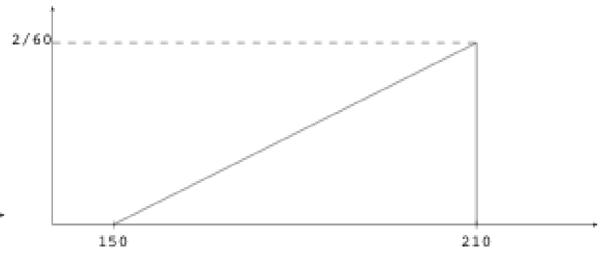
11. Graphe des tailles

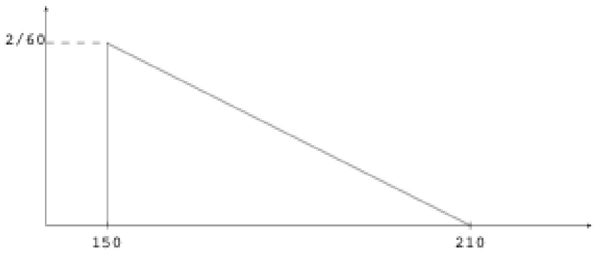
On s'intéresse cette fois à la variable aléatoire X donnée par la taille des adultes d'une population fixée.

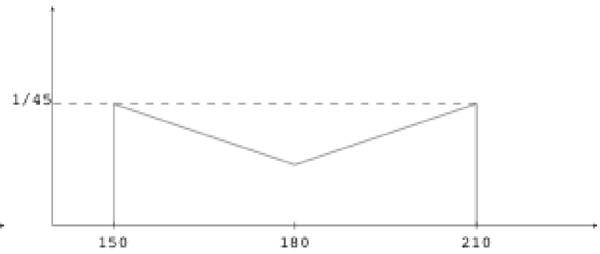
a) Voici différents graphiques. Lequel estimez-vous le plus approprié pour caractériser la fonction de densité de probabilité ? Sur celui-ci, calculez la probabilité d'avoir une taille entre 170 et 180 : $P(170 \leq X \leq 180)$.

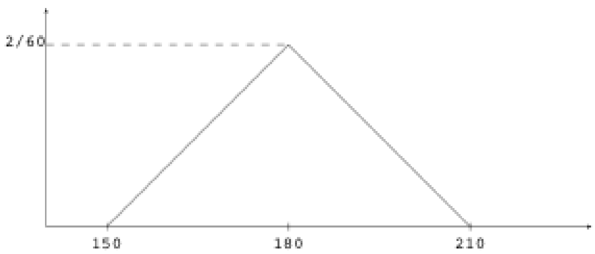
b) Avez-vous une autre idée de graphique ?











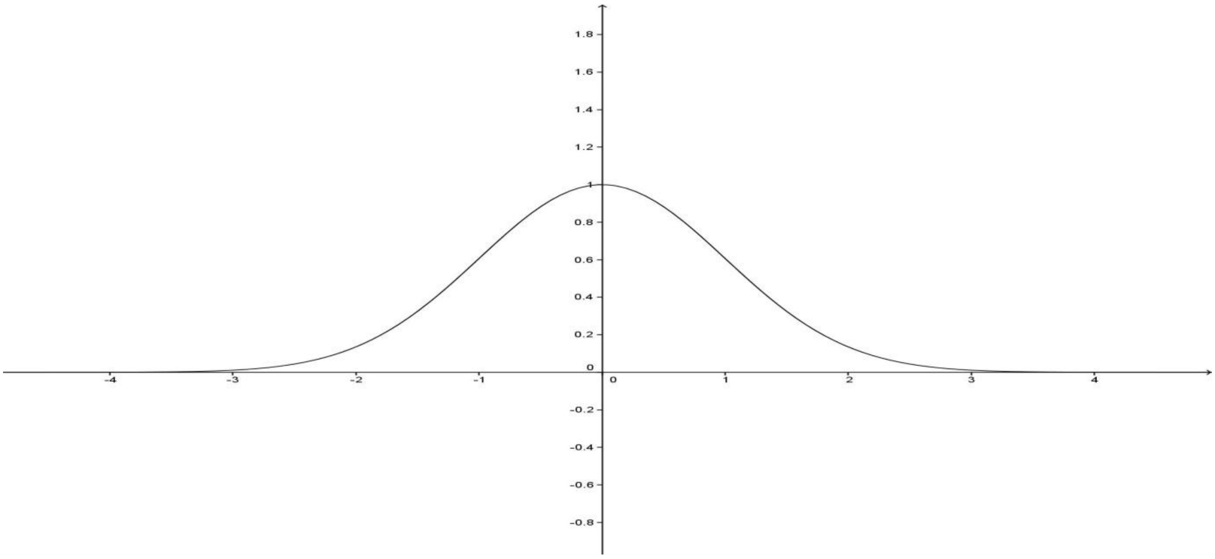
a) Le premier graphique correspond à une population où toutes les tailles sont uniformément réparties, ce qui est peu vraisemblable. Les trois suivants sont tout aussi invraisemblables, sauf si on imagine une population constituée respectivement de basketteurs professionnels, de jockeys et de la réunion des deux !
Le dernier graphique est le plus vraisemblable de ceux présentés.
On calcule par décomposition en triangles ou en raisonnant sur des triangles semblables :

$$P(170 \leq X \leq 180) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{18}$$

b)

On peut espérer que les élèves pressentiront que le graphe le plus plausible pour cette fonction de distribution est une courbe plus ou moins symétrique autour de la moyenne où la valeur est maximale.

