

Exploiter le pliage pour démontrer au milieu du secondaire

Patricia Wantiez et Laure Ninove

Mots clés : Pliage, origami, géométrie, manipulation, construction, démonstration

Résumé : *Nous avons vu dans la première partie de cet article [19] que, dès l'école primaire et le début du secondaire, différentes activités de pliages mènent à travailler l'argumentation et la justification en géométrie, mais aussi des compétences plus transversales comme la communication, le travail d'équipe ou la confrontation des découvertes. Dans cette seconde partie, nous nous penchons sur les pliages dans le cadre de l'apprentissage de la démonstration en troisième secondaire.*

Nous l'avons vu dans la première partie, les pliages font naturellement intervenir des bissectrices ou médiatrices, des figures superposables (et donc isométriques), des angles droits (et donc des triangles rectangles), etc., toutes des notions géométriques exploitables dans le cadre de l'apprentissage des démonstrations.

Le support du pliage, outre son côté ludique et motivant, a l'avantage de permettre parfois une visualisation plus aisée des propriétés considérées. Dans le cas de deux triangles isométriques, par exemple, nous pouvons souvent vérifier expérimentalement l'isométrie en pliant un triangle sur l'autre pour concrétiser cette superposition. En troisième secondaire, le passage à l'argumentation, à la preuve, sera nécessaire pour se convaincre de l'exactitude de la constatation, de la même manière qu'avec des constructions à l'aide des instruments classiques, on ne se satisfait pas d'une vérification réduite à des mesures de côtés ou d'angles.

Un autre aspect intéressant du pliage pour l'enseignant est que, face à un nouveau problème de pliage, il se trouve bien souvent lui-même dans une position de découverte semblable à celle de ses élèves. En effet, dans le cadre de problèmes plus classiques, il nous est parfois difficile de nous mettre dans la tête d'un élève en début d'apprentissage, tant nous sommes familiers des constructions règles et compas et des démonstrations liées à celles-ci.

Nous vous proposons ici quelques exemples de « pliages pour démontrer ». Nous invitons le lecteur intéressé à consulter notamment les ouvrages

de HAGA [7], HULL [8], MONTROLL [12] et MAEKAWA [10], l'article [13] paru dans cette revue ainsi que le site web de José GIOÉ [6], pour découvrir d'autres idées à exploiter en troisième secondaire.

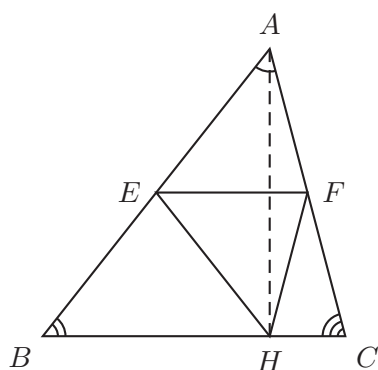
1. Somme des amplitudes des angles intérieurs à un triangle

Nous avons vu dans le premier volet [19] comment constater par pliage que la somme des amplitudes des angles intérieurs à un triangle vaut 180° . En troisième secondaire, ce pliage peut être repris pour *démontrer* cette propriété. Nous proposons ici une preuve basée principalement sur les angles déterminés par deux droites parallèles coupées par une sécante.

1.1. Énoncé

Soit ABC un triangle quelconque tel que la hauteur issue de A est intérieure au triangle. Plier pour obtenir cette hauteur $[AH]$. Plier pour amener A en H et nommer $[EF]$ ce pli, avec $E \in [AB]$ et $F \in [AC]$.

Démontrer que $|\widehat{BAC}| + |\widehat{ACB}| + |\widehat{CBA}| = |\widehat{EHF}| + |\widehat{FHC}| + |\widehat{EHB}| = 180^\circ$.



1.2. Preuve

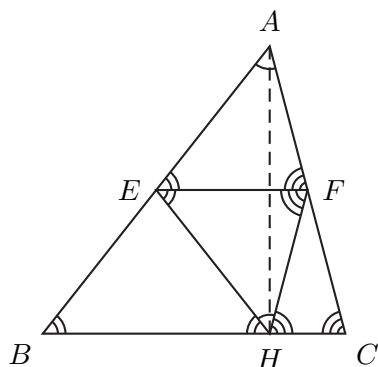
Par construction, les triangles AFE et HFE se superposent par pliage. Donc $|\widehat{EAF}| = |\widehat{EHF}|$, $|\widehat{AFE}| = |\widehat{HFE}|$ et $|\widehat{AEF}| = |\widehat{HEF}|$.

Montrons d'abord que le pli $[EF]$ est parallèle au côté $[BC]$ du triangle. Un pli amenant l'une sur l'autre les deux extrémités d'un segment est toujours perpendiculaire à ce segment. Dès lors, le pli $[EF]$ est perpendiculaire à la hauteur $[AH]$. La hauteur $[AH]$ étant perpendiculaire au côté $[BC]$, on en déduit que $[EF]$ est parallèle à $[BC]$.

Puisque $[EF]$ est parallèle à $[BC]$, les angles correspondants \widehat{AFE} et \widehat{ACB} ont même amplitude. Par ailleurs, les angles alternes-internes \widehat{HFE} et \widehat{FHC} ont même amplitude. Or $|\widehat{AFE}| = |\widehat{HFE}|$ donc, par transitivité, $|\widehat{FHC}| = |\widehat{ACB}|$.

Par le même argument, on montre que $|\widehat{EHB}| = |\widehat{ABC}|$.

Finalement, on obtient $|\widehat{BAC}| + |\widehat{ACB}| + |\widehat{CBA}| = |\widehat{EHF}| + |\widehat{FHC}| + |\widehat{EHB}| = 180^\circ$, puisque B, H et C sont alignés.



