Dérivées

Mariza Krysinska et Karin Van Wiele
GEM - 2015

Avant-propos

Le parcours didactique proposé dans ce document s'inspire d'un projet d'enseignement de la dérivée proposé par Maggy Schneider lors d'une formation, après essais dans ses classes. Ce projet a ensuite été l'objet de la thèse de doctorat de Jean-Yves Gantois qui l'a expérimenté, entre autres dans mes classes. Ce projet, sous presse[1], qui englobe toute l'analyse, mise sur une première approche de la dérivée dans un contexte à la fois cinématique et graphique pour poursuivre par l'approximation numérique.

Quant à moi, je propose ici, sur base d'enjeux analogues, une première approche qui articule plutôt les aspects géométrique et numérique. C'est en ce sens que j'ai poursuivi des expérimentations et mis à jour différentes stratégies des élèves, proches de celles que j'avais pu observer dans le cadre précédent.

Mariza Krysinska

Introduction

Dans nos choix didactiques, nous avons privilégié la démarche heuristique dans laquelle on s'appuie sur les intuitions géométriques ou physiques et dans laquelle on élabore, pas à pas, les concepts de tangente, d'extremum et de point d'inflexion ainsi que l'étude raisonnée des fonctions dans laquelle on s'appuie sur les outils d'analyse les mieux adaptés au type de fonctions étudiées.

Nous avons choisi de nous limiter aux fonctions du troisième degré et aux fonctions rationnelles du type second degré sur premier degré. En effet, la dérivée est ici un outil pertinent pour déterminer un extremum et un point d'inflexion. D'autre part, nous voulons éviter ce calcul là où il n'est pas nécessaire : par exemple, dans le cadre des fonctions du second degré et des fonctions homographiques.

Nous introduisons et utilisons les notations selon les besoins. Par exemple, les notations d'une fonction seront soit sous la forme d'équation $y = \cdots$, soit sous la forme $f(x)$. De même, les notations de la dérivée seront soit sous la forme $\frac{dy}{dx}$ soit sous la forme $f'(x)$.

Mariza Krysinska et Karin Van Wiele

[1] Schneider M., Balhan K., Gerard I. & Henrotay P., avec la participation de Gantois J.-Y. (sous presse). *Du calcul infinitésimal à l'analyse mathématique.* Presses Universitaires de Liège.

1. Parcours didactique

1.1 Tangente parallèle à une droite donnée : vers la procédure infinitésimale

a) Déterminons le plus précisément possible le point de contact de la tangente à une courbe donnée et parallèle à la droite donnée (Fig. 1) et estimons l'abscisse du point de contact.

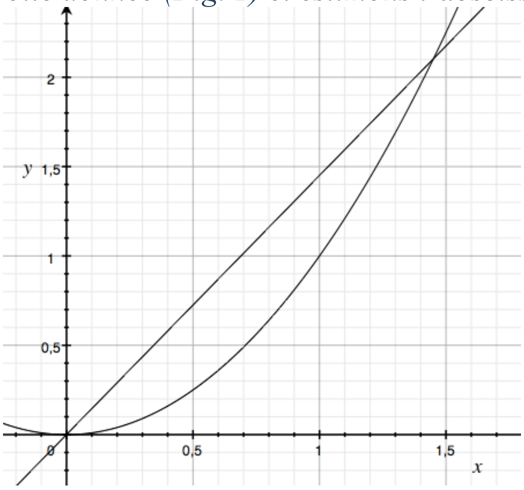


Fig.1- Une courbe et une droite

Nous pouvons dessiner la tangente à vue ou à l'aide d'une latte en la glissant parallèlement à la droite donnée jusqu'au dernier point de contact entre la latte et la courbe, si cela est possible. Nous observerons alors que la droite et la courbe ont soit deux points en commun, soit localement se confondent, soit n'ont rien en commun.

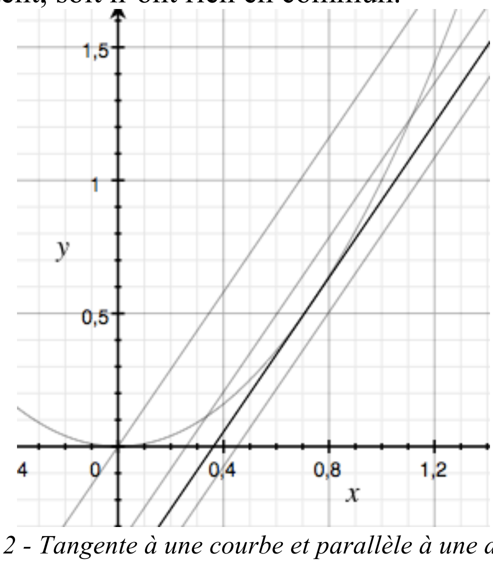


Fig.2 - Tangente à une courbe et parallèle à une droite

Nous pouvons aussi observer que, parmi tous les écarts entre la droite et les sécantes parallèles à la droite, l'écart entre la droite et la tangente est maximal.

De toute façon, il est difficile de déterminer exactement leur point de contact. Estimons l'abscisse en ce point à $x \approx 0{,}7$.

b) En supposant que l'équation de la droite est $y = 1{,}45x$ et de la courbe est $y = x^2$, nous vérifions par calculs les conjectures faites à la question précédente.

Les données algébriques permettent de vérifier par calculs si l'estimation est juste. En effet, l'équation de la droite de pente 1,45 et passant par le point d'abscisse 0,7 est

$$y = 1{,}45(x - 0{,}7) + 0{,}7^2.$$

Nous devons calculer le nombre de points d'intersection de cette droite et de la courbe d'équation $y = x^2$. Cela nous mène au système d'équations

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1{,}45(x - 0{,}7) + 0{,}7^2 \end{cases}$$

On obtient ainsi l'équation suivante en x :

$$x^2 = 1{,}45(x - 0{,}7) + 0{,}7^2$$

Cette équation a deux solutions : $x = 0{,}7$ et $x = 0{,}75$. Il en résulte que la droite d'équation $y = 1{,}45(x - 0{,}7) + 0{,}7^2$ est sécante à la courbe $y = x^2$.

c) Comment déterminer la valeur exacte de l'abscisse du point de contact ?

Il y a plusieurs méthodes qui permettent de déterminer la valeur exacte de l'abscisse du point de contact entre la droite et la tangente.

Méthode infinitésimale

Vu la concavité de la courbe, l'abscisse du point de contact doit être située dans l'intervalle $[0{,}7; 0{,}75]$. Nous pouvons améliorer l'encadrement de l'abscisse du point de contact pour que celle-ci soit située dans un intervalle $[x; x + \Delta x]$ de longueur arbitraire Δx. Pour cela, considérons la droite sécante à la courbe $y = x^2$ et parallèle à la droite $y = 1{,}45x$. Sa pente peut être écrite de deux façons, ce qui est à l'origine de l'équation suivante en x et Δx :

$$1{,}45 = \frac{((x+\Delta x)^2 - x^2)}{\Delta x},$$

$$1{,}45 = 2x + \Delta x.$$

En fixant la valeur de Δx, on peut déterminer la valeur correspondante de x.

La précision d'encadrement augmente lorsque les valeurs de Δx deviennent de plus en plus petites. On peut, par exemple, choisir $\Delta x = 0{,}0000000000001$. C'est tellement petit que nous pouvons dire que Δx est pratiquement égal à 0. Osons poser $\Delta x = 0$. L'équation $1{,}45 = 2x + \Delta x$ devient alors $1{,}45 = 2x$ d'où $x = \frac{1{,}45}{2}$. Nous obtenons ainsi la droite d'équation

$$y = 1{,}45\left(x - \frac{1{,}45}{2}\right) + \left(\frac{1{,}45}{2}\right)^2.$$

comme candidate tangente.

Vérifions algébriquement le nombre de points en commun entre la droite et la courbe. Pour cela, considérons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1{,}45\left(x - \frac{1{,}45}{2}\right) + \left(\frac{1{,}45}{2}\right)^2. \end{cases}$$

Nous en déduisons une équation en x :

$$x^2 = 1{,}45\left(x - \frac{1{,}45}{2}\right) + \left(\frac{1{,}45}{2}\right)^2,$$

ou l'équation

$$x^2 - 1{,}45x + \left(\frac{1{,}45}{2}\right)^2 = 0,$$

ou encore

$$\left(x - \frac{1{,}45}{2}\right)^2 = 0.$$

Cette équation a une solution double $x = \frac{1,45}{2}$.

En conclusion, la droite d'équation $y = 1,45\left(x - \frac{1,45}{2}\right) + \left(\frac{1,45}{2}\right)^2$ et la courbe d'équation $y = x^2$ sont tangentes car elles n'ont qu'un seul point en commun.

Une autre vérification algébrique s'appuie sur l'écart maximal observé lors des activités liées à la question 1a). L'écart entre la droite et la courbe dépend de x, il vaut $1,45x - x^2$. Il est maximal pour $x = \frac{1,45}{2}$. Ce résultat concorde avec la conclusion ci-dessus.

A ce stade du parcours, nous nous appuyons sur la notion première de la tangente à une courbe : une droite ayant un seul point d'intersection avec la courbe sans la traverser.

Méthode analytique

Paramétrisons les équations des droites parallèles à la droite $y = 1,45x$:
$y = 1,45x + k$.
Nous devons imposer une condition sur les valeurs du paramètre k pour que le système

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1,45x + k \end{cases}$$

admette une seule solution. Cette condition est $k = -\left(\frac{1,45}{2}\right)^2$. Ainsi, de nouveau, on obtient $x = \frac{1,45}{2}$ comme l'abscisse de l'unique point de contact de la courbe et de la tangente.

Institutionnalisation

Pour déterminer le point de contact de la tangente de pente donnée p à une courbe y = f(x), nous passerons par les étapes :

- Le calcul de la pente de la sécante à la courbe : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$;
- La simplification algébrique $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;
- Le calcul de la valeur de l'expression simplifiée pour $\Delta x = 0$;

Nous convenons de noter ces trois étapes par $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ et le résultat de ces calculs par $f'(x)$ ou $\frac{dy}{dx}$.

- La résolution de l'équation en *x* : $\frac{dy}{dx} = p$.

Remarquons que la notation $\frac{dy}{dx}$ n'est pas un quotient : elle désigne la limite des quotients $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

1.2 Une nouvelle conception de la tangente

En utilisant la procédure infinitésimale, calculons les équations de deux candidates aux tangentes à la courbe donnée par $y = x^3$, l'une de pente 0 et l'autre de pente $\frac{4}{3}$. Représentons les deux droites et la courbe sur un même graphique. Les droites ainsi trouvées peuvent-elles garder leur statut de tangentes ?