On leur fournit alors l'information suivante : beaucoup de phénomènes peuvent être modélisés par une courbe en cloche, obtenue à partir de $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.



Cette fonction a son maximum en 0, ses points d'inflexion sont en 1 et –1 et l'aire sous la courbe vaut $\sqrt{2\pi}$ (ce calcul n'est pas à la portée d'élèves du secondaire).

On fait subir successivement à cette fonction :

- une compression verticale pour que l'aire sous le graphe égale 1, ce qui donne $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$,
- une translation horizontale pour amener l'axe de symétrie au niveau de la moyenne μ, ce qui donne $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$ et n'affecte pas l'aire,
- une compression horizontale pour amener les points d'inflexion à une distance de la moyenne égale à l'écart-type σ, ce qui donne $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, et multiplie l'aire par σ. On divise par σ pour retrouver l'aire 1.

On arrive ainsi à la forme :

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

La variable aléatoire correspondant à cette fonction de densité est appelée variable aléatoire normale.

12. Suis-je plus grand que mon grand-père ?[1]

Jean a 18 ans et mesure 1m92. Son grand-père au même âge mesurait 1m80. Dans l'absolu, Jean est bien sûr le plus grand mais qu'en est-il par rapport au reste de la population sachant que maintenant, à l'âge de 18 ans, la taille moyenne est de 1m80 (écart-type 5,3 cm) alors qu'elle était de 1m72 (écart-type 4,2 cm) dans la jeunesse du grand-père ?

Les tailles des deux populations sont considérées comme des variables aléatoires normales. Dans les deux cas, on veut comparer la position relative des personnes dans la population. Les deux graphiques ne permettent pas une comparaison aisée.

Le raisonnement précédent montre que les probabilités correspondant à des aires ne seront pas affectées si on se ramène dans chaque cas à une variable aléatoire normale de moyenne 0 et d'écart-type 1 qui est notée Z et est appelée ***normale centrée réduite***. Pour ce faire, on utilise la relation $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$

A quelle valeur de la variable centrée réduite correspond la taille de Jean ?

$$Z_j=\frac{192-180}{5{,}3}=2{,}264,$$

et celle du grand père ?

$$Z_{gp}=\frac{180-172}{4{,}2}=1{,}904.$$

La probabilité pour un jeune de 18 ans actuellement d'être plus petit que Jean $P(Z\leq 2{,}264)$ correspondant à l'aire sous le graphe de la fonction de distribution à gauche de 2,264 est plus grande que pour le grand-père. Celui-ci était donc "moins grand pour l'époque".

[1] tiré de Uitwiskeling jaargang 18 nummer 1

6. Approximation de la Binomiale par la Normale

13. Le pouvoir d'une minorité résolue[2]

a) Un comité doit voter ou rejeter une motion. Il se compose de cinq membres dont deux ont décidé de s'opposer à celle-ci. Les trois autres votent au hasard. Quelle est la probabilité de rejet de la motion si la décision se prend à la majorité simple ?

b) Dans un pays d'un million de votants, on organise un référendum sur "le vote des étrangers". Presque tous sont indécis, à l'exception de deux mille personnes qui sont fermement défavorables au vote des étrangers. Quelle est la probabilité que la loi soit rejetée ?

a) La proposition est rejetée si au moins l'un de trois membres indécis vote contre la proposition. Le vote de ces trois membres peut être représenté sous forme de 8 possibilités : oui/oui/oui, oui/oui/non, oui/non/oui, non/oui/oui, non/non/oui, oui/non/non, non/oui/non, non/non/non.
Seul le premier vote permet de garder la proposition. Ainsi la proposition est rejetée avec la probabilité de $\frac{7}{8}$ =0,875.

b) Si X est la variable aléatoire qui correspond au nombre de personnes indécises votant contre la loi, X est Binomiale de paramètres n = 998000 et p = $\frac{1}{2}$. La loi sera rejetée si $X \geq$ 498000. La probabilité vaut