1.3. Lien avec le pliage pour constater la propriété

Nous avons montré du même coup que les triangles HFC et HEB sont isocèles. Cela a comme conséquence que, dans le triangle HFC , le pli qui amène C en H est la hauteur issue de F et que ce pli superpose donc $[FC]$ à $[FH]$. De même pour le triangle HEB : le pli qui amène B en H superpose également $[EB]$ à $[EH]$.

2. Étude mathématique d'un pliage figuratif classique

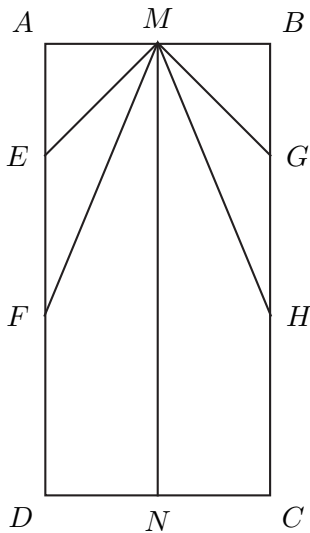
Dans la première partie, nous évoquions la possibilité d'utiliser des pliages figuratifs et ludiques pour travailler le vocabulaire géométrique à l'école primaire. Dans le même ordre d'idée, nous proposons ici de partir du pliage classique de l'avion pour observer puis démontrer des propriétés géométriques.

2.1. Énoncé

Soit une feuille rectangulaire $ABCD$, avec $|AB| < |BC|$. Pour que la construction suivante soit possible, il faut que le côté $[BC]$ soit suffisamment long par rapport à $[AB]$, cela fonctionne notamment avec une feuille A4.

Plier pour obtenir la médiane $[MN]$, avec M sur $[AB]$ et N sur $[DC]$. Plier pour amener $[AM]$ sur $[MN]$. Noter E le point d'intersection du pli avec $[AD]$. Plier pour amener $[ME]$ sur $[MN]$ et noter F le point d'intersection du pli avec $[AD]$. Faire la même chose de manière symétrique par rapport à la médiane $[MN]$ pour obtenir les points G et H sur $[BC]$. On peut compléter le pliage pour former l'avion.

Rechercher les triangles isocèles présents dans la figure obtenue après dépliage.



On peut espérer que les triangles rectangles isocèles AME et BMG soient assez facilement identifiés. Il faudra probablement aiguiller les élèves pour qu'ils trouvent deux autres triangles isocèles présents dans le pliage : EMF et GMH . Nous proposons deux preuves différentes de cette dernière constatation.

2.2. Preuve 1

Les angles \widehat{EMF} et \widehat{FMN} ont même amplitude par pliage, le pli $[MF]$ n'étant rien d'autre que la bissectrice de l'angle \widehat{EMN} . Par ailleurs, les angles \widehat{FMN} et \widehat{EFM} sont alternes-internes et déterminés par deux parallèles, ils ont donc même amplitude. Par transitivité, les deux angles \widehat{EFM} et \widehat{EMF} du triangle EFM ont même amplitude et donc ce triangle est isocèle.

2.3. Preuve 2

Cette seconde preuve repose sur la recherche d'amplitude d'angles dans la figure. Les angles \widehat{AME} et \widehat{EMN} mesurent 45° puisque le pli $[ME]$ n'est rien d'autre que la bissectrice de l'angle droit \widehat{AMN} . En particulier, le triangle AME est rectangle isocèle et donc l'angle \widehat{AEM} mesure également 45° . Donc l'angle \widehat{MEF} mesure 135° .

Par ailleurs, l'angle \widehat{EMF} mesure $22,5^\circ$ puisque le pli $[MF]$ est la bissectrice de l'angle \widehat{EMN} . Dans le triangle EMF , on a donc un angle de 135° , un angle de $22,5^\circ$ et par conséquent, le troisième mesure $22,5^\circ$. Le triangle est donc isocèle.

Nous avons mentionné que le rapport entre la longueur et la largeur de la feuille devait être suffisamment grand pour que ce pliage soit possible. Dans le cadre d'un cours de trigonométrie, on pourrait proposer aux élèves de déterminer les conditions que les dimensions de la feuille doivent respecter pour pouvoir réaliser le pliage.

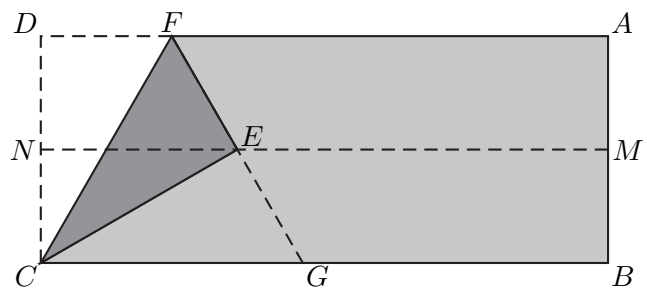
3. Construction d'un triangle équilatéral dans une bande

Le pliage suivant du triangle équilatéral est assez classique. Il est à la base d'une construction du tétraèdre régulier (voir par exemple [2, 3, 8]). Nous proposons ici deux preuves que le triangle obtenu est bien équilatéral : l'une basée principalement sur les symétries et les angles, l'autre sur les triangles isométriques et le théorème de Thalès.

3.1. Énoncé

Soit une bande rectangulaire $ABCD$ donnée. Plier selon la médiane $[MN]$ du rectangle $ABCD$, avec M sur $[AB]$ et N sur $[DC]$. Déplier après avoir marqué le pli. Faire un pli passant par C qui amène D sur $[MN]$. Marquer E le point correspondant à D sur $[MN]$ et F l'intersection entre le pli et le côté $[AD]$. Faire un pli passant par F et E et nommer G l'intersection de ce pli avec $[BC]$.