Dans tous les cas, le calcul de la pente de la tangente $\frac{dy}{dx}$ commence par le calcul de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

L'abscisse $x = 0$ du point de contact de la tangente de pente 0 est déterminée par l'équation $3x^2 = 0$. Il s'agit donc de la droite d'équation $y = 0$.

Il y a deux solutions à l'équation $3x^2 = \frac{4}{3}$: $\frac{2}{3}$ et $-\frac{2}{3}$: il y a donc deux tangentes de pente $\frac{4}{3}$. L'équation de chacune d'elles est respectivement :

$$y = \frac{4}{3}\left(x - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \text{ et } y = \frac{4}{3}\left(x + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

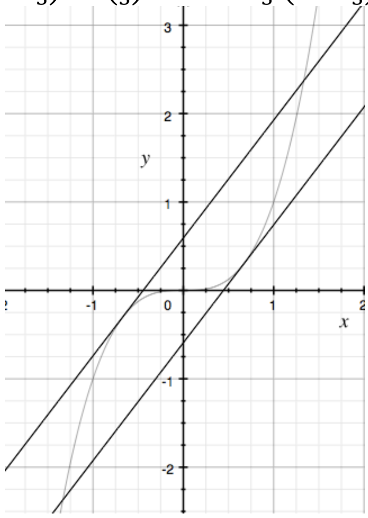


Fig.3 - Tangentes de pentes données à une courbe donnée

Nous observons sur le graphique que la droite donnée par $y = 0$ traverse la courbe et que les droites d'équations $y = \frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^3$ et $y = \frac{4}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^3$ ont plusieurs points en commun avec la courbe. Malgré cela, nous décidons de considérer ces trois droites comme des tangentes. Ainsi, nous disposons d'une méthode, dite infinitésimale, pour calculer les pentes des tangentes à une courbe de 3e degré et aussi à toutes les courbes qui représentent les fonctions algébriques.

Institutionnalisation

Dans le cas des courbes du 2ème degré, la tangente est la droite qui n'a qu'un point en commun avec la courbe mais aussi la droite que nous obtenons par le calcul infinitésimal.
Dans le cas des courbes du 3ème degré, la tangente est la droite que nous obtenons par le calcul infinitésimal : sa pente est calculée par la procédure du calcul notée par

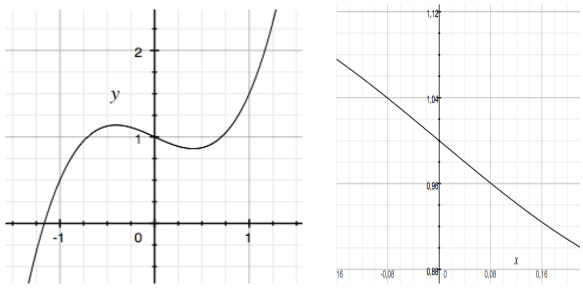
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Mais il faut accepter qu'une telle tangente ait plus qu'un point commun et qu'elle puisse traverser la courbe.

Dans la section suivante, nous montrerons davantage la pertinence du calcul infinitésimal pour déterminer la pente d'une tangente.

1.3 Tangente comme approximation affine d'une fonction

Lorsque nous faisons plusieurs fois le « zoom in» centré au voisinage d'un point d'une courbe représentant une fonction algébrique, la courbe apparaît comme un segment de droite. Cela est le cas de la courbe d'équation $y = x^3 - 0{,}5x + 1$ qui devient une droite après plusieurs « zooms in » centrés en $(0\,;1)$: quelle est l'équation de cette droite et comment peut-on expliquer ce phénomène ? Quelle est la tangente à la courbe au point $(0\,;1)$? Quel rapprochement peut-on faire entre le phénomène observé et l'équation de la tangente ?
Les deux graphiques ci-dessous illustrent le phénomène de la linéarisation de la courbe après un zoom suffisamment grand.



a) b)

Fig. 4 - Phénomène de linéarisation de la courbe d'équation $y = x^3 - 0{,}5x + 1$

Ce phénomène s'explique par le fait que, pour les valeurs de x proches de 0, le terme en x^3 devient négligeable par rapport à l'expression $-0{,}5x + 1$.

Cela signifie que la courbe donnée par $y = x^3 - 0{,}5x + 1$ se comporte comme la courbe donnée par $y = -0{,}5x + 1$. Pour cette raison, nous disons que la fonction donnée par $y = 0{,}5x + 1$ est une approximation affine de la fonction donnée par $y = x^3 - 0{,}5x + 1$ dans le voisinage de $x = 0$: la courbe représentative de l'une peut donc remplacer localement la courbe représentative de l'autre.

Déterminons à présent la tangente en $(0{,}1)$. Commençons par calculer l'expression de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^3 - 0{,}5(x+\Delta x) + 1 - (x^3 - 0{,}5x + 1)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2 - 0{,}5.$$

De là, nous obtenons

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 0{,}5\ ,$$

ce qui permet d'établir la relation $3x^2 - 0{,}5 = p$ entre l'abscisse x du point de contact et la pente p de la tangente, quelles que soient les valeurs de x et de p.

Cette relation permet donc de calculer l'une lorsqu'on connait la valeur de l'autre. Ainsi, pour $x = 0$ la pente vaut $-0{,}5$. Nous établissons alors $y = -0{,}5x + 1$ comme l'équation de la tangente en $x = 0$ dans laquelle nous retrouvons la partie affine de la formule $y = x^3 - 0{,}5x + 1$.

Il en résulte que la tangente fournit une approximation affine de la fonction dans le voisinage de $x = 0$ et la courbe représentative de cette fonction peut être replacée par sa tangente dans ce voisinage, comme est illustré par la figure 5.

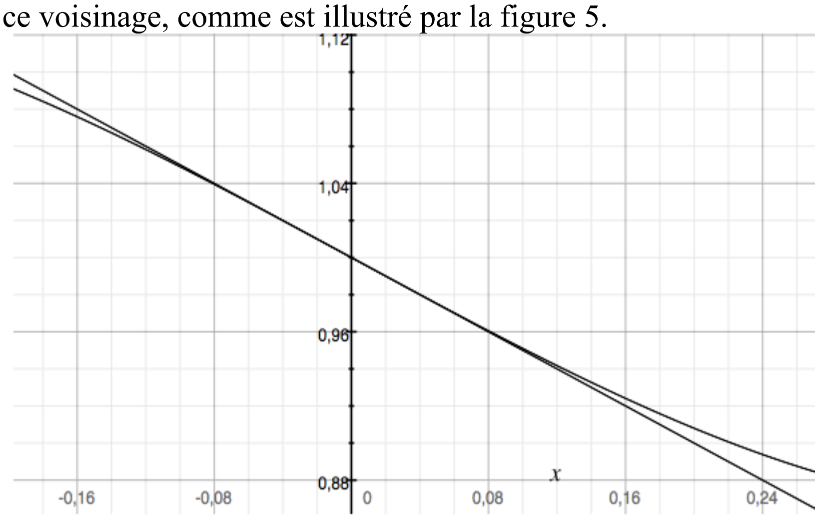


Fig.5 - Tangente replace localement la courbe

Pourquoi la tangente $y = 1{,}45\left(x - \frac{1{,}45}{2}\right) + \left(\frac{1{,}45}{2}\right)^2$ déterminée en 1.1 à $y = x^2$ en point d'abscisse $x = \frac{1{,}45}{2}$, serait-elle une bonne approximation de la fonction correspondante ?

Pour y répondre, développons la fonction donnée par $y = x^2$ dans le voisinage du point de coordonnée $\left(\frac{1{,}45}{2}; \left(\frac{1{,}45}{2}\right)^2\right)$, c'est-à-dire exprimons-la sous la forme du trinôme du deuxième degré en $\left(x - \frac{1{,}45}{2}\right)$.

Ecrivons le monôme x^2 comme trinôme du second degré en $\left(x - \frac{1{,}45}{2}\right)$. Pour cela, déterminons les valeurs de a, b et c telles que l'égalité

$$x^2 = a\left(x - \frac{1{,}45}{2}\right)^2 + b\left(x - \frac{1{,}45}{2}\right) + c$$

soit une identité (égalité vraie pour toutes les valeurs réelles de x) :

$$x^2 = a\left(x^2 - 1{,}45x + \left(\frac{1{,}45}{2}\right)^2\right) + bx - b\frac{1{,}45}{2} + c$$

d'où $a = 1$. Ainsi, l'égalité devient

$$x^2 = \left(x^2 - 1{,}45x + \left(\frac{1{,}45}{2}\right)^2\right) + bx - b\frac{1{,}45}{2} + c,$$

ou

$$0 = -1{,}45x + bx - b\frac{1{,}45}{2} + c + \left(\frac{1{,}45}{2}\right)^2,$$

d'où $b = 1{,}45$ et $c = \left(\frac{1{,}45}{2}\right)^2$.

Il en résulte l'identité suivante :

$$x^2 = \left(x - \frac{1{,}45}{2}\right)^2 + 1{,}45\left(x - \frac{1{,}45}{2}\right) + \left(\frac{1{,}45}{2}\right)^2.$$

Dans le développement $\left(x - \frac{1{,}45}{2}\right)^2 + 1{,}45\left(x - \frac{1{,}45}{2}\right) + \left(\frac{1{,}45}{2}\right)^2$ de x^2 en $x = \frac{1{,}45}{2}$, le terme $\left(x - \frac{1{,}45}{2}\right)^2$ devient négligeable par rapport à la somme des termes $1{,}45\left(x - \frac{1{,}45}{2}\right) + \left(\frac{1{,}45}{2}\right)^2$ lorsque les valeurs de x sont proches de $\frac{1{,}45}{2}$. Cela permet d'affirmer que x^2 se comporte comme $1{,}45\left(x - \frac{1{,}45}{2}\right) + \left(\frac{1{,}45}{2}\right)^2$ au voisinage de $\frac{1{,}45}{2}$. Cela confirme que, dans ce cas-là également, la tangente est une droite qui localement peut remplacer la courbe au voisinage du point de contact et que sa formule est celle de la fonction affine qui est l'approximation du premier degré de la fonction donnée.

Institutionnalisation

L'équation

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

permet d'établir le lien entre la procédure du calcul noté par $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ et p la pente de la tangente. Ainsi, on peut calculer soit la valeur de x en fonction de p, soit la valeur de p en fonction de x.