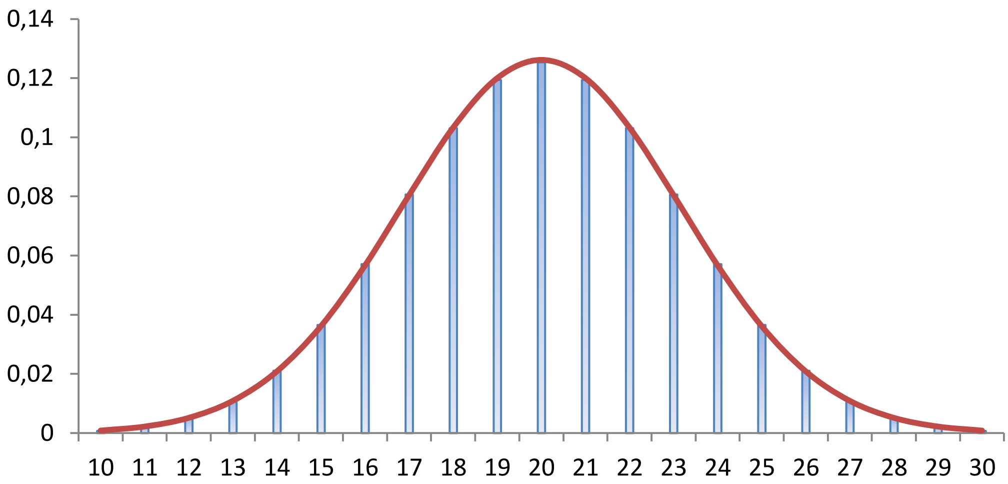
$$\mathrm{P}(X \geq 498000) = C_{998000}^{498000} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{998000} + C_{998000}^{498001} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{998000} + \ldots + C_{998000}^{998000} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{998000}.$$

Mais calculer cette somme risque de prendre un certain temps…

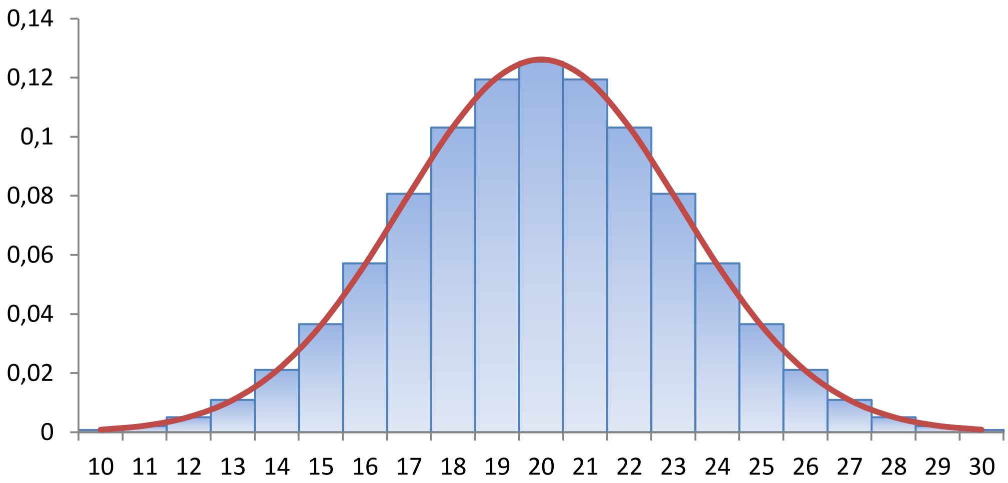
Heureusement, lorsque n est grand et p proche de $\frac{1}{2}$, la distribution binomiale peut être approximée par la distribution normale de moyenne np et d'écart-type $\sqrt{npq}$. Illustrons cela sur un exemple.

La figure suivante représente, pour x allant de 10 à 30, la distribution binomiale de paramètres n = 40 et p = $\frac{1}{2}$ et la courbe normale de paramètres $\mu = np = 20$ et $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10}$. On s'aperçoit que les probabilités de la binomiale sont proches des valeurs données par la fonction de densité de la normale.

[2] d'après un exercice de Benoit Jadin



Comme la loi binomiale est discrète et la loi normale continue, on va représenter les probabilités binomiales par des rectangles de base 1 centrés sur les valeurs entières de la variable. Les probabilités données par les hauteurs des bâtonnets sont ainsi égales aux aires des rectangles et peuvent être approximées par l'aire sous la courbe normale.



Pour n grand, on peut ainsi approximer une loi binomiale dont p est proche de $\frac{1}{2}$ par la loi normale dont la moyenne est np et l'écart-type est $\sqrt{npq}$.

Revenons au problème, la moyenne vaut $998000 \cdot \frac{1}{2} = 499000$ et l'écart-type $\sqrt{998000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \simeq 499{,}4998$. La loi sera rejetée si le nombre de votants qui y sont opposés, est supérieur ou égal à 498 000.

Pour être tout à fait complet, il faudrait prendre la surface depuis l'abscisse 497999,5 pour avoir l'entièreté de l'aire du premier rectangle. Dans le cas présent, vu les grands nombres, nous négligerons cette correction.

$$P(X \geq 498000) \cong P\left(Z \geq \frac{498000 - 499000}{499{,}4998}\right) \cong P(Z \geq -2{,}002) \cong 0{,}9772$$

Cette probabilité est très grande et illustre bien le pouvoir d'une minorité résolue.