Démontrer que le triangle CFG est équilatéral.



3.2. Preuve 1

Montrons d'abord que $|\widehat{ECG}| = |\widehat{FCE}| = 30^\circ$. Par pliage, les segments $[EC]$ et $[DC]$ ont même longueur. Par ailleurs, la médiane $[MN]$ du rectangle $ABCD$ est la médiatrice de $[CD]$. Comme E appartient à cette médiatrice, $|EC| = |ED|$. Le triangle CDE est donc équilatéral. L'angle \widehat{DCE} mesure donc 60° et son complémentaire \widehat{ECG} mesure 30° .

Par pliage, les deux angles \widehat{ECF} et \widehat{DCF} ont même amplitude (ils sont images l'un de l'autre par symétrie d'axe CF). Donc $|\widehat{ECF}| = 30^\circ$. L'angle \widehat{FCG} mesure donc 60° .

Par pliage également, l'angle \widehat{FEC} est droit, (il est l'image de \widehat{FDC} par symétrie d'axe CF). Dès lors, puisque la somme des amplitudes des angles intérieurs au triangle CEF doit valoir 180° , on a $|\widehat{CFG}| = 60^\circ$.

Le triangle CFG possède donc deux angles de 60° . Son troisième angle \widehat{FCG} mesure donc également 60° . On en déduit que CFG est un triangle équilatéral.

3.3. Preuve 2

Remarquons d'abord que, par pliage, les triangles CDF et CEF sont isométriques (ils sont images l'un de l'autre par symétrie d'axe CF). On en déduit que le triangle CEF est rectangle en E .

Montrons à présent que le triangle CEG est isométrique à CEF . La médiane $[MN]$ étant parallèle aux côtés $[AD]$ et $[BC]$ du rectangle, le théorème de Thalès donne $\frac{|FE|}{|GE|} = \frac{|DN|}{|CN|}$. Comme $|DN| = |CN|$, on a $|FE| = |GE|$. Par ailleurs, puisque \widehat{CEF} est droit et que F, E et G sont alignés, l'angle \widehat{CEG} est droit également. Dès lors, les triangles CEG et CEF ont une paire d'angles homologues de même amplitude ($|\widehat{CEG}| = |\widehat{CEF}|$) compris entre deux paires de côtés homologues respectivement de même longueur ($|CE| = |CE|$ et $|GE| = |FE|$). Ils sont donc isométriques.

Les trois triangles CDF , CEF et CEG étant isométriques et l'angle \widehat{DCG} étant droit, on trouve $|\widehat{DCF}| = |\widehat{ECF}| = |\widehat{ECG}| = \frac{90^\circ}{3} = 30^\circ$. Les angles \widehat{EFC} et \widehat{EGC} étant respectivement complémentaires à \widehat{ECF} et \widehat{ECG} , ils mesurent donc tous deux 60° . Ses trois angles mesurant 60° , le triangle CFG est équilatéral.

4. Des triangles pythagoriciens

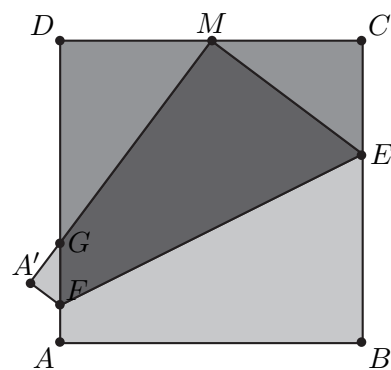
Le pliage que nous présentons ici est un « origamic »⁽¹⁾ dû à Kazuo HAGA [7]. Le pli intervenant dans cette activité est appelé le *pli du premier théorème de Haga*. Cette activité est propice à l'observation et à la formulation de conjectures, activité

importante du mathématicien. Un autre exemple d'origamic, permettant de nombreuses conjectures, a déjà été présenté dans cette revue [13].

4.1. Énoncé

Soit un carré $ABCD$. Plier pour marquer M le milieu de $[CD]$ puis déplier. Plier ensuite pour amener le point B sur M . Nommer $[EF]$ le pli, avec E sur $[BC]$ et F sur $[AD]$. Nommer G l'intersection de $[AD]$ et de l'image $[A'M]$ de $[AB]$ par la symétrie orthogonale correspondant au pli $[EF]$. Trois triangles rectangles ECM , MDG et $FA'G$ sont formés, le dernier étant visible en retournant le pliage ou en pliant selon GF .

Observer, conjecturer et démontrer. Déterminer les longueurs des côtés des trois triangles.



4.2. Des triangles semblables

On peut tout d'abord observer le pliage et conjecturer que les triangles rectangles MCE , GDM et $GA'F$ sont semblables. Cela se démontre aisément en recherchant des paires d'angles complémentaires et une paire d'angles correspondants.

4.3. Des triangles pythagoriciens

Déterminons maintenant les longueurs des côtés de ces trois triangles. On pourrait fixer la longueur du côté du carré $ABCD$ à 1. Nous verrons cependant que les relations s'écrivent plus aisément si on fixe celle-ci à 24.

Posons donc $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 24$ et déterminons les longueurs de côtés du triangle ECM . Puisque M est le milieu de $[CD]$, on a

⁽¹⁾ Le mot « origamic » a été inventé par Kazuo HAGA par la fusion de « origami » et « mathematic » [7].