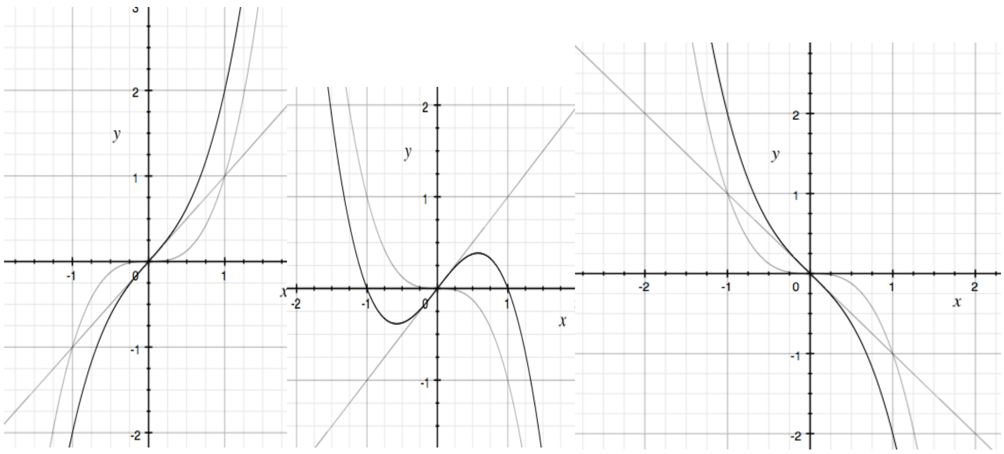
Si on fixe la valeur de x, la limite $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ est égale à la pente de la tangente au point d'abscisse x.

La tangente ainsi déterminée fournit une bonne approximation locale de la courbe bien qu'elle traverse la courbe et qu'elle a plus d'un point en commun avec la courbe.

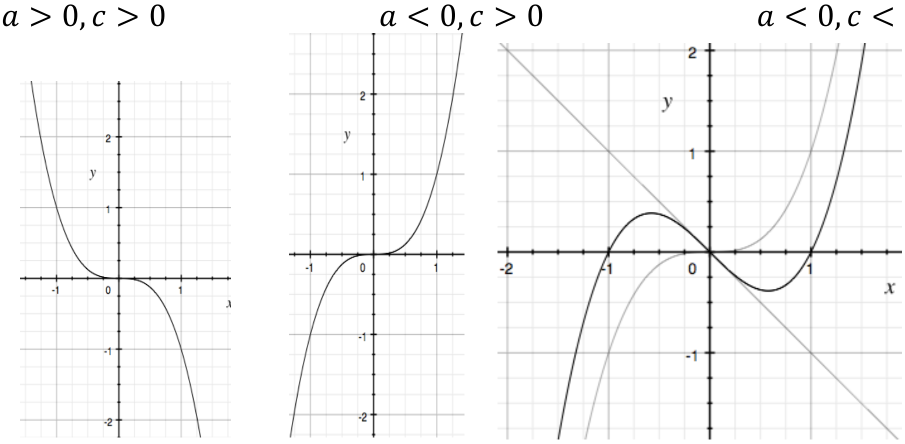
Tangente comme outil pour étudier des fonctions
Dans sa nouvelle conception comme droite représentant l'approximation affine locale de la fonction, la tangente peut devenir un outil performant pour étudier certaines classes de fonctions.

Considérons, par exemple la classe de fonctions donnée par $y = ax^3 + cx + d$ et étudions son identité graphique. On peut aisément vérifier par calcul infinitésimal que l'équation $y = cx + d$ est celle de la tangente en $x = 0$. En même temps, la fonction du premier degré donnée par $y = cx + d$ fournit une approximation, dans le voisinage de 0, de la fonction donnée par $y = ax^3 + cx + d$ car ax^3 est négligeable par rapport à $cx + d$ dans le voisinage de 0.

En particulier, la courbe d'équation $y = ax^3 + cx$ peut être obtenue par la 'somme' de la courbe d'équation $y = ax^3$et de la droite d'équation $y = cx$. De tout cela il résulte que la courbe "atterrit en douceur " sur la droite tangente et semble se confondre localement avec elle. Les six cas de figure sont obtenus alors en fonction des signes de a ($a > 0$ ou $a < 0$) et de b ($b > 0$ ou $b = 0$ ou $b < 0$). Ces figures constituent l'identité graphique de $y = ax^3 + cx$ qui est la même que celle de $y = ax^3 + cx + d$.



$a > 0, c > 0$ $a < 0, c > 0$ $a < 0, c < 0$



$a < 0, c = 0$ $a > 0, c = 0$ $a > 0, c < 0$

Fig. 6 - Identité graphique de la classe de fonctions $y = ax^3 + cx + d$

1.4 Tangente comme outil pour déterminer des extremums

Dessinons l'allure générale de la courbe représentative de la fonction donnée par $y = f(x) = 3x - x^3$. Comment déterminer sa valeur maximale sur l'intervalle $[0; 1{,}7]$?

L'allure générale de la courbe représentative de la fonction donnée par $y = 3x - x^3$ ou par $y = x(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$ (Fig.6) peut être obtenue à partir de son caractère impair et de l'étude du signe de l'expression

$$x(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$$

Elle peut être obtenue également comme somme des graphiques de $y = 3x$ et de $y = -x^3$.

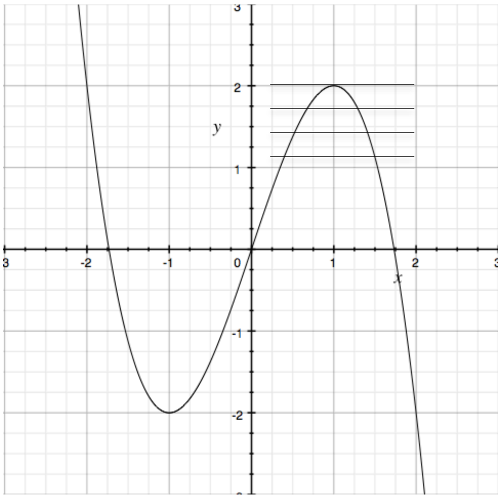


Fig. 7 - L'allure générale de la fonction $y = f(x) = 3x - x^3$

La figure 6 suggère que la valeur maximale de la fonction sur l'intervalle $[0; 1{,}7]$ vaut 2 et qu'elle est atteinte pour $x = 1$.

Nous allons confirmer cette conjecture par les calculs infinitésimaux suivants. D'abord, remarquons que toute sécante parallèle à l'axe ox détermine l'intervalle dans lequel se trouve la valeur de x qui réalise le maximum de la fonction. La dernière tangente sécante est tangente horizontale Calculons donc la formule générale de la pente de la tangente en fonction de x :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x) - (x+\Delta x)^3 - 3x + x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x - 3x^2\Delta x - 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\ &= 3 - 3x^2\end{aligned}$$

et calculons la valeur de x correspondant à la pente nulle :

$$3 - 3x^2 = 0 : \ x = 1 \text{ et } f(1) = 2.$$

Bien que les résultats confirment la conjecture, vérifions directement si $f(1) = 2$ est vraiment la valeur maximale de la fonction sur l'intervalle $[0; 1{,}7]$. Autrement dit, vérifions si

$$2 \geq 3x - x^3$$

pour toutes les valeurs de x entre 0 et 1,7.

En effet, l'inégalité $2 \geq 3x - x^3$ équivaut à $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ ou à $(x-1)^2(x+2) \geq 0$.

Cette dernière inégalité est vraie pour toutes les valeurs de $x \geq -2$. Ainsi, le nombre 2 est bien la valeur maximale de la fonction sur l'intervalle $[-2, \rightarrow[$.

Dessinons l'allure générale du graphique de la fonction donnée par $y = f(x) = -3x^3 + 4x + 1$. Admet-elle un extremum ? Si oui, calculons la valeur de x qui lui correspond.

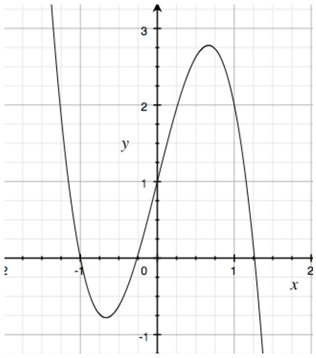


Fig.8 - L'allure générale de la fonction $y = f(x) = -3x^3 + 4x + 1$

L'allure générale de la courbe représentative (Fig.7) peut être obtenue comme somme de la courbe $y = -3x^3$ et de la droite $y = 4x + 1$. Au vue du graphique de la figure 6, la fonction admet deux extremums locaux, l'un un minimum local, et l'autre un maximum local. Ils correspondent à deux sommets de la courbe.

Il s'agit bien des extremums locaux car, globalement, la fonction n'admet pas de valeur maximale ni minimale. L'intérêt des valeurs de ces extremums peut devenir important lorsque nous devons examiner le nombre de solutions d'une équation paramétrée comme

$$-3x^3 + 4x + 1 = m.$$

La position du sommet est déterminée à l'aide de la tangente horizontale : nous devons éloigner le plus possible une droite sécante horizontale (Fig. 8) jusqu'à quelle devienne tangente. Pour connaître sa valeur exacte, il faut calculer le point de contact d'une tangente horizontale avec la courbe considérée.

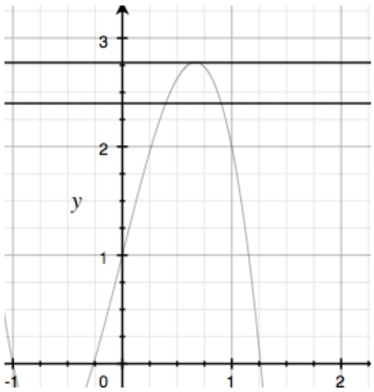


Fig.9 - Tangente horizontale pour déterminer

1.5 La position de l'extremum de $y = f(x) = -3x^3 + 4x + 1$

Commençons par calculer $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3(x+\Delta x)^3 + 4(x+\Delta x) + 1 - (-3x^3 + 4x + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-9x^2\Delta x - 9x(\Delta x)^2 - 3(\Delta x)^3 + 4\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0}(-9x^2 - 9x\Delta x - 3(\Delta x)^2 + 4) \\ &= -9x^2 + 4\end{aligned}$$

Donc, $\frac{dy}{dx} = -9x^2 + 4$. L'abscisse d'un sommet est ainsi solution de l'équation

$$0 = -9x^2 + 4.$$

Ces solutions sont $x = \frac{2}{3}$ et $x = -\frac{2}{3}$. La valeur du maximum alors vaut

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -3\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 4\frac{2}{3} + 1 = -\frac{24}{27} + \frac{72}{27} + 1 \approx 2{,}777 \ldots,$$

et la valeur du minimum vaut

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -3\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 4\left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = \frac{24}{27} - \frac{72}{27} + 1 = -\frac{48}{27} + 1 \approx -0{,}777 \ldots .$$

Institutionnalisation

Le maximum d'une fonction f sur son domaine de définition est sa valeur la plus grande atteinte par cette valeur. Le minimum d'une fonction est sa valeur minimale atteinte.