Synthèse sur les variables aléatoires continues

Une variable aléatoire est continue si l'ensemble des valeurs qu'elle prend est un intervalle réel.
La probabilité qu'une variable aléatoire continue prenne une valeur précise est toujours nulle.

La distribution de probabilité d'une variable aléatoire continue est donnée par une fonction f appelée ***densité de probabilité***. Cette fonction doit être positive et l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses doit valoir 1.
La probabilité que la variable soit comprise entre a et b est l'aire de la partie de plan comprise entre l'axe des x, le graphe de f et les droites $x = a$ et $x = b$. Dans certains cas, cette aire peut être calculée par une intégrale.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Une variable aléatoire continue est utilisée pour approximer une variable aléatoire discrète quand l'ensemble des valeurs possibles.

La loi normale

Beaucoup de phénomènes peuvent être modélisés par une variable aléatoire continue particulière dont le graphe est une "courbe en cloche" ou courbe de Gauss. Cette variable aléatoire est appelée loi normale et sa fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

où μ est la moyenne et σ l'écart-type.

Chaque variable aléatoire normale étant caractérisée par une moyenne et un écart-type, on utilise pour le calcul des probabilités un tableur, ou on se ramène à la variable aléatoire normale réduite $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ (dont la moyenne est 0 et l'écart-type 1) pour laquelle existent des tables.

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Une variable aléatoire binomiale sera approximée par une variable aléatoire normale si n est très grand et p proche de $\frac{1}{2}$.

<u>Annexe 1</u> – Bulletin du keno

Speel elke dag Keno ... zoals ú het wil !

Het spelprincipe van Keno is het volgende: u dient 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 of 10 getallen te voorspellen uit een reeks van 20 getallen die worden getrokken uit 70 van 1 tot 70 genummerde getallen.

Hoe speelt u met dit Keno-formulier ?

Dit formulier bestaat uit 8 roosters die elk 70 van 1 tot 70 genummerde vakjes tellen.

1. Kies het aantal roosters dat u wenst in te vullen: 2, 4, 6 of 8 roosters. Eén rooster stemt overeen met een inzetbedrag van 1 €. U dient minstens twee boven elkaar staande roosters in te vullen.
2. Kruis met een blauwe of zwarte balpen in ieder rooster 2 tot 10 nummers aan. Het aantal getallen mag verschillen van rooster tot rooster.
3. Kies een vast inzetbedrag voor alle roosters die u heeft ingevuld, d.w.z. 1 €, 2 €, 3 €, 4 €, 5 € of 10 € per rooster. Wanneer u bv. 1 € per rooster heeft ingezet en uw nummers winnend zijn, dan ontvangt u 1x het winstbedrag. Wanneer u 2 € per rooster heeft ingezet en wanneer uw nummers winnend zijn, dan ontvangt u 2x het winstbedrag, enz.
4. Kies het aantal trekkingen waaraan u wenst deel te nemen: 1, 2, 4, 6 of 12 opeenvolgende trekkingen.

Om het bedrag te kennen dat u uiteindelijk moet betalen, dient u uw inzetbedrag te vermenigvuldigen met het aantal door u ingevulde roosters én met het aantal door u gekozen trekkingen.

U kunt overigens ook Keno spelen zónder formulier, namelijk door middel van de Quick-Pick-formule waarbij uw Keno-roosters willekeurig door het computersysteem van de Nationale Loterij worden ingevuld.

Laat uw deelneming registreren in een verkooppunt van de Nationale Loterij. Nadat u uw inzetbedrag heeft betaald, wordt u een deelnemingsticket overhandigd. Bewaar dat deelnemingsticket zorgvuldig, want het zal u worden gevraagd voor de uitbetaling van uw winst.

Bij Keno zijn de winstbedragen vooraf bepaald.

De Keno-winstbedragen zijn inderdaad vooraf vastgelegd: ze hangen af van het aantal door u aangekruiste nummers, van het aantal door u aangekruiste winnende nummers en van uw inzet. Op die manier kunt u als het ware zelf het bedrag bepalen dat u graag zou willen winnen en uw inzet daarop afstemmen.

De dagelijkse trekking en de resultaten

Iedere dag, behalve op zon- en feestdagen, is er een Keno-trekking. De avond van de trekking zijn de resultaten te bekijken op "één" (VRT), op www.keno.be, en te beluisteren via de Kenofoon 0900 22 370.

Chaque jour, au Keno, jouez comme vous voulez !

Le principe du Keno consiste à pronostiquer une série de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 numéros parmi une série de 20 numéros désignés par un tirage au sort parmi une série de 70 numéros allant de 1 à 70.

Comment jouer avec ce bulletin ?

Ce bulletin comprend 8 grilles comportant chacune 70 cases numérotées de 1 à 70.