$|MC| = 12$. Par pliage, $|ME| = |BE|$ (ces deux segments sont images l'un de l'autre par la symétrie d'axe EF). Donc $|ME| = |BE| = 24 - |CE|$. Par ailleurs, par le théorème de Pythagore, $|ME|^2 = |CE|^2 + |MC|^2 = |CE|^2 + 12^2$, puisque M est le milieu de $[CD]$. De ces deux équations, on tire $576 - 48|CE| = 144$. On trouve ainsi les mesures des trois côtés du triangle rectangle MCE : $|CE| = 9$, $|BE| = 15$ et $|MC| = 12$ et le triangle est donc pythagoricien.

Le triangle MDG étant semblable à ECM , et M étant milieu de $[CD]$, on obtient les longueurs de ses côtés : $|MD| = 12$, $|DG| = 16$ et $|MG| = 20$.

De même, $FA'G$ étant semblable aux deux triangles précédents et $|A'G| = 24 - |MG|$, les longueurs des côtés de $GA'F$ sont $|A'G| = 4$, $|A'F| = 3$ et $|GF| = 5$.

Les trois triangles formés par le pli du premier théorème de HAGA sont donc pythagoriciens.

4.4. Quelques prolongements possibles

Dans son ouvrage [7], HAGA propose plusieurs variantes de ce problème, comme par exemple en prenant le point M au quart ou aux trois quarts du segment $[CD]$, ou encore à une position quelconque de celui-ci. On obtient alors d'autres rapports remarquables entre les différentes longueurs déterminées par le pliage. HAGA s'intéresse également à ce type de pliage dans une feuille de format A4.

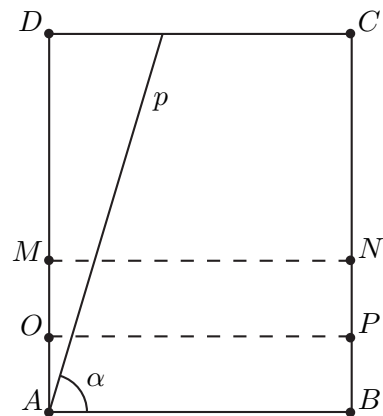
5. Partager un angle en trois

Déjà pendant l'antiquité, les mathématiciens grecs ont tenté de construire à la règle non graduée et au compas la trisection d'un angle quelconque, c'est-à-dire le partage de l'angle en trois angles de même amplitude. Ils n'y sont jamais parvenus, ni personne d'autre après eux. Et pour cause, au XIX^e siècle, il a été démontré que la trisection d'un angle quelconque à la règle non graduée et au compas était impossible, de même qu'un autre grand problème de l'antiquité, à savoir la duplication du cube (c'est-à-dire la construction d'un cube dont le volume vaut le double de celui d'un cube donné) [8, 9]. Ces deux constructions sont néanmoins possibles par origami ! Ci-dessous, nous allons voir comment partager un angle aigu quelconque en trois parties égales par origami. C'est un pliage classique, dont

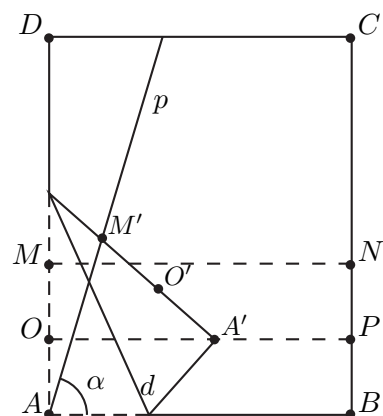
on trouve des preuves variées dans la littérature (voir par exemple [3, 8, 9, 17]). Nous verrons que la construction utilise le dernier pli de base de la section 2.3 de la première partie [19]. C'est d'ailleurs ce pli, qui n'a pas son égal à la règle et au compas, qui permet de faire la trisection d'un angle.

5.1. Énoncé

Soit un rectangle $ABCD$. Soit p un pli intérieur au rectangle, passant par A et formant un angle d'amplitude α avec le côté $[AB]$. Plier pour obtenir un segment $[MN]$ parallèle au côté $[AB]$ (c'est-à-dire une perpendiculaire au côté $[AD]$) puis déplier. Plier pour marquer la médiane $[OP]$ du rectangle $ABNM$, parallèle à $[AB]$, puis déplier.



Faire ensuite un pli, nommé d , qui amène *simultanément* le point M sur le pli p et le point A sur OP .

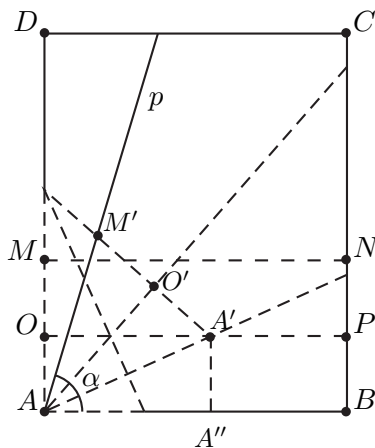


Nommer A' , O' et M' les images de A , O et M respectivement par la symétrie d'axe d puis déplier.

Démontrer que $[AO']$ et $[AA']$ partagent l'angle d'amplitude α formé par p et $[AB$ en trois angles de même amplitude $\alpha/3$.

5.2. Preuve

Considérons la symétrie orthogonale d'axe d qui envoie A sur A' , O sur O' et M sur M' . Soit A'' le projeté orthogonal de A' sur AB .



Nous allons montrer que les triangles $AA''A'$, $AO'A'$ et $AO'M'$ sont isométriques. Il en découlera que $[AO']$ et $[AA']$ partagent l'angle formé par p et $[AB$ en trois angles de même amplitude.

Le triangle $AO'A'$ est image par la symétrie d'axe d du triangle $A'OA$ et lui est donc isométrique. De la même manière, le triangle $AO'M'$ est image du triangle $A'OM$ par la symétrie d'axe d et lui est donc isométrique.