Plusieurs cas de figures :

Certaines fonctions n'admettent aucune valeur minimale et aucune valeur maximale sur leur domaine de définition. C'est le cas de la fonction donnée par $y = x^3$.

Certaines fonctions admettent seulement une valeur minimale sur leur domaine de définition. C'est le cas de la fonction donnée par $y = x^2$ qui admet la valeur minimale 0 en $x = 0$.

Certaines fonctions admettent seulement une valeur maximale. C'est le cas de la fonction donnée par $y = -x^2$ qui admet la valeur maximale 0 en $x = 0$.

Certaines fonctions n'admettent globalement pas d'extremum. Par contre, à l'intérieur d'un intervalle du domaine de définition, elles admettent soit un maximum, soit un minimum. C'est le cas de la fonction donnée par $y = -3x^3 + 4x + 1$ qui admet le minimum local $-\frac{7}{9}$ atteint pour $x = -\frac{2}{3}$ sur un intervalle comme [-1 ; 0] et le maximum local $\frac{25}{9}$ atteint pour $x = \frac{2}{3}$ sur un intervalle comme [0 ; 1].

Une fonction peut admettre des extremums aux extrémités d'un intervalle du domaine de définition. C'est le cas de la fonction donnée par $y = x^3$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc, sur un intervalle quelconque, elle admet sa valeur minimale à l'extrémité gauche de cet intervalle et la valeur maximale à l'extrémité droite du même intervalle.

Dans tous les cas où l'extremum local est atteint à l'intérieur du domaine de définition d'une fonction élémentaire (une fonction polynomiale ou rationnelle), alors $\frac{dy}{dx} = 0$.

Cette condition est donc nécessaire mais pas suffisante. En effet, dans le cas de la fonction donnée par $y = x^3$ qui est croissante sur son domaine, $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ s'annule pour $x = 0$. Mais, comme la fonction est croissante sur son domaine, il n'y a pas ici un extremum.s

1.6 Tangente comme outil pour déterminer les points d'inflexion

Esquissons l'allure générale de la courbe $y = 0{,}5x^3 - 1{,}5x + 2$ en additionnant les graphiques des courbes $y = 0{,}5x^3$ et $y = -1{,}5x + 2$. Quelle est l'équation de la tangente en $x = 0$? Quelle est la position de cette tangente par rapport à la courbe ? Pourquoi ?

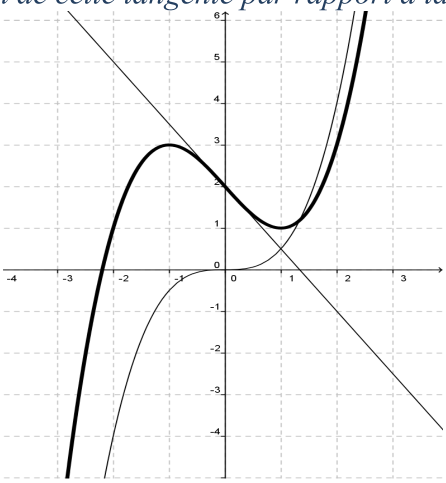


Fig.10 - La courbe $y = 0{,}5x^3 - 1{,}5x + 2$ *comme somme de* $y = 0{,}5x^3$ *et de* $y = -1{,}5x + 2$

La droite d'équation $y = -1{,}5x + 2$ déterminée par la partie affine de la formue $y = 0{,}5x^3 - 1{,}5x + 2$ traverse la courbe car la différence $0{,}5x^3$ entre la courbe et la droite change de signe dans le voisinage de 0. Cette droite est aussi la tangente à la courbe en $x = 0$. En effet,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0{,}5\left(3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right) - 1{,}5x - 1{,}5\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (1{,}5x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 - 1{,}5) \\ &= 1{,}5x^2 - 1{,}5 \end{aligned}$$

Pour $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = -1{,}5$. C'est la pente de la tangente passant par le point de coordonnée (0 ; 2). Son équation est bien $y = -1{,}5x + 2$. Il en résulte que cette tangente traverse la courbe au point de contact (0 ; 2). Un tel point s'appelle point d'inflexion. Remarquons au passage que cette pente est ici minimale car elle est égale à la valeur minimale de la fonction $f'(x)$.

Comment déterminer le point de la courbe $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ en lequel la tangente la traverse ? Pourquoi ?

La fonction donnée par $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ est représentée à la figure 9. Sa courbe représentative peut être construite comme somme des fonctions données par $y = x^3 - 3x^2$ et $y = 2x + 2$.

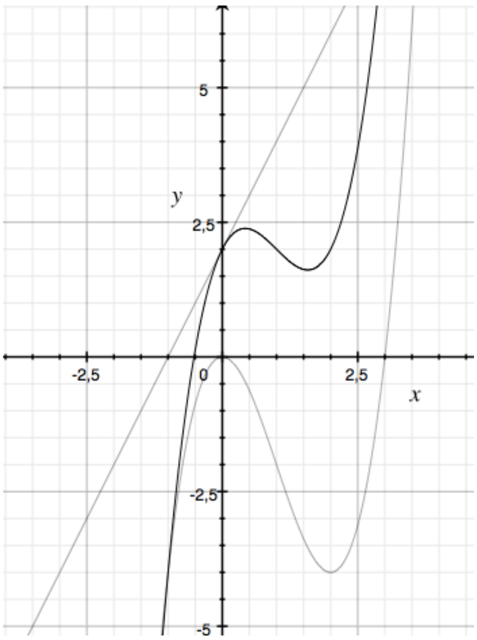


Fig.11 - La courbe $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ *comme somme de* $y = x^3 - 3x^2$ *et de* $y = 2x + 2$.

L'abscisse *x* du point d'inflexion semble d'être égale à 1 et la pente de la tangente en ce point semble atteindre le minimum.

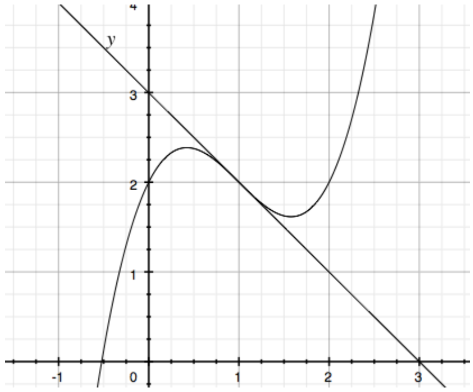


Fig.12 - Point d'inflexion en x = 1 *?*

Nous allons vérifier cette conjecture. Commençons par calculer $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - 3(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x) + 2 - (x^3 - 3x^2 + 2x + 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 6x\Delta x - 3(\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 - 6x - 3(\Delta x) + 2)$$

$$= 3x^2 - 6x + 2$$

La pente de la tangente en $x = 1$ vaut $f'(1) = -1$. Son équation est $y = -(x-1) + 2$ ou $y = -x + 3$.

Cette pente est minimale car la fonction donnée par l'expression $3x^2 - 6x + 2$ admet le un minimum pour $x = 1$.

Il reste à vérifier si cette tangente traverse la courbe. Pour cela, développons l'expression $x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ autour de $x = 1$. Autrement dit, écrivons l'expression $x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ comme polynôme du troisième degré en $x - 1$:

$x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d.$

Cette égalité doit être vraie quelle que soit la valeur de x. Par identification des coefficients des termes analogues, nous obtenons alors que $a = 1, b = 0, c = -1, d = 2$ et que

$x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = (x-1)^3 - (x-1) + 2.$

Dans la partie affine de ce développement, nous retrouvons l'expression $-(x-1) + 2$ constituant l'équation de la tangente. Nous en déduisons que le terme $(x-1)^3$ correspond à l'écart entre la courbe et la tangente dans le voisinage du point d'abscisse $x = 1$. Ce terme change de signe en $x = 1$, ce qui signifie que la tangente traverse la courbe.

Désormais, le point d'inflexion pourra être déterminé par le calcul de la pente minimale ou maximale de la courbe représentative d'une fonction élémentaire comme fonctions polynomiales de degré supérieure à 2.

Institutionnalisation

Le point d'une courbe en lequel la tangente la traverse s'appelle point d'inflexion.

La pente de la tangente en ce point admet un minimum ou un maximum (qui peut être local).

Pour déterminer un point d'inflexion de la courbe représentative d'une fonction, il suffit de

- calculer $f'(x)$
- calculer les extremums de f'. Pour cela, nous pouvons passer par le calcul des racines de la dérivée de f' notée par f'' et appelée la seconde dérivée de f.

1.7 Tangente comme outil pour déterminer une vitesse instantanée

On donne le graphique (Fig. 11) des mouvements rectilignes de deux mobiles (l'axe des abscisses représente le temps et l'axe des ordonnées représente la distance par rapport au point de départ commun de deux mobiles). Comment évoluent leurs vitesses ? Y a-t-il un moment où les deux mobiles ont une même vitesse ? Si oui, comment le déterminer graphiquement ?

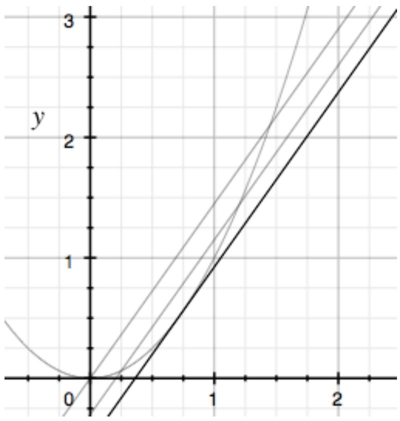


Fig.13 - Courbes représentatives de deux mouvements :
horizontalement - l'axe de temps, verticalement - l'axe de l'espace parcouru

La vitesse du mouvement représenté par la droite est constante car la distance parcourue sur les intervalles successifs égaux est la même : c'est la pente de cette droite.

La vitesse du mouvement représenté par la courbe augmente car nous pouvons observer sur le graphique que la distance parcourue sur les intervalles égaux successifs augmente. Au début, elle est plus petite que la vitesse du premier mobile. Puis, au moment de la rencontre de deux mobiles, c'est-à-dire lorsque les deux courbes se rencontrent, sa la vitesse du deuxième est plus grande que celle du premier mobile.

Comme la vitesse de ce deuxième mobile augmente continuellement, nous pouvons supposer qu'il existe un moment où les mobiles ont les mêmes vitesses.

Pour déterminer graphiquement ce moment, nous nous appuyons sur le fait que les points d'intersection de toute droite parallèle à la droite du premier mouvement et sécante avec la courbe du deuxième mouvement déterminent un intervalle de temps sur lequel la vitesse moyenne du deuxième mobile est égale à la vitesse constante du premier mobile. L'instant où les deux mobiles ont une même vitesse est alors situé dans cet intervalle de temps.