1. Déterminez le nombre de grilles que vous souhaitez remplir : 2, 4, 6 ou 8 grilles. Une grille correspond à une mise minimum de 1€. Vous devez remplir au minimum deux grilles superposées.
2. Cochez au stylo à bille bleu ou noir entre 2 et 10 numéros dans chaque grille. Le nombre de numéros peut varier dans chacune des grilles.
3. Choisissez une mise fixe pour toutes les grilles: 1€, 2€, 3€, 4€, 5€, 10€ par grille. Si vous misez 1€ par grille et que vos numéros sont gagnants vous gagnez 1x le montant du gain, si vous misez 2 € par grille et que vos numéros sont gagnants, vous gagnez 2x le montant du gain, etc.
4. Sélectionnez le nombre de tirages auquel vous souhaitez participer. Vous pouvez participer à 1, 2, 4, 6 ou 12 tirages consécutifs.

Pour calculer le montant à payer, multipliez votre mise par le nombre de grilles remplies et par le nombre de tirages choisi.

Vous pouvez également jouer au Keno sans bulletin par l'intermédiaire d'un Quick-Pick : vos grilles sont remplies aléatoirement par le terminal.

Faites valider votre participation dans un point de vente Lotto. Un ticket de jeu vous sera remis, après paiement de votre mise. Conservez-le soigneusement car il vous sera réclamé pour le paiement de vos gains.

Au Keno, le montant du gain est connu à l'avance.

Les gains sont déterminés à l'avance et dépendent du nombre de numéros que vous cochez, du nombre de numéros exacts et de la mise appliquée. Vous pouvez ainsi choisir la somme que vous désirez gagner et miser en conséquence.

Le tirage quotidien et les résultats

Chaque jour, sauf le dimanche et jour férié, a lieu un tirage Keno. Les résultats sont diffusés le soir du tirage sur La Deux (RTBF), sur www.keno.be et sur le Kenophone au 0900 22 380.

WINSTTABEL PER INZET VAN 1€ - TABLEAU DES GAINS PAR MISE DE 1€

Aantal juiste nummers / Nombre de numéros exacts	Aantal gespeelde nummers - Nombre de numéros choisis: 10	9	8	7	6	5	4	3	2
10	250.000 €								
9	2.000 €	50.000 €							
8	200 €	500 €	10.000 €						
7	10 €	50 €	100 €	3.000 €					
6	4 €	5 €	10 €	30 €	200 €				
5	1 €	2 €	4 €	3 €	20 €	150 €			
4					4 €	5 €	30 €		
3					1 €	2 €	2 €	16 €	
2							1 €	1 €	6,50 €
0	3 €	3 €	3 €	3 €					
KANS 1/ CHANCE 1/	7,38	9,37	10,58	9,92	4,51	7,32	3,11	5,14	12,71

-18

OMDAT SPELEN LEUK MOET BLIJVEN **KEN UW LIMIETEN** — POUR QUE LE JEU RESTE UN PLAISIR, **FIXEZ VOS LIMITES**

REGLEMENT OP / SUR WWW.KENO.BE

Nationale Loterij - Loterie Nationale, nv van publiek recht - sa de droit public, Belliardstraat 25-33 Rue Belliard, 1040 Brussel/Bruxelles - **WWW.KENO.BE**

Annexe 2 – Tableaux du keno

Le jeu du KENO belge

Tableau des gains par mise de 1 euro

Nbre n° exacts	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
10	€ 250.000,00										
9	€ 2.000,00	€ 50.000,00									
8	€ 200,00	€ 500,00	€ 10.000,00								
7	€ 10,00	€ 50,00	€ 100,00	€ 3.000,00							
6	€ 4,00	€ 5,00	€ 10,00	€ 30,00	€ 200,00						
5	€ 1,00	€ 2,00	€ 4,00	€ 3,00	€ 20,00	€ 150,00					
4					€ 4,00	€ 5,00	€ 30,00				
3					€ 1,00	€ 2,00	€ 2,00	€ 16,00			
2							€ 1,00	€ 1,00	€ 6,50		
1											
0	€ 3,00	€ 3,00	€ 3,00	€ 3,00							

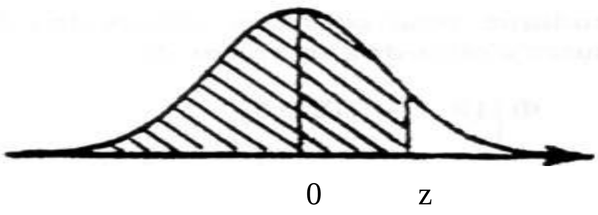
Tableau des probabilités

Nbre n° exacts	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
10	4,65727E-07	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	2,11694E-05	2,58267E-06	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0,000388988	9,685E-05	1,33438E-05	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0,003830034	0,001460201	0,000410578	6,4666E-05	0	0	0	0	0	0	0
6	0,022501452	0,011681605	0,00502958	0,001616651	0,000295616	0	0	0	0	0	0
5	0,082805345	0,054903544	0,032189312	0,015843177	0,005912323	0,001281003	0	0	0	0	0
4	0,194075028	0,157847689	0,11819513	0,079215885	0,04526622	0,020015675	0,005284138	0	0	0	0
3	0,287035335	0,278554746	0,255857692	0,219008622	0,170414004	0,115384482	0,062166333	0,020825722	0	0	0
2	0,257135821	0,291819257	0,319822115	0,335813221	0,333727425	0,307691952	0,25384586	0,17354768	0,078674948	0	0
1	0,126312333	0,165108264	0,211611625	0,265115701	0,323188664	0,380566361	0,42752987	0,447570332	0,414078675	0,285714286	0
0	0,025894028	0,038525262	0,056870624	0,083322077	0,121195749	0,175060526	0,251173799	0,358056266	0,507246377	0,714285714	1
Total	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tableau "épuré" des probabilités