Or, les triangles $A'OA$, $A'OM$ et $AA''A'$ sont isométriques car ils possèdent tous les trois un angle droit compris entre deux côtés respectivement de mêmes longueurs $|OA| = |OM| = |A''A'|$ et $|A''A| = |OA'|$. Par transitivité, on en déduit que les triangles $AA''A'$, $AO'A'$ et $AO'M'$ sont isométriques et que les demi-droites $[AO']$ et $[AA']$ sont les deux trisectrices de l'angle de départ.

Notons qu'il peut être judicieux de faire précéder la construction de la preuve par une recherche avec les élèves des nombreux triangles isométriques dans la figure obtenue par pliage.

6. Pliages de base avec une bande

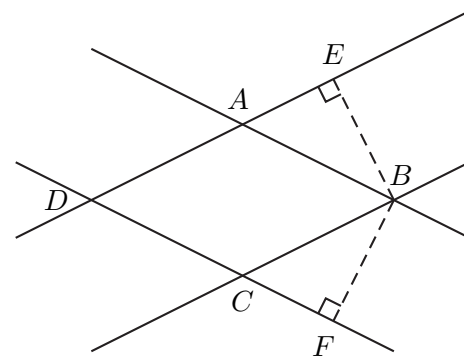
Avant de passer au pliage d'un pentagone régulier à l'aide d'une bande de papier, nous allons considérer trois propriétés de base qui peuvent intervenir quand on travaille avec des bandes de papier. Par bande, nous entendons une région du plan délimitée par deux droites parallèles non confondues. Pratiquement, une bande de papier sera formée d'un rectangle dont la longueur est bien supérieure à la largeur.

Les trois propriétés que nous allons considérer dans cette section sont équivalentes l'une de l'autre. Nous en proposons trois preuves, très différentes, faisant intervenir diverses notions mathématiques travaillées dans les trois premières années du secondaire. Notons que, moyennant une légère adaptation, les trois preuves sont interchangeables.

La première des trois propriétés, qui caractérise le quadrilatère obtenu par le croisement de deux bandes, est souvent évoquée à l'école primaire.

6.1. Énoncé

Montrer que le quadrilatère situé au croisement de deux bandes de même largeur est un losange.



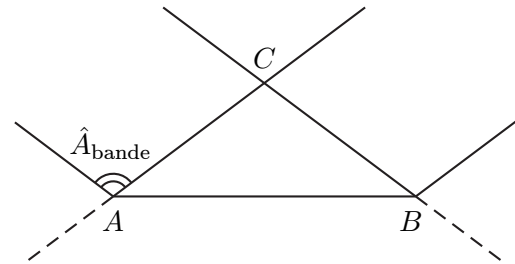
6.2. Preuve

Le quadrilatère $ABCD$ obtenu est délimité par deux paires de côtés parallèles. Il est donc un parallélogramme. Montrons à présent qu'il est également un losange. Pour cela, nous allons montrer que ses côtés ont même longueur.

Soit E le projeté orthogonal de B sur AD et soit F le projeté orthogonal de B sur CD . Comme $ABCD$ est un parallélogramme, ses angles intérieurs \widehat{DAB} et \widehat{DCB} ont même amplitude. Les

angles extérieurs \widehat{EAB} et \widehat{FCB} leur sont respectivement supplémentaires et ont donc même amplitude. Les triangles AEB et CFB sont donc isométriques car ils ont deux paires d'angles respectivement de même amplitude ($|\widehat{EAB}| = |\widehat{FCB}|$ et $|\widehat{AEB}| = |\widehat{CFB}| = 90^\circ$) et une paire de côtés homologues de même longueur ($|FB| = |EB|$), puisque les deux bandes ont même largeur.

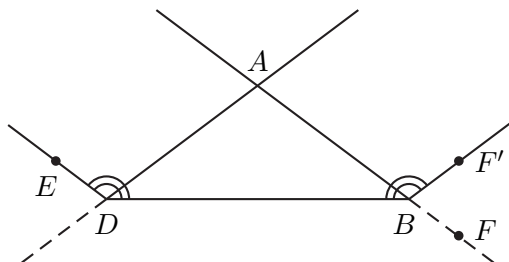
On déduit de l'isométrie de ces deux triangles que les côtés adjacents $[AB]$ et $[BC]$ du parallélogramme ont même longueur. Le parallélogramme $ABCD$ est donc un losange.



6.3. Énoncé

Soit une bande de papier pliée de biais sur elle-même.

Montrer que les deux angles obtus formés par chaque côté de la bande et le pli ont même amplitude.



6.4. Preuve

Les angles \widehat{BDE} et \widehat{DBF} sont alternes-internes déterminés par deux parallèles, ils ont donc même amplitude. En outre, les angles \widehat{DBF} et $\widehat{DBF'}$ sont images l'un de l'autre par la symétrie dont l'axe est le pli BD . Par transitivité, on a $|\widehat{BDE}| = |\widehat{DBF'}|$.

6.5. Énoncé

Soit une bande de papier pliée de biais sur elle-même.

Montrer que le triangle formé est isocèle.

6.6. Preuve

Soit ABC le triangle formé par le pli $[AB]$ dans la bande de papier, avec C à l'intersection des deux côtés de la bande. Nommons \hat{A}_{bande} l'angle de sommet A formé par $[AC]$ et le bord de la bande. Puisque l'angle \widehat{BAC} pris deux fois et l'angle \hat{A}_{bande} forment ensemble un angle plat (cela peut se visualiser soit en dépliant la bande, soit en considérant qu'on a deux couches de papier dans le triangle ABC), on a $|\hat{A}_{\text{bande}}| + 2|\widehat{BAC}| = 180^\circ$.