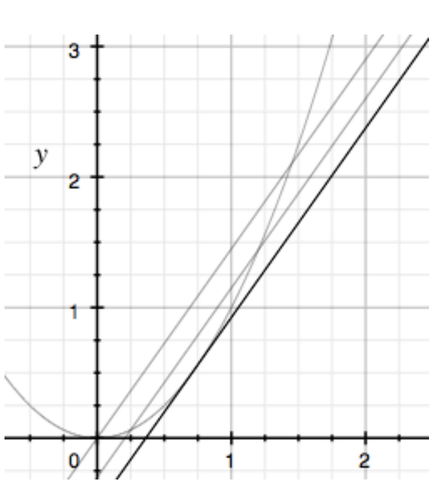


Fig.14 - Lien entre tangente et même vitesse

Nous avons donc intérêt à réduire l'intervalle qui encadre l'instant recherché. Pour cela, nous éloignons la droite mobile de la droite du premier mouvement jusqu'à sa position tangente à la courbe du deuxième mouvement. Ainsi, l'instant où les deux mouvements ont une même vitesse est celui où l'écart entre la courbe et la droite est maximal. Autrement dit, c'est l'instant où la tangente à la courbe du deuxième mouvement est parallèle à la droite du premier mouvement.

Nous pouvons aussi raisonner de la manière suivante : Lorsque l'écart qui sépare les deux mobiles augmente, la vitesse du deuxième mobile est plus petite que la vitesse du premier. Lorsque l'écart entre deux mobiles commence à diminuer, la vitesse du deuxième est devenue plus grande que celle du premier mobile. La vitesse des deux mouvements sera la même lorsque l'écart entre les deux sera maximal ou lorsque la tangente du mouvement accéléré sera parallèle à la droite du mouvement uniforme.

Institutionnalisation

La vitesse instantanée d'un mobile en un moment donné est la pente de la tangente à la courbe du mouvement de ce mobile au point dont l'abscisse est ce moment.

La vitesse instantanée en fonction du temps est la fonction dérivée de la fonction de l'espace parcouru en fonction du temps.

2. Formules de dérivation

Formules de dérivation pour étudier les fonctions polynomiales

Voyons ce que cela donne pour les fonctions suivantes :

- $y = f(x) = x$:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

- $y = f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x. \end{aligned}$$

- $y = f(x) = x^3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

- $y = f(x) = ax^3$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a(x+\Delta x)^3-ax^3}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{ax^3+3ax^2\Delta x+3ax(\Delta x)^2+a(\Delta x)^3-ax^3}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{3ax^2\Delta x+3ax(\Delta x)^2+a(\Delta x)^3}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} 3ax^2 + 3ax\Delta x + (a\Delta x)^2$$
$$= 3ax^2$$

- $y = f(x) = x^2 + x$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)-x^2-x}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} 2x + \Delta x + 1$$
$$= 2x + 1$$

- $y = f(x) = x^3 + x^2 + 5$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^3+(x+\Delta x)^2+5-\left(x^3+x^2+5\right)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3+2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x + \Delta x$$
$$= 3x^2 + 2x$$

Ces résultats peuvent être généralisés :

- pour $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, nous avons $f'(x) = 2ax + b$;
- pour $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, nous avons $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Et de manière encore plus générale,

$$(f(x) + k)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)+k-f(x)-k}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$= f'(x)$$
$$\left(af(x)\right)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{af(x+\Delta x)-af(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a\left(f(x+\Delta x)-f(x)\right)}{\Delta x}$$
$$= a \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$= af'(x)$$
$$\left(f(x) + g(x)\right)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(f(x+\Delta x)-f(x)\right)+\left(g(x+\Delta x)-g(x)\right)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(f(x+\Delta x)-f(x)\right)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(g(x+\Delta x)-g(x)\right)}{\Delta x}$$
$$= f'(x) + g'(x)$$

Nous en concluons que

- la dérivée de la somme de deux fonctions est la somme des dérivées de chaque fonction ;
- la dérivée du produit d'une fonction par une constante est le produit de la dérivée de la fonction par cette constante ;
- la dérivée de la somme d'une fonction et d'une constante est la dérivée de la fonction.

2.1 Autres formules pour dériver les fonctions polynomiales et rationnelles

Souvent, nous sommes amenés à calculer la dérivée du produit de deux fonctions. Peut-on s'attendre à ce que cette dérivée soit égale au produit des dérivées de chacune des fonctions ? L'exemple ci-dessous le contredit.
En effet, soit considérons $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. Alors,

$$\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = (x^3)' = 3x^2 \text{ et } f'(x) \cdot g'(x) = 1 \cdot 2x = 2x.$$

Calculons donc la dérivée du produit à partir de la définition de la dérivée :

$$\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

Pour continuer ce calcul, interprétons le produit $f(x) \cdot g(x)$ comme l'aire d'un rectangle de côtés de longueurs variables $f(x)$ et $g(x)$ (Fig.15).

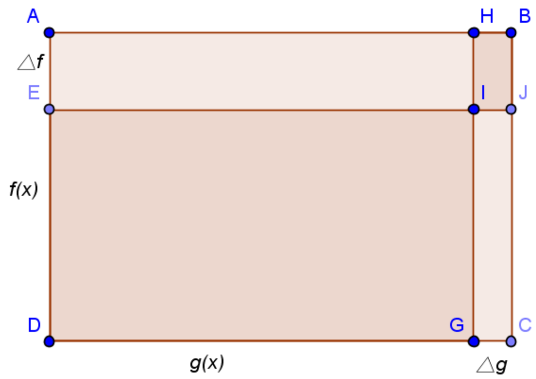


Fig. 15 - Interprétation de f(x) · g(x) *comme aire d'un rectangle*

Notons par Δf et par Δg les accroissements respectivement de f et de g. Alors,

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) \text{ et } \Delta g = g(x+\Delta x) - g(x)$$

Notons par Δy l'accroissement de $f(x) \cdot g(x)$:

$$\Delta y = f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)$$

Interprétons Δy en termes d'aires de la figure 16 :

$$\begin{aligned} \Delta y &= aire\ AB\square D - aire\ EIGD \\ &= aire\ AHIE + aire\ IJCG + Aire\ HBJI \\ &= \Delta f \cdot g(x) + f(x) \cdot \Delta g + \Delta f \cdot \Delta g \end{aligned}$$

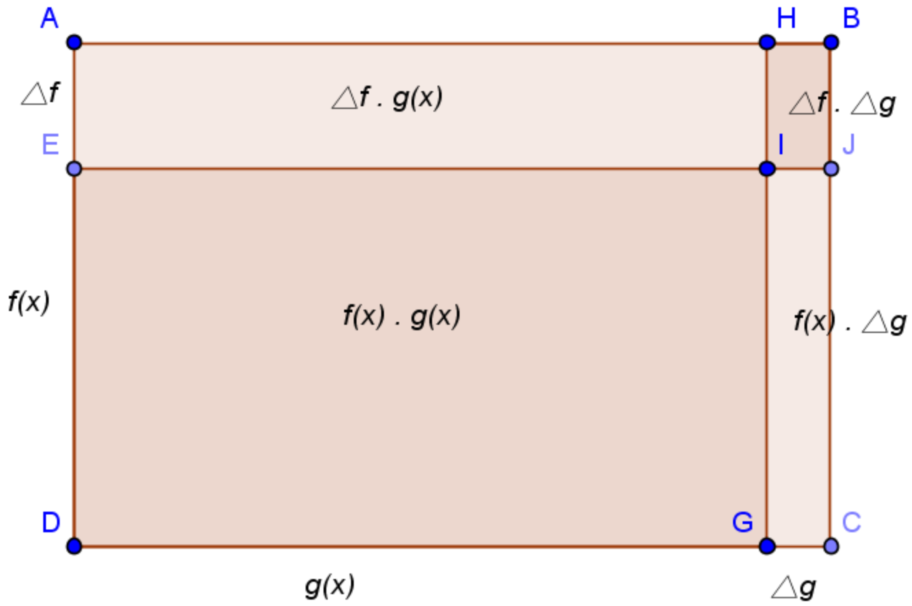


Fig. 16 - Aire f(x) · g(x) *comme somme des aires de plusieurs autres rectangles*

D'où,

$$\begin{aligned}\left(f(x)\cdot g(x)\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta \square\to 0}\frac{\Delta f\cdot g(x)+f(x)\cdot\Delta g+\Delta f\cdot\Delta g}{\Delta x}\\ &= g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}+f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f\cdot\Delta g}{\Delta x}\\ &= g(x)f'(x)+f(x)g'(x)+0\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons établi la formule suivante :

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = g(x)f'(x)+f(x)g'(x)$$

$$y = f(x) = \frac{1}{x}$$

Le calcul de la dérivée peut être fait directement à partir de la définition, comme cela a été fait précédemment.

$$\begin{aligned}f'(x) = \frac{dy}{dx} &= \lim\nolimits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{(x+\Delta x)}-\frac{1}{x}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}\\ &= -\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

Nous pouvons également s'appuyer sur la formule de la dérivée du produit de deux fonctions qui a été traitée ci-dessus :

$f(x) = \frac{1}{x}$ équivaut à $xf(x) = 1$.

D'où , d'une part $(xf(x))' = 0$ et, d'autre part, $\left(xf(x)\right)' = f(x) + xf'(x)$. Il en résulte que $f(x) + xf'(x) = 0$ d'où $f'(x) = -\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{x^2}$.

De là, il résulte que $y = f(x) = \frac{a}{x}$: $\left(\frac{a}{x}\right)' = a\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$

Le calcul de la dérivée de la fonction $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ s'appuie sur la formule de la dérivée du produit de deux fonctions qui sera utilisée de deux manières différentes. D'abord la fonction elle-même peut être traitée comme produit de $\frac{1}{x}$:

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)' = -\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x} + -\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x} = -\frac{2}{x^3}.$$

Nous pouvons aussi s'appuyer sur l'équivalence des égalités $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et $f(x)x^2 = 1$.
D'où

$$(f(x)x^2)' = 0$$
$$f'(x)x^2 + 2xf(x) = 0$$

et donc

$$f'(x) = \frac{-2xf(x)}{x^2} = -\frac{2}{x^3}.$$

Etablissons encore deux autres formules de dérivation. La première formule est obtenue directement à partir de la définition :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{f(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{f(x+\Delta x)}-\frac{1}{f(x)}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(x+\Delta x)}{f(x+\Delta x)f(x)}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x+\Delta x)}{\Delta x}\frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)}\\ &= -f'(x)\frac{1}{\left(f(x)\right)^2}\end{aligned}$$

La seconde formule est obtenue à partir de la première et de la formule de la dérivée du produit :

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \left(g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{g\prime(x)f(x)-g(x)f\prime(x)}{\left(f(x)\right)^2}.$$

2.2 Formule de dérivation d'une fonction composée

Considérons deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ données par $y = f(x)$ et $z = g(y)$. La fonction donnée par $z = g\big(f(x)\big)$ est la composée de f suivie de g.