Nbre n° exacts	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
10	4,65727E-07	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	2,11694E-05	2,58267E-06	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0,000388988	9,685E-05	1,33438E-05	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0,003830034	0,001460201	0,000410578	6,4666E-05	0	0	0	0	0	0	0
6	0,022501452	0,011681605	0,00502958	0,001616651	0,000295616	0	0	0	0	0	0
5	0,082805345	0,054903544	0,032189312	0,015843177	0,005912323	0,001281003	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0,04526622	0,020015675	0,005284138	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0,170414004	0,115384482	0,062166333	0,020825722	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0,25384586	0,17354768	0,078674948	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0,025894028	0,038525262	0,056870624	0,083322077	0	0	0	0	0	0	0
Total	0,135441483	0,106670044	0,094513438	0,100846571	0,221888163	0,136681161	0,321296332	0,194373402	0,078674948	0	0
1/Total	7,38	9,37	10,58	9,92	4,51	7,32	3,11	5,14	12,71	0,00	0,00

<u>Annexe 3</u> – Valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite Z



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

<u>Annexe 4</u> – Liste des questions

1. Le jeu du Keno

a) Explorons la fiche de jeu du Keno.

b) Imaginons qu'on joue sur une seule grille avec un tirage unique et une mise d'un euro. Combien de numéros cocheriez-vous ? Pourquoi ?

c) En jouant comme précédemment, quelle est la probabilité de gagner 250 000 € ?

d) A la dernière ligne, on lit « chance : 1 sur 7,38 » ; à quoi cela correspond-il ?
Pour répondre à cette question, intéressons-nous à présent aux autres probabilités de gain en choisissant 10 numéros. Construisons un tableau avec les deux premières colonnes de gauche du tableau des gains auxquelles nous ajoutons une colonne pour les probabilités. Pourquoi n'y a-t-il pas de gain dans les lignes 4, 3, 2, 1 ?

e) On voit qu'on a autant de chance de gagner avec 10 numéros qu'avec 5 numéros. Pourquoi certains choisissent-ils de jouer 5 numéros plutôt que 10 alors qu'on a à peu près la même chance de gagner mais on ne peut arriver à des montants aussi importants ?

f) Combien gagnerait-on si on remplissait tous les bulletins possibles avec 5 numéros ? Combien gagnerait-on en moyenne par grille ? Est-ce intéressant ?

g) Que gagnerait-on en moyenne par grille si on jouait 10 numéros ? Pour simplifier les calculs, il serait judicieux d'utiliser les probabilités calculées au d).