Par ailleurs, les deux côtés de la bande étant parallèles, l'angle \hat{A}_{bande} et l'angle \widehat{ACB} du triangle sont des angles alternes-internes formés par une sécante coupant deux droites parallèles. Ils ont donc même amplitude. De plus, la somme des amplitudes des angles intérieurs au triangle ABC doit valoir 180° . En combinant les relations précédentes, on trouve

$$\begin{aligned} |\widehat{ABC}| &= 180^\circ - |\widehat{BAC}| - |\widehat{ACB}| \\ &= 180^\circ - |\widehat{BAC}| - |\hat{A}_{\text{bande}}| \\ &= |\widehat{BAC}|. \end{aligned}$$

Puisqu'il possède deux angles de même amplitude, le triangle ABC est isocèle.

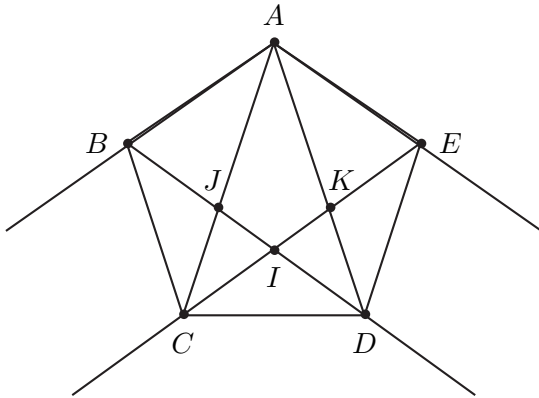
7. Construction d'un pentagone régulier avec un nœud dans une bande

En faisant un nœud dans une bande, en serrant et en aplatissant bien, on obtient un pentagone régulier [8, 17]. Nous allons le démontrer à l'aide des propriétés présentées au point précédent. Outre l'aspect magique du pliage, il permet de travailler entre autres les propriétés des angles d'un polygone.

7.1. Énoncé

Soit une bande de papier pliée pour former un nœud bien serré et aplati comme sur la figure ci-dessous.

Démontrer que le pentagone $ABCDE$ obtenu est régulier.



7.2. Preuve

Montrons d'abord que quatre des côtés du pentagone $ABCDE$ sont isométriques. Les quadrilatères $AEIB$, $AKCB$ et $AEDJ$ sont chacun formés par le croisement de deux bandes de même largeur. Ce sont donc trois losanges. Le losange $AEIB$ a un côté en commun avec chacun des losanges $AEDJ$ et $AKCB$. Les côtés de ces trois losanges sont donc tous isométriques. On en déduit l'isométrie de quatre des cinq côtés du pentagone $ABCDE$:

$$|AB| = |BC| = |DE| = |EA|.$$

Intéressons-nous maintenant aux angles du pentagone. Par les propriétés du pliage en biais d'une bande sur elle-même, on a d'une part

$$|\widehat{BAE}| = |\widehat{AED}| \text{ et } |\widehat{BAE}| = |\widehat{ABC}|,$$

c'est-à-dire

$$|\widehat{ABC}| = |\widehat{BAE}| = |\widehat{AED}|,$$

et d'autre part

$$|\widehat{BCD}| = |\widehat{CDE}|.$$

Par ailleurs, les diagonales d'un losange sont bissectrices de ses angles. En considérant les losanges $AEDJ$ et $AKCB$, on trouve

$$|\widehat{BAC}| = |\widehat{CAD}| = |\widehat{DAE}| = \frac{1}{3}|\widehat{BAE}|.$$

Le triangle ADB est formé par le pli de biais d'une bande sur elle-même. Il est donc isocèle avec

$$|\widehat{ABD}| = |\widehat{BAD}| = 2|\widehat{BAC}| = \frac{2}{3}|\widehat{BAE}|.$$

La somme des amplitudes des angles intérieurs au losange $AEIB$ valant 360° , il s'ensuit

$$2(|\widehat{BAE}| + \frac{2}{3}|\widehat{BAE}|) = 360^\circ$$

et donc $|\widehat{BAE}| = 108^\circ$. Finalement, la somme des amplitudes des angles intérieurs au pentagone $ABCDE$ devant valoir 540° , on déduit

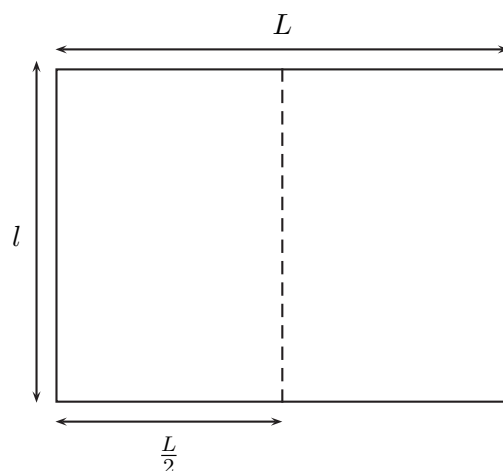
$$\begin{aligned} |\widehat{ABC}| &= |\widehat{BAE}| = |\widehat{AED}| = |\widehat{BCD}| \\ &= |\widehat{CDE}| = 108^\circ. \end{aligned}$$

Le pentagone $ABCDE$ ayant quatre côtés isométriques et tous ses angles intérieurs de même amplitude, il est donc régulier.

8. Le format A4

Le pliage de la section suivante nécessitera l'utilisation d'une feuille de format A4. Comme activité préalable, il est nécessaire de découvrir la propriété qui lie les deux dimensions d'une feuille A4.