Calculons la dérivée de cette composée à l'aide des dérivées de f et de g :

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \quad (1)$$

Autrement dit, $(g(f(x)))' = g'(y)f'(x) = g'\big(f(x)\big)f'(x)$.

Les calculs faits en (1) nous éclairent sur le fait que dans la formule $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, et $\frac{dy}{dx}$ se comportent comme des quotients bien qu'ils ne le soient pas. C'est parce que nous pouvons toujours revenir aux quotients des différences et utiliser les propriétés des quotients avant de passer à la limite.

2.3 Formule de dérivation de la réciproque d'une fonction donnée

Considérons une fonction définie sur $\mathbb{R}$ notée par $y = f(x)$. Supposons que cette fonction admette la réciproque notée par $x = f^{-1}(\square)$. Calculons sa dérivée en fonction de la dérivée de f.

$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$. Autrement dit, $\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$. `

Pareillement au cas de la dérivation d'une fonction composée, dans la formule $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}}$, $\frac{dx}{dy}$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ se comportent comme des quotients pour les mêmes raisons que dans 2.3 sans que ni l'un ni l'autre le soient.

3. Applications de la dérivée aux problèmes d'optimisation

Premier exemple

Un carré en carton mesure de 18 cm de côté. En découpant à chaque coin un même petit carré, nous obtenons le patron d'une boite sans couvercle.
Si nous découpons des carrées de 1cm, 2 cm ou de 8 cm, de côté, les boites auront-elles le même volume ?
Quels carrés faut-il découper pour que la boite ait le plus grand volume ?
Même question pour un carton de côté "a" cm.

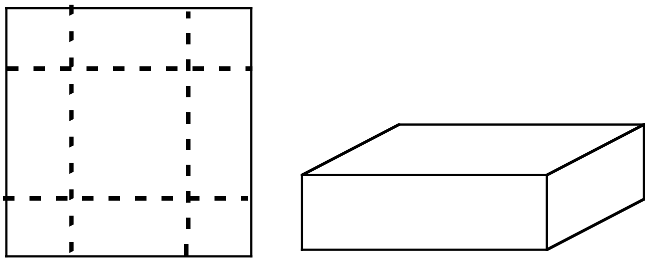


Fig.17 - Une boite de carton

Les différentes boites auront-elles le même volume ? Difficile à dire car si les carrés découpés sont de plus en plus grands, l'aire de la base diminue et la hauteur augmente.

On peut calculer les volumes de quelques boites. Par exemple, pour le côté de 1cm, la boite construite aura le volume de 286 cm³ ; pour le côté de 2 cm, le volume de 512 cm3 ; pour le côté de 8 cm le volume de 800 cm3. Ainsi, les élèves peuvent tirer la première conclusion que : le volume de la boite dépend de la mesure du petit carré.

Prenons soin de garder la structure de calcul de ces quelques volumes. Cela facilitera la mise en place de la formule générale exprimant le volume de la boite en fonction de la mesure quelconque x du petit carré :

Si $x = 1$, $V = (18 - 2)(18 - 2) \cdot 1 = 256.$
Si $x = 2$, $V = (18 - 4)(18 - 4) \cdot 2 = 392$
Si $x = 8$, $V = (18 - 16)(18 - 16) \cdot 8 = 32$

Ainsi, pour la valeur quelconque de x,

$$V(x) = (18 - 2x)^2 \cdot x$$
$$= 4(x^3 - 18x^2 + 81x).$$

Il s'agit d'une fonction du troisième degré en x.

Comme le volume de la boite peut être calculé pour des valeurs de x positives et ne dépassant pas 9 cm, nous établissons le domaine de validité de cette fonction : $0 \leq x \leq 9$.

Représentons l'allure générale du graphique de cette fonction. Pour cela, remarquons que :

- la fonction s'annule en $x = 0$ et en $x = 9$,
- le signe de la fonction est le même que celui de x car dans la formule $(18 - 2x)^2 \cdot x = 4(9 - x)^2 \cdot x$, le facteur $4(9 - x)^2$ est non négatif.
- le coefficient de x^3 est 4,
- la courbe a deux sommets : le premier correspond au maximum local et le second au minimum local.

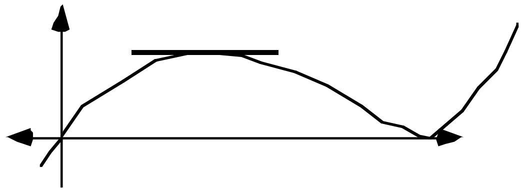


Fig. 18 - Allure générale de la fonction $V(x) = (18 - 2x)^2 \cdot x$

Une technique pour trouver les coordonnées du premier sommet consiste à calculer la dérivée de la fonction $V(x)$:

$$V'(x) = 4(3x^2 - 36x + 81).$$

La pente de la tangente au sommet est nulle d'où on obtient la condition suivante :

$$4(3x^2 - 36x + 81) = 0.$$

Pour trouver la valeur de x correspondant au sommet, il faut considérer cette condition comme équation en x. Il s'agit d'une équation du second degré dont les solutions sont 3 et 9. La première solution est l'abscisse du sommet correspondant au maximum local et la seconde solution est l'abscisse du sommet correspondant au minimum local. Nous obtenons ainsi la réponse selon laquelle la valeur maximale du volume de la boite est obtenue lorsqu'on découpe les petits carrés dont le côté mesure 3 cm. La dimension du carré découpé de 3 cm trouvée comme solution du problème fait 1/6 du côté du carré.

Le rapport entre le côté du carré et le côté du carré découpé reste-t-il le même pour n'importe quelle dimension de la feuille carrée de départ ?

Pour y répondre, il faut travailler avec la classe paramétrée de fonctions

$$V(x) = (a - 2x)^2 \cdot x,$$

ce qui permet de généraliser le résultat à $x = \frac{a}{6}$.

Deuxième exemple

Considérez tous les rectangles dont l'aire vaut 1 dm² et représentez quelques rectangles différents satisfaisant à cette condition. Sont-ils tous de même périmètre ?

Si non, parmi tous ces rectangles d'aire d'1 dm², quel est celui dont le périmètre est le plus petit possible ?

Etant donné que le produit de deux côtés est égal à 1, si le premier côté est noté par x $(x > 0)$, le deuxième côté est sera égal à $\frac{1}{x}$.

Ainsi, le périmètre, noté y, peut être exprimé en fonction de x par :

$$y = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Pour déterminer le minimum de cette fonction, calculons $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

qui s'annule pour $x = 1$. Il s'agit donc d'un carré de côté 1 dm.

4. Classe de problèmes d'optimisation

Pour chaque problème de cette classe, nous pouvons décider de fournir une figure ou non, utiliser les données numériques ou des lettres.

Géométrie dans l'espace-périmètre constant, fonction du troisième degré, variable indépendante non-univoque

- En faisant tourner un rectangle de périmètre p donné autour d'un de ses côtés, on engendre un cylindre circulaire droit. Quel est le rectangle qui engendre le cylindre de plus grand volume ?

Géométrie de l'espace : aire constante, fonction du troisième degré, variable indépendante non univoque

- On veut fabriquer, dans du carton, une boite à base carrée, sans couvercle, en forme du parallélépipède droit. L'aire totale (5 faces) vaut 48 cm2. Son volume est-il constant ? Si oui, pourquoi ? Sinon, quelles dimensions donner à la boite pour que son volume soit maximal ?

Géométrie dans l'espace-aire totale constante, fonction du troisième degré, variable indépendante non-univoque

- On veut fabriquer une casserole en aluminium embouti au moyen d'une feuille de métal d'aire égale à 100 cm².
- Déterminez la hauteur et le rayon de la casserole pour que son volume soit maximal. On suppose qu'il n'y a aucun déchet de métal, que l'épaisseur reste constante et qu'il n'y a pas de couvercle.
- Déterminez le rapport de la hauteur et du rayon pour que le volume soit maximal pour l'aire donnée A.

Géométrie dans l'espace-cylindres inscrits dans un cône, fonction du troisième degré, variable indépendante non-univoque

- Soit un cône droit de 12 cm de haut et dont le rayon de la base mesure 4 cm. Parmi tous les cylindres circulaires droits inscrits à ce cône et dont les axes coïncident, trouvez celui dont le volume est maximum.

Géométrie plane-surface constante, fonction rationnelle second degré sur le premier degré, variable indépendante univoque

- Une coopérative d'habitations possède un vaste terrain qu'elle désire subdiviser en lots afin d'y construire des maisons unifamiliales. Chaque lot devra avoir une surface de 800 mètres carrés et posséder des dimensions telles que la clôture qui l'entoure (il est inutile de clôturer le côté donnant sur la rue) soit de longueur minimale. Quelles devraient être les dimensions du lot répondant à ces deux exigences ?

Géométrie plane-surface constante, fonction rationnelle second degré sur le premier degré, variable indépendante non-univoque

- Un fermier veut clôturer une surface rectangulaire de S ares. Quelles sont les dimensions du champ qui exigera le moins de mètres de clôtures ?

Géométrie dans l'espace-volume constant, fonction rationnelle seconde degré sur le premier degré, variable indépendante non-univoque

- Une personne partant à l'étranger décide de construire un contenant en bois pour y ranger ses effets personnels pour le transport. Ce contenant d'un volume de 10 m aura la forme d'une boite à fond rectangulaire d'une hauteur de 1,4 m. Quelles seront les autres dimensions du contenant si la personne veut utiliser le moins de bois possible ?

Géométrie plane-aire constante, fonction rationnelle second degré sur le premier degré, variable indépendante non-univoque

- Un carton publicitaire doit contenir 54 cm² d'impression. Si les marges sont de 1 cm pour le haut et le bas et de 1,5 cm pour les côtés, trouvez les dimensions les plus économiques du carton.

Fonction rationnelle (premier degré sur second degré), variable indépendante univoque

- Des voitures traversent un pont de 1500 m de long. Chaque voiture mesure 4 m de long et est contrainte de se tenir à une distance minimale d de la voiture qui la précède

  Montrez que le plus grand nombre de voitures qui puisse se trouver ensemble sur le pont est $E\left(\frac{1500}{4+d}\right)$où E(x) est la partie entière de x.

  Si chaque voiture roule à la vitesse v km/h, montrez que l'intensité du trafic en voitures par heure est donnée par

$$F = E\left(\frac{1500v}{4+d}\right).$$

On estime à environ 0,005v2 m la distance nécessaire à une voiture qui roule à la vitesse v km/h pour s'arrêter. Si $d = 0{,}005v^2$, quelle est la vitesse qui favorise au mieux l'écoulement du trafic ?