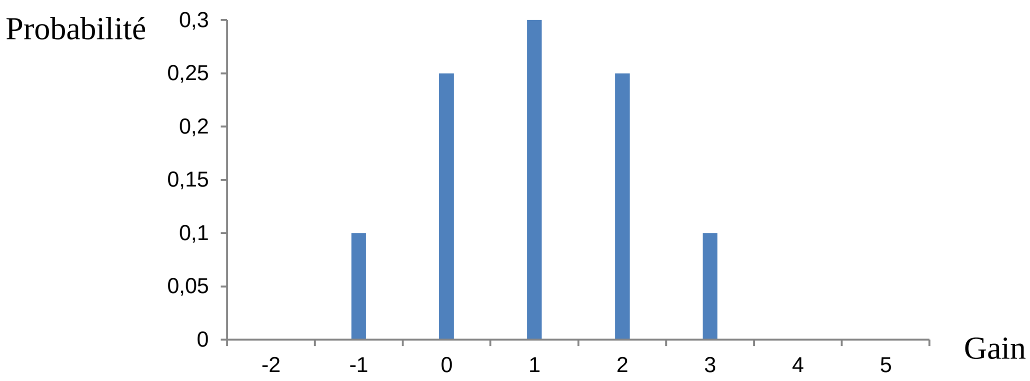
2. Comparaison de 2 loteries

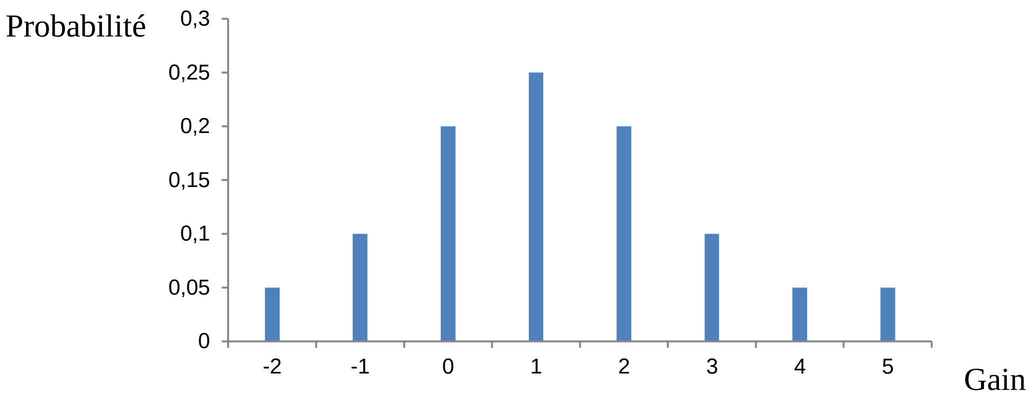
Deux loteries sont organisées le jour de la fête du village. Pour chacune sont mis en vente cent billets à 4 €. La loterie organisée par le bourgmestre offre un lot de 200 € et dix lots de 5 €. Celle organisée par le club sportif offre deux lots de 50 €, dix lots de 10 € et dix lots de 5 €.

Comparez les deux loteries.

3. Comparaison des gains de deux jeux de hasard

Comparez les distributions de gain de deux jeux de hasard, d'abord en observant puis en calculant, pour chaque jeu, le gain espéré et l'écart-type.





4. Questionnaire à choix multiples

Un questionnaire à choix multiples comporte 5 questions. Pour chacune, 4 réponses sont proposées dont une seule est correcte. Un élève qui n'a pas étudié (cet exercice est fictif !) répond au hasard.

a) Quel risque a-t-il d'avoir tout faux ?

b) Quelle chance a-t-il d'avoir exactement 3 bonnes réponses ?

c) Quelle chance a-t-il de réussir s'il faut au moins 60% ?

d) Combien de réponses justes peut-il espérer en répondant au hasard ?

e) Représentez la distribution de probabilités.

5. L'indépendance, une hypothèse importante ?

Une urne contient 12 boules blanches et 23 noires. On prend sept fois une boule. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 5 boules blanches
a) si on remet chaque fois la boule prise dans l'urne avant de prendre la suivante ?
b) si on ne la remet pas ?

6. Des lancers pour attraper … Poisson !

a) On lance 40 fois une pièce de monnaie non truquée. Calculez la probabilité d'obtenir exactement 5 fois « *face* ».

b) On lance 40 fois un dé non truqué. Calculez la probabilité d'obtenir exactement 5 fois le « 1 ».

c) On lance 40 fois un dé icosaédrique (polyèdre régulier à 20 faces) non truqué. Calculez la probabilité d'obtenir exactement 5 fois le « 1 ».

7. Les boulons défectueux

A la sortie d'une chaîne de fabrication de boulons, pour estimer le risque d'avoir des boulons défectueux, le responsable « qualité » a tiré, au hasard, un lot de 100 000 boulons. Il a compté le nombre de boulons mal calibrés : 295 étaient défectueux.

L'usine doit livrer une commande de 500 boulons.
a) Calculez la probabilité qu'il y ait deux boulons défectueux dans cette commande.
b) Calculez la probabilité qu'il y ait au plus deux boulons défectueux dans cette commande.
c) Comparez les résultats obtenus par la loi binomiale et la loi de Poisson.

8. Le péage de l'autoroute

On sait qu'en moyenne, le week-end vers minuit, il se présente 3 voitures à la minute à un péage donné.
Quelle est la probabilité qu'exactement 5 voitures se présentent en une minute ?
Supposons que cette variable aléatoire (le nombre de voitures arrivant par minute) suive une loi de Poisson.

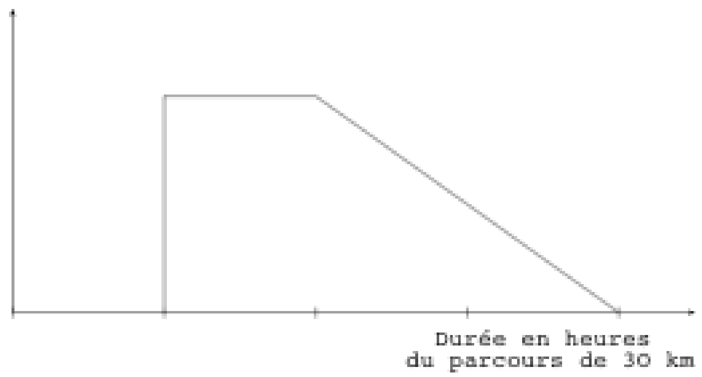
9. Le métro

Un usager arrive dans une station de métro sans savoir qu'un métro arrive toutes les 8 minutes.

c) A-t-il plus de chance d'attendre moins de 2 minutes, entre 2 et 4 minutes, ou plus de 6 minutes ?
d) Déterminez pour chaque cas ci-dessus la probabilité.
c) Déterminez la probabilité d'attendre
   - moins d'une minute
   - plus d'une minute
   - exactement une minute.
e) Comment mettre ces probabilités en graphique ?