Les formats de papier A4, A3, A5, etc. ont la propriété intéressante que, quand la feuille est pliée en deux le long de sa petite médiane, le rectangle obtenu est semblable, au sens géométrique du terme, au rectangle initial. Le format carré ou les formats américains par exemple n'ont pas cette propriété. Cette propriété du format A4 et de ceux de sa famille facilite par exemple les agrandissements et réductions à la photocopieuse : ainsi, on peut réduire deux A4 (ou un A3) en un A4 de manière exacte, sans marges ni rognage, et de même, on peut agrandir un A5 en A4 de manière exacte.



On peut rechercher avec les élèves le rapport entre la longueur et la largeur des feuilles de format A4, A3, etc. Soit ℓ la largeur d'une feuille et L sa longueur. Puisque le rectangle obtenu par pliage est semblable au rectangle d'origine, on a

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\ell}{L/2},$$

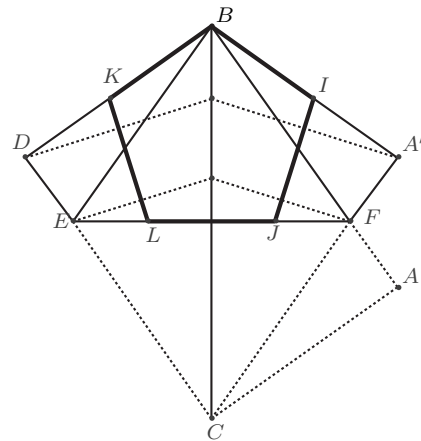
dont on tire $L = \sqrt{2}\ell$.

On peut également rechercher les dimensions exactes $\ell \times L$ d'un A4, sachant que le format A0 a été choisi pour avoir une aire de 1 m^2 et que deux A1 équivalent à un A0 et ainsi de suite, ce qui signifie qu'on peut placer exactement 16 feuilles A4 dans un A0. En exprimant les mesures d'aires en cm^2 et les mesures de longueurs en cm, on obtient $16(\ell \cdot \sqrt{2}\ell) = 10000$, dont on déduit une largeur $\ell = 25\sqrt{1/\sqrt{2}} \approx 21,02$ et une longueur $L = 25\sqrt{\sqrt{2}} \approx 29,73$ pour l'A4.

9. Plier un pentagone dans une feuille A4

Sur le web et dans des ouvrages, on peut trouver plusieurs versions du pliage d'un pentagone régulier à partir par exemple d'une feuille carrée. Les pliages les plus simples sont habituellement des approximations du pentagone régulier, même si cela n'est malheureusement pas toujours spécifié par l'auteur. Il existe bel et bien des pliages exacts du pentagone régulier à partir d'une feuille carrée [1], [12], mais ceux-ci sont souvent assez fastidieux sans permettre une preuve simple de la régularité du pentagone obtenu.

Ci-dessous, nous présentons un pliage proposé par COLONVAL et ROUMADNI [4], permettant d'obtenir rapidement un pentagone presque régulier avec une feuille de papier A4.



9.1. Énoncé

Soit $ABCD$ un rectangle de format A4, avec $|AB| > |BC|$. Plier pour amener le sommet D sur le sommet B . Nommer le pentagone obtenu $A'BCEF$. Ce pentagone possède un axe de symétrie passant par B et perpendiculaire à $[EF]$. Plier puis déplier selon cet axe de symétrie et nommer H son intersection avec $[EF]$. Plier pour amener $[A'F]$ sur l'axe $[BH]$. Nommer I et J les intersections de ce pli avec $[A'B]$ et $[EF]$ respectivement. Faire de même un pli qui amène $[CE]$ sur l'axe $[BH]$. Nommer K et L les intersections de ce pli avec $[BC]$ et $[EF]$ respectivement.

Montrer que le pentagone $IJLKB$ obtenu n'est pas régulier.

9.2. Preuve

Si le pentagone était régulier, l'angle au sommet \widehat{KBI} mesurerait 108° . Or, par symétrie, $|\widehat{KBI}| = 2|\widehat{CBH}|$, c'est-à-dire $2|\widehat{CBD}|$ dans le rectangle A4 déplié d'origine. Or,

$$\text{tg } \widehat{CBD} = \frac{|CD|}{|CB|} = \sqrt{2},$$

puisque $ABCD$ est de format A4. On trouve donc $|\widehat{CBD}| = \arctan \sqrt{2} = 54,7356^\circ$. On en déduit que l'angle du pentagone mesure $|\widehat{KBI}| = 2|\widehat{CBD}| = 2 \cdot 54,7356^\circ = 109,4712^\circ$, ce qui est un peu plus que les 108° attendus. Le pentagone $IJLKB$ n'est donc pas régulier.

On peut ici mettre en évidence l'originalité de la démarche de démontrer qu'une propriété est fautive.

Les élèves sont peu confrontés à ce type de réflexion, qui fait pourtant partie du travail d'un mathématicien. Cette démonstration devrait être précédée d'un questionnement sur la validité du pliage, autrement dit d'une vérification aux instruments de l'égalité ou non des longueurs et des angles. Les mesures observées sont assez proches et créent le doute, ce qui peut motiver la recherche d'une justification rigoureuse. Il faut prendre conscience qu'il suffit d'invalider *une* propriété du pentagone régulier. Encore faut-il déterminer laquelle.

Notons que les auteurs de [4] suggèrent de plier pour amener $[A'F]$ et $[CE]$, non pas *sur* $[BD]$, mais parallèlement à celui-ci, et à un centimètre l'un de l'autre. Cela permet d'avoir cinq côtés de longueurs très proches et donc un pentagone qui ressemble encore plus à un pentagone régulier. Mais comme on s'intéresse de toute façon à l'angle \widehat{KBI} du pentagone, la preuve ci-dessus reste valable.