Géométrie plane-théorème de Pythagore, fonction irrationnelle racine carrée du deuxième degré, variable indépendante univoque

- Deux rues se coupent à angle droit en un point P. L'une a la direction nord-sud, l'autre la direction est-ouest. Une voiture venant de l'ouest passe en P à 10 h à la vitesse constante de 20 km/h. Au même instant, une autre voiture, située à 2 km au nord du croisement, se dirige vers le sud à 50 km/h.
  A quel moment ces deux voitures sont-elles les plus proches l'une de l'autre et quelle est cette distance minimale ?
- Un voilier navigue plein ouest à 4 miles/h. Un autre voilier navigue plein sud à 3 miles /h. Au moment t = 0, le voilier qui navigue vers l'ouest se trouve à 1 miles à l'est de l'autre.
  Existe-t-il un instant t où la distance entre deux voiliers soit minimale? Pourquoi?

Géométrie plane-théorème de Pythagore, fonction somme de l'irrationnelle racine carrée du deuxième degré et du premier degré, variable indépendante non univoque

- Le passager d'une barque située à 2 km du point le plus proche de la rive désire atteindre le plus rapidement possible la maison située au bord de l'eau à 6 km en aval.
  Etant donné que cette personne se déplace à 3 km/h à la rame et à 5 km/h à pied, en quel point de la rive doit-il accoster pour arriver au plus vite ?

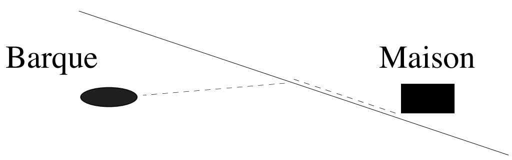


Fig. 19 - Passage par une rivière représentée par le segment de droite

Géométrie plane : théorème de Pythagore ; fonction somme de deux irrationnelles racine carrée du deuxième degré, variable indépendante non univoque, avec le calcul de la dérivée

- Deux municipalités A et B, décident de construire conjointement une usine d'épuration des eaux usées en bordure d'une rivière. Des égouts collecteurs relient chaque ville l'usine.
  A quel endroit faut-il construire l'usine pour que la somme des distances de l'usine à ces deux villes soit minimale ?

Géométrie plane : théorème de Pythagore, équation d'un cercle centré à l'origine ; fonction produit d'une fonction linéaire et d'une fonction irrationnelle racine carrée du deuxième degré, variable indépendante non univoque, avec calcul de la dérivée

- Calculez l'aire du plus grand rectangle qui puisse être inscrit dans un demi-cercle de rayon r.

Géométrie plane : théorème de Pythagore ; fonction du troisième degré, variable indépendante non univoque, avec calcul de la dérivée

- La résistance d'une poutre de section rectangulaire est directement proportionnelle au produit de la largeur par le carré de la hauteur d'une section transversale.
  Quelle est la poutre la plus résistante que l'on puisse tailler dans un rondin cylindrique de rayon a ?

Proportionnalité des grandeurs, second degré sur quatrième degré, variable indépendante univoque

- Lorsqu'un objet est éclairé par un projecteur, son illumination est directement proportionnelle à l'intensité de la source lumineuse, mais inversement proportionnelle au carré de la distance à laquelle il se trouve du projecteur. Imaginons que deux projecteurs, l'un trois fois plus puissant que l'autre, se trouve à 3 m l'un de l'autre. Où se trouve le point le moins éclairé sur le segment qui joint les positions des deux projecteurs ?

Géométrie plane : triangles semblables, fonctions trigonométriques, variable indépendante non univoque

- Un panneau publicitaire de 6 m de haut est placé sur le toit d'un immeuble et son bord inférieur est ainsi 18 m plus haut que les yeux d'un observateur.
  A quelle distance doit se mettre cet observateur juste en-dessous de l'enseigne pour que son angle de vue entre le bord inférieur et le bord supérieur de l'enseigne soit le plus grand possible ?
- Une palissade de 2,7 m de haut longe le mur d'un haut immeuble à une distance de 0,1 m. Quelle longueur doit avoir au minimum une échelle pour qu'elle puisse reposer sur le mur par-dessus la palissade ? (Suggestion : Faire usage des triangles semblables)

5. Applications de la dérivée aux problèmes de vitesses liées

Premier exemple

Un filtre conique contient de l'eau qui s'écoule goutte-à-goutte dans une cafetière. Appelons x le niveau de l'eau dans le filtre et y le niveau de l'eau dans la cafetière. Si le filtre contient 160 cm3 d'eau, établissez la relation entre la vitesse avec laquelle l'eau descend dans le filtre et la vitesse avec laquelle l'eau monte dans la cafetière.

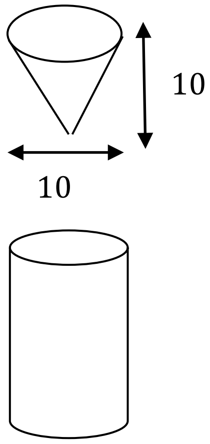


Fig.20 - Un filtre à café et une cafetière

Notons par $V(t)$ le volume d'eau qui est descendue dans le filtre ou ce qui revient au même l'eau qui est montée dans la cafetière.

La forme du cône peut être caractérisée ainsi : pour n'importe quelle valeur de la hauteur x de l'eau, le rayon est égal à la moitié de la hauteur. D'où, nous avons

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 x = \frac{1}{3}\pi\frac{x^3}{4} = \frac{1}{12}\pi x^3.$$

Etant donné que x est une fonction du temps, nous établissons ainsi le lien entre le volume d'eau et la hauteur de l'eau dans le filtre :

$$160 - V(t) = \frac{1}{12}\pi x^3(t) \qquad (1)$$

D'autre part, la forme du cylindre implique que, pour une hauteur y donnée, le volume correspondant V est égal à $V = 25\pi y$. Comme y dépend de temps, nous établissons alors le lien entre le volume d'eau et la hauteur de l'eau dans le cylindre :

$$V(t) = 25\pi y(t) \qquad (2)$$

De (1) et de (2), on obtient nous obtenons le lien entre deux hauteurs :

$$160 - 25\pi y(t) = \frac{1}{12}\pi x^3(t).$$

La dérivée de $160 - 25\pi y(t)$ et la dérivée de $\frac{1}{12}\pi x^3(t)$ sont les mêmes :

$$-25\pi y'(t) = \frac{1}{12}\pi\left(x^3(t)\right)'$$
$$-25\pi y'(t) = \frac{1}{12}\pi x^2(t)x'(t)$$

D'où,

$$y'(t) = -\frac{x^2(t)x\prime(t)}{300}.$$

Le signe opposé des deux vitesses correspond au fait que dans le filtre, l'eau descend et dans la cafetière, l'eau monte.

Deuxième exemple

En physique, on peut supposer raisonnablement que la vitesse d'évaporation d'un liquide est proportionnelle à la surface du liquide.

Montrez que, lorsque le liquide s'évapore dans un récipient, la vitesse avec laquelle la hauteur diminue est constante.

La surface et le volume du liquide dépendent de la hauteur de celui-ci. Or, la hauteur dépend du temps d'évaporation. Ainsi, les deux fonctions $S(h)$ et $V(h)$, de surface et de volume sont aussi les fonctions composées de la variable "temps " :

$$S\big(h(t)\big) \text{ et } V\big(h(t)\big).$$

La vitesse avec laquelle la hauteur du liquide descend est la dérivée de h(t) : $\frac{dh(t)}{dt}$.

La vitesse d'évaporation d'un liquide contenu dans un récipient de forme quelconque est la dérivée du volume en fonction du temps : $\frac{dV(t)}{dt}$. Selon l'hypothèse de l'évaporation du liquide, cette vitesse est proportionnelle à la surface du liquide au moment t :

$$\frac{dV\big(h(t)\big)}{dt} = kS\big(h(t)\big).$$

Selon la règle de la dérivation d'une fonction composée, on a $\frac{dV(h(t))}{dt} = \frac{dV(h)}{dh}\frac{dh(t)}{dt}$.

De ces deux égalités, il résulte l'égalité suivante :

$$\frac{dV(h)}{dh}\frac{dh(t)}{dt} = kS\big(h(t)\big).$$

Or, la dérivée $\frac{dV(h)}{dh}$ a une interprétation particulière : c'est l'aire de la surface du liquide à la hauteur h. En effet, $\frac{dV(h)}{dh} = \lim_{\Delta h\to 0}\frac{V(h+\Delta h)-V(h)}{\Delta h}$. Or, $V(h+\Delta h) - V(h)$ peut être interprété comme le volume d'une tranche cylindrique d'épaisseur Δh et de base S(h). Ce volume divisé par l'épaisseur donne l'aire de la base S(h). Ainsi, $\frac{dV(h)}{dh}\frac{dh(t)}{dt} = kS\big(h(t)\big)$ devient

$$S\big(h(t)\big)\frac{dh(t)}{dt} = kS\big(h(t)\big).$$

D'où le résultat recherché $\frac{dh(t)}{dt} = k$ qui exprime le fait que la vitesse avec laquelle la hauteur diminue est constante.

6. Classe des problèmes de vitesses liées

Dérivées des fonctions du premier degré

- Un réverbère mesure 4,5 m et un passant de 1,80 m s'en éloigne (en ligne droite) à la vitesse de 5 km/h. A quelle vitesse le point de son ombre se déplace-t-il ? (Le lien entre deux grandeurs est établi à l'aide des rapports égaux dans des triangles semblables).
- La hauteur d'un triangle s'allonge de 1cm/min tandis que l'aire augmente de 2cm2/min. A quelle vitesse varie la longueur de la base ? Cette vitesse est-elle constante ? Sinon, comment évolue-t-elle avec le temps ? (Le lien entre deux grandeurs est établi à l'aide de la formule d'aire d'un triangle).

Dérivées des fonctions du deuxième degré

- Un feu s'est déclaré dans un champ desséché et se propage sur une étendue circulaire. Le rayon du cercle croît à la vitesse de 2 m/s. A quelle vitesse augmente la superficie enflammée ? (Le lien entre deux grandeurs est établi à l'aide de la formule d'aire d'un cercle).
- Une plaque métallique ronde est chauffée et se dilate. Son diamètre varie à raison de 0,01 cm/min. A quelle vitesse varie l'aire d'une face au moment où le diamètre mesure 30 cm ? (Le lien entre deux grandeurs est établi à l'aide de la formule d'aire d'un cercle).