10. Sur une autoroute

Examinons une autre variable aléatoire : le temps (mesuré en heures) mis pour accomplir un parcours de 30 km sur autoroute en respectant les limitations de vitesse. Ce temps est supposé inférieur à 1 heure.
Supposons que la fonction de densité de probabilité de cette variable aléatoire soit représentée par le graphique suivant. Complétez ce graphique en graduant les axes et commentez la forme de ce graphique.

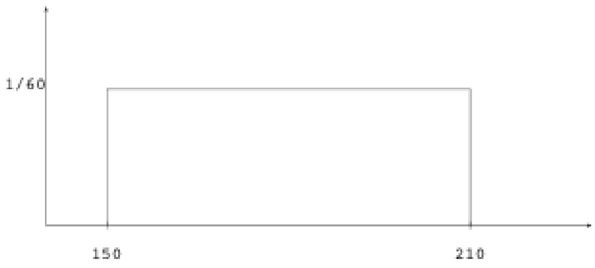


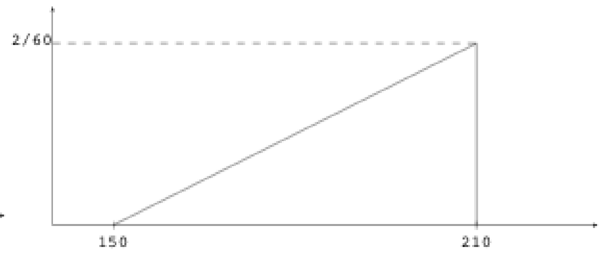
11. Graphe des tailles

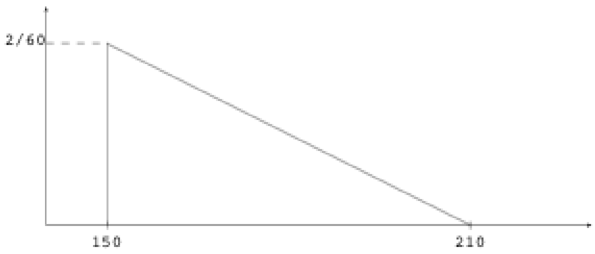
On s'intéresse cette fois à la variable aléatoire X donnée par la taille des adultes d'une population fixée.

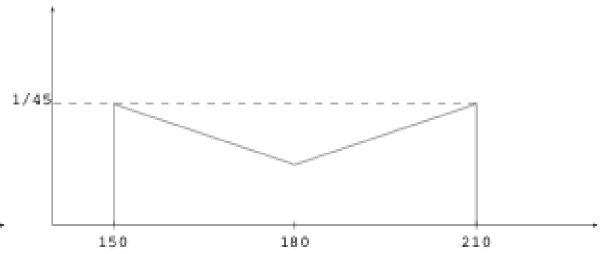
a) Voici différents graphiques. Lequel estimez-vous le plus approprié pour caractériser la fonction de densité de probabilité ? Sur celui-ci, calculez la probabilité d'avoir une taille entre 170 et 180 : $P(170 \leq X \leq 180)$.

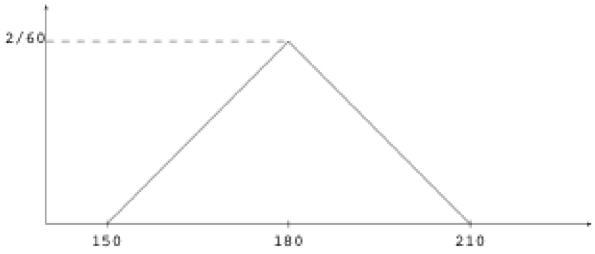
b) Avez-vous une autre idée de graphique ?











12. Suis-je plus grand que mon grand-père ?

Jean a 18 ans et mesure 1m92. Son grand-père au même âge mesurait 1m80. Dans l'absolu, Jean est bien sûr le plus grand mais qu'en est-il par rapport au reste de la population sachant que maintenant, à l'âge de 18 ans, la taille moyenne est de 1m80 (écart-type 5,3 cm) alors qu'elle était de 1m72 (écart-type 4,2 cm) dans la jeunesse du grand-père ?

13. Le pouvoir d'une minorité résolue

a) Un comité doit voter ou rejeter une motion. Il se compose de cinq membres dont deux ont décidé de s'opposer à celle-ci. Les trois autres votent au hasard. Quelle est la probabilité de rejet de la motion si la décision se prend à la majorité simple ?

b) Dans un pays d'un million de votants, on organise un référendum sur "le vote des étrangers". Presque tous sont indécis, à l'exception de deux mille personnes qui sont fermement défavorables au vote des étrangers. Quelle est la probabilité que la loi soit rejetée ?