10. Conclusion

Au terme de cette double promenade dans le monde des pliages en géométrie plane, nous espérons avoir convaincu le lecteur de l'intérêt du pliage à plusieurs moments clés de la formation mathématique des élèves. Que ce soit pour exercer le vocabulaire géométrique, pour exploiter les propriétés des figures dans des situations variées, pour observer ou conjecturer des propriétés ou enfin s'exercer à les démontrer, le pliage s'avère souvent une porte d'entrée concrète et ludique vers des activités géométriques.

Le catalogue d'activités proposé ici n'est bien évidemment pas du tout exhaustif. Nous avons néanmoins voulu montrer la diversité des exploitations possibles en classe et nous invitons le lecteur à prolonger cette recherche en utilisant des ouvrages, le web, voire sa propre imagination. Par exemple, de nombreux pliages figuratifs et classiques peuvent être l'occasion d'une réflexion et d'une recherche en géométrie. Par ailleurs, nous n'avons pas exploré ici l'utilisation du pliage en géométrie de l'espace (notamment construction de polyèdres), en trigonométrie ou dans le cadre de problèmes algébriques (notamment de modélisation).

Les activités de pliage sont également l'occasion pour l'enseignant de se mettre dans une position de découverte en même temps que ses élèves, voire de s'émerveiller face à l'imagination de ceux-ci. Lors des constructions de figures, par exemple, on peut être agréablement surpris par la diversité des idées des élèves. Les moments d'argumentation permettant de distinguer les idées pertinentes des autres sont des moments riches en échanges dans lesquels l'enseignant se retrouvera peut-être dans une position de recherche semblable à celle des élèves.

Pour en savoir plus

- [1] David DUREISSEIX, Folding optimal polygons from squares, *Mathematics Magazine*, 79(4), 2006, pp. 272-280.
- [2] Didier BOURSIN et Valérie LAROSE, *Mathématique des pliages*, ACL – Les éditions du Kangourou, 2000.
- [3] Didier BOURSIN et Valérie LAROSE, *Pliages et mathématiques*, ACL – Les éditions du Kangourou, deuxième édition, 2000.
- [4] Matthieu COLONVAL et Abdelatif ROUMADNI, *Les maths au quotidien*, Éditions Ellipses, 2009.
- [5] Betsy FRANCO, *Unfolding Mathematics with Unit Origami*, Key Curriculum Press, 1999.
- [6] José GIOÉ, *Origamis et mathématiques. Problèmes à composer*, <http://origami.c.la/>.
- [7] Kazuo HAGA, *Origamics. Mathematical Explorations through Paper Folding*, édité et traduit par J. C. FONACIER et M. ISODA, World Scientific Publishing, 2008.
- [8] Thomas HULL, *Project Origami. Activities for Exploring Mathematics*, A K PETERS, 2006.
- [9] Robert J. LANG, *Origami and geometric constructions*, 2003, téléchargeable à la page <http://www.langorigami.com/science/math/hja/hja.php>.
- [10] Jun MAEKAWA, *Genuine japanese origami, Book II : 34 mathematical models based upon $\sqrt{2}$* , Dover 2012.
- [11] MAYUMI, *Premiers origami*, Fleurus, 2011.
- [12] John MONTROLL, *Origami and math : Simple to complex*, Dover, 2012.
- [13] Laure NINOVE, Rencontre avec la droite mère. Un élégant problème d'origami de Kazuo Haga, LOSANGES, n°12, SBPMef, 2011, pp. 3-9.

- [14] Laure NINOVE, *L'origami et la géométrie en 3^e année : explorer, conjecturer et démontrer*, Formation Cecafof, janvier 2012.
- [15] Laure Ninove, *L'origami pour développer des compétences en mathématiques au premier degré*, Formation IFC, février 2012.
- [16] Alton T. OLSON, *Mathematics Through Paper Folding*, National Council of Teachers of Mathematics, 1975.
- [17] Danielle SALLES-LEGAC et l'Équipe Géométrie, *Géométrie des pliages*, LE MIROIR DES MATHS, n°5, IREM de Basse-Normandie, 2009, pp.5-13.
- [18] Patricia WANTIEZ, *Comment exploiter le pliage à la fin du primaire et au début du secondaire ?*, Séminaire du CREM, 17 février 2012, documents disponibles sur <http://www.crem.be/index.php/DL>.
- [19] Patricia WANTIEZ et Laure NINOVE, *Exploiter le pliage à la fin du primaire et au début du secondaire*, *Losanges*, n°19, 2012, pp.34-41.

Laure Ninove est maître-assistante à la Haute École Léonard de Vinci, École normale catholique du Brabant Wallon et membre du Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM), laure.ninove@gmail.com.

Patricia Wantiez est maître-assistante à la Haute École de Bruxelles, Institut pédagogique Defré, wantiez.patricia@gmail.com.

Elles se sont rencontrées lors de réunions des Mathophiles, un groupe de réflexion réunissant des enseignants en mathématique et didactique des écoles normales, plus particulièrement impliqués dans la formation des futurs instituteurs.

Les bœufs d'Augias

Le puissant Alcide demanda un jour à Augias le nombre de ses bœufs. Le Roi lui répondit : « *Sur les bords de l'Alphée, il y en a la moitié ; le huitième de mon troupeau est à pâître sur la colline de Saturne ; le douzième est près de la borne de Taraxippe ; le vingtième pâture aux environs de la divine Élis. J'en ai laissé le trentième dans les herbages d'Arcadie ; tu verras ici le reste du troupeau, cinquante bœufs.* »

Combien Augias avait-il de bœufs ?