Dérivées des fonctions du troisième degré

- L'arête d'un cube augment avec la vitesse constante de 2cm/s. Avec quelle vitesse augmente son volume ?(Le lien entre deux grandeurs est établi à l'aide de la formule de volume d'un cube).
- Un réservoir d'eau a la forme d'un cône circulaire droit renversé haut de 4 m et dont le rayon de base mesure 4 m. Son remplissage se fait de cette manière à ce que le niveau d'eau monte à la vitesse constante de a) 1m/min b) de 2m/min. A quelle vitesse augmente le volume d'eau ? Peut-on affirmer que si la vitesse avec laquelle le niveau de l'eau monte double, alors la vitesse avec laquelle le volume augmente double aussi ? (Le lien entre deux grandeurs est établi à l'aide de la formule de volume d'un cône).
- Lorsque du sable s'échappe par un trou, il forme un tas de forme conique dont la hauteur est toujours égale au rayon de la base. Si la hauteur du tas augmente à la vitesse de 15 cm/min, cherchez la vitesse à laquelle le sable est en train de s'échapper. (Le lien entre deux grandeurs est établi à l'aide de la formule de volume d'un cône).

Dérivées des fonctions rationnelles

- Un rectangle de côté variable a une aire égale de 50 cm2. L'un de ses côtés augmente avec la vitesse de 3 cm/sec. Comment varie le deuxième côté ? Est-elle constante ? Sinon, comment évolue-t-elle avec le temps ? Comment évolue la vitesse de variation du périmètre ?
- (Le lien entre deux grandeurs est établi à l'aide de la formule d'aire d'un cercle).
  Un réservoir rectangulaire a 8 m de long, 2 m de large et 4 m de profondeur. Si de l'eau coule à la vitesse de 2 m3/min, à quelle vitesse la surface liquide s'élève-t-elle ?
  (Le lien entre deux grandeurs est établi à l'aide de la formule du volume d'un parallélépipède).

Dérivées des fonctions irrationnelles $y = \sqrt{x}$

- Une tache circulaire de pétrole qui s'échappe d'un puits dans la mer du Nord, s'agrandit avec le débit constant de 360 000 m3/h. Quelle est la vitesse de sa propagation ?
  (Le lien entre deux grandeurs est établi à l'aide de la formule de l'aire d'un cercle).

Dérivées des fonctions irrationnelles $y = \sqrt{at^2 + bt + c}$

- Une échelle de 6 m est appuyée contre un mur vertical. Si le pied de l'échelle glisse sur le sol et s'écarte du mur à une vitesse de 60 cm/s, à quelle vitesse le haut de l'échelle glisse-t-il le long du mur ?
  (Le lien entre deux grandeurs est établi à l'aide du théorème de Pythagore).
- A midi, un bateau A est à 150 km à l'ouest d'un bateau B. Le bateau A navigue vers l'est à la vitesse de 35 km/h tandis que le bateau B vogue vers le nord à la vitesse de 25 km/h. A quelle vitesse varie la distance entre les deux bateaux ?
  (Le lien entre deux grandeurs est établi à l'aide du théorème de Pythagore).

Dérivées des fonctions irrationnelles $y = k\sqrt[3]{t}$

- Du gravier est déversé d'un tapis roulant à raison de 1 m3/min et s'entasse en formant un cône dont le diamètre de base est toujours égal à la hauteur. A quelle vitesse croît la hauteur ? Est-elle constante ? Sinon, comment évolue-t-elle avec le temps ?
  (Le lien entre deux grandeurs est établi à l'aide du volume d'un cône).

- Un réservoir de forme conique est destiné à contenir de l'eau. Le disque supérieur mesure 2m de rayon et la hauteur 4 m. S'il est rempli avec une pompe qui débite 2m3/min, à quelle vitesse monte le niveau de l'eau ?
(Le lien entre deux grandeurs est établi à l'aide du volume d'un cône).

6.1 Questions d'évaluation

Evaluer les savoirs et les procédures mathématiques, leur portée et leur justification

- Expliquer sur l'exemple d'une fonction simple de 2d degré comment on détermine le point de contact d'une tangente de pente donnée par deux méthodes : infinitésimale (on barre les termes en Δx) et algébrique (on résout le système d'équation). Est-il possible d'utiliser les deux méthodes dans le cas d'une fonction du 3ème degré ? Pourquoi ?
- Pour quelles raisons doit-on accepter qu'une tangente puisse traverser la courbe et avoir plus d'un point commun avec la courbe ?
- Illustrez votre réponse à l'aide d'une fonction du 3ème degré et d'une tangente de pente choisie par vous.
- Considérez une fonction du type $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Que devient la courbe représentative de cette fonction lorsqu'on fait le « zoom-in » plusieurs fois centré au point $(0; d)$? Comment expliquez-vous ce phénomène ? Quelle est sa tangente en $(0; d)$?
- Expliquez sur l'exemple d'une fonction donnée par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pourquoi la droite $y = cx + d$ est tangente à sa courbe représentative en $(0; d)$ et pourquoi la fonction donnée par $f(x) = cx + d$ est une bonne approximation en $(0; d)$ d'une fonction du type $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
- Sur l'exemple d'une fonction donnée par $f(x) = ax^3 + cx + d$, expliquez le lien entre la tangente qui traverse la courbe et la recherche de l'extremum de la dérivée $f'(x)$.
- Pour quelles raisons la vitesse instantanée est-elle la dérivée de la fonction de l'espace ?
- Par quels calculs détermine-t-on l'extremum local d'une fonction ? Pourquoi ?
- Etablissez les dérivées des fonctions élémentaires. (Fonctions polynomiales, rationnelles, …)
- Etablissez les règles du calcul des dérivées (somme, produit, quotient, …)

Appliquer une procédure mathématique pour résoudre un problème clairement identifié

- Dessinez l'allure générale du graphique représentant la fonction donnée par $y = x^3 - x$, par la technique de la « somme » des graphiques de $y = x^3$ et de $y = -x$.
- Calculez l'équation de la tangente en $x = 0$ à la courbe représentative de la fonction $y = x^3 - x$.
- Quelle est la position de cette tangente par rapport à la courbe $y = x^3 - x$? Pourquoi ?
- Déterminez, par calculs, le point d'inflexion d'une fonction du type $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Est-il indispensable de calculer la dérivée seconde ? Pourquoi ?
- Dans le cas d'une fonction du type $y = ax^3 + cx + d$, déterminez graphiquement si elle admet des extremums. Si oui, calculez-les.
- Dessiner l'allure générale du graphique de la fonction$y = -x^3 + 3x^2 + 1$ (Indications : étudiez le signe de $-x^3 + 3x^2$, esquissez $y = -x^3 + 3x^2$, et de là esquissez $y = -x^3 + 3x^2 + 1$). Admet-elle un extremum ? Si oui, calculer la valeur de x qui correspond à cet extremum.
- On donne un certain nombre de graphiques. A chacun d'eux, associez le graphique de sa dérivée si un tel graphique se trouve parmi les graphiques donnés.
- Un problème d'optimisation : considérons un carré en carton de 18 cm de côté. En découpant à chaque coin un même petit carré, vous obtenez le patron d'une boite sans couvercle.
- Si vous découpez des carrés de 1cm, 2 cm ou de 8 cm de côté, les boites auront-elles le même volume ? Quels carrés faut-il découper pour que la boite ait le plus grand volume ?
- Un autre problème d'optimisation : On veut fabriquer, dans du carton, une boite à base carrée, sans couvercle, en forme du parallélépipède droit. L'aire totale (5 faces) vaut 48 cm2. Son volume est-il

constant ? Si oui, pourquoi ? Sinon, quelles dimensions donner à la boite pour que son volume soit maximal ?

- Encore un autre problème d'optimisation : On veut fabriquer une casserole en aluminium à l'aide d'une feuille de métal d'aire égale à 100 cm^2. Déterminez la hauteur et le rayon de la casserole pour que son volume soit maximal. Supposons qu'il n'y ait aucun déchet de métal, que l'épaisseur reste constante et qu'il n'y ait pas de couvercle. Déterminez alors le rapport de la hauteur et du rayon pour que le volume soit maximal pour l'aire donnée A.
- Résoudre un problème : choisir et mener à terme une procédure mathématique pour résoudre un problème non identifié a priori mais faisant partie d'une des classes déjà étudiées dans le cursus scolaire.
- On dispose d'un carré en carton de a cm de côté. En découpant à chaque coin un même petit carré, on obtient le patron d'une boite sans couvercle. Quels carrés faut-il découper pour que la boite ait le plus grand volume ?
- En faisant tourner un rectangle de périmètre p donné autour d'un de ses côtés, on engendre un cylindre circulaire droit. Quel est le rectangle qui engendre le cylindre de plus grand volume ?
- Quelles conditions faut-il mettre sur les paramètres a, c et d, pour qu'une fonction du type $y = ax^3 + cx + d$ admette un extremum ? Pourquoi ?

- Quelles conditions faut-il mettre sur les paramètres a, b, c et d, pour qu'une fonction du type $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ admette un extremum ? Pourquoi ?
- On donne deux graphiques liés à une même fonction f (fig.21), celui de f'' et de f. Déduisez-en le graphique de f'.

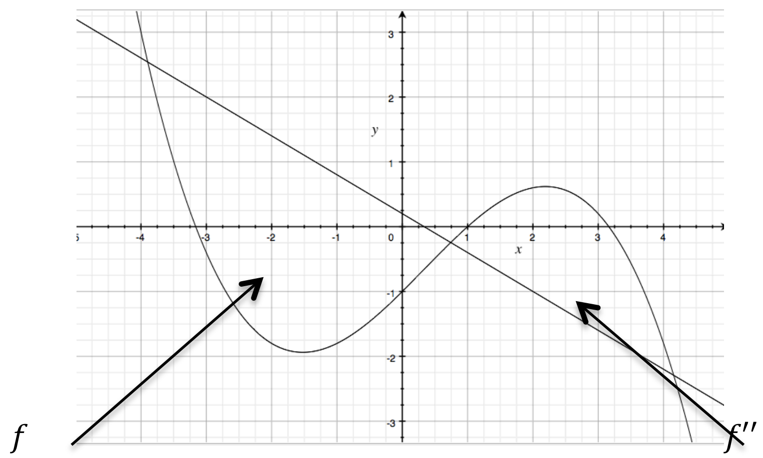


Fig.21 - Graphiques de f *et de* f''

Bibliographie

SCHNEIDER M., BALHAN K., GERARD I., HENROTAY P., avec la participation de GANTOIS J.-Y. (sous presse). Du calcul infinitésimal à l'analyse mathématique. Presse Universitaire de Liège

SCHNEIDER M., (1991). Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente. Repères IREM, n°5, pp. 65-81.

BALHAN K., KRYSINSKA M., SCHNEIDER M. (2015) Quelle définition du concept de tangente ? Repère IREM, n°101

s