Des polygones semblables aux homothéties

A. Chevalier, *(Collège Saint-Hubert à Bruxelles - G.E.M. Louvain-la-Neuve)*

"L'idée de similitude, c'est-à-dire de ressemblance de deux figures qui ne diffèrent que par l'échelle sur laquelle elles sont construites, doit certainement aussi être mise au nombre des données de l'intuition immédiate. Que l'on montre à un enfant de trois ans le portrait de son père en miniature, le dessin d'un édifice qui frappe journellement ses regards, et il reconnaîtra son père, il reconnaîtra l'édifice. Il n'attend pas pour cela qu'on lui ait enseigné la géométrie et donné la définition de similitude à la manière des géomètres..." (A.A.Cournot, 1861)

La séquence d'enseignement telle qu'elle est présentée ci-dessous se base sur cette capacité des élèves de savoir reconnaître des figures semblables complexes à vue et propose une succession de questions qui amènent à préciser les critères de similitude de polygones et conduisent à la définition d'homothétie. Celle-ci permettra, par la suite, de donner une définition générale de figures semblables.

Le présent article propose des questions dans un ordre qui permet de construire une théorie tout en résolvant des problèmes. Les réponses aux questions sont peu développées. Par contre, chacune des questions est suivie de l'acquis théorique lié à celle-ci.

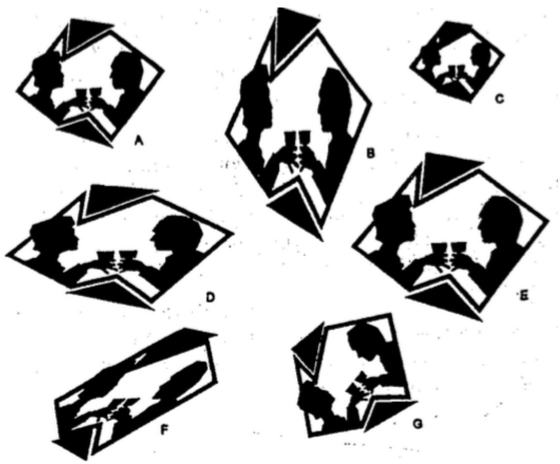
1. Prérequis

Des manipulations et des observations des ombres au soleil de bâtonnets verticaux ainsi que d'une règle plantée de clous équidistants devraient précéder cette séquence afin de mettre au point la propriété suivante : "l'ombre au soleil d'une règle graduée régulièrement est une règle graduée régulièrement" dont la traduction mathématique est : " toute projection parallèle d'une règle graduée régulièrement sur un plan sécant à celle-ci et dont la direction de projection n'est pas celle de la règle est une règle graduée régulièrement".

2. Images transformées

Nous avons exprimé que la similitude est une notion première. Il nous a toutefois semblé indispensable de démarrer l'étude des figures semblables en situant celle-ci dans un cadre plus large qui est celui des transformations. Les logiciels de dessin sont des outils aujourd'hui à notre disposition pour transformer des images. Ouvrons-en un et transformons de diverses façons une figure quelconque.

Les images B, C, D, E, F et G de la figure 1 ont été obtenues à partir de manipulations de l'image A avec un programme de dessin sur ordinateur. Observez-les et décrivez comment on a transformé le dessin A pour obtenir chacun des autres dessins.



Acquis théorique :

1) On distingue parmi diverses transformations celles qui conservent la forme des autres.

2) Définition : on appelle *figures semblables*, toutes les figures qu'on obtient par agrandissement ou réduction d'une même figure de départ ou encore toutes figures qui ont la même forme, indépendamment de la grandeur.

3. Des rectangles semblables

S'il nous semble aisé de reconnaître des figures semblables complexes à vue, le problème n'est plus aussi simple pour des figures élémentaires comme les triangles, rectangles et autres polygones. C'est à ce stade qu'il va falloir se mettre d'accord sur des critères qui s'accordent avec l'intuition première. Dans le cadre du sujet qui nous intéresse, des critères de type numérique ou géométrique vont surgir selon les problèmes posés.

3.1. Les formats de photos

Voici, en cm, différents formats commercialisés de photos :

a) 9×13
b) 10×15
c) 13×18
d) 20×25
e) 30×45

Sachant qu'on part d'un négatif de 24×36 *(en mm), quels sont les formats pour lesquels il est possible d'imprimer exactement le contenu du négatif ? Expliquez votre raisonnement.*

Le problème étant spécifié numériquement, il est clair que la résolution va faire apparaître des critères numériques de similitude de rectangles. Deux modes de comparaison sont possibles. On compare la largeur d'un format à celle du négatif, en établissant le rapport et on vérifie si celui-ci est le même entre les longueurs correspondantes.

négatif	24	36
format d	20	25
format e	30	45

Tab.1

Ainsi, on obtient que

$$\frac{20}{24} \neq \frac{25}{36}$$

Par contre,

$$\frac{30}{24} = \frac{45}{36} = \frac{5}{4}$$

Cette méthode est relativement fastidieuse puisqu'elle nécessite deux comparaisons par rectangle. Une approche plus rapide consiste à caractériser un rectangle par le rapport de sa largeur et de sa longueur. Cela nous conduit tout de suite à dire que le format d ne permet pas de reproduire l'entièreté du négatif car

$$\frac{24}{36} \neq \frac{20}{25}$$

Tous les formats dont le rapport de la largeur et de la longueur vaut 2/3 sont semblables au format du négatif.

Acquis théorique :

Deux rectangles sont semblables si on peut constuire un tableau de proportionnalité à partir de leurs dimensions.

Ce qui signifie que d'une part on peut obtenir chacune des dimensions du rectangle b en multipliant celles du rectangle a par un même nombre k .

rectangle a	l	L
rectangle b	l'	L'

$\times k$

Tab.2

Ce nombre k correspond au *coefficient d'agrandissement ou de réduction* du rectangle a au rectangle b et correspond à $\frac{L'}{L}$ ou à $\frac{l}{l'}$.

D'autre part, on sait que, dans un tableau de proportionnalité, on multiplie tous les éléments d'une colonne par un même nombre pour obtenir les éléments correspondants d'une autre colonne. Ceci entraîne les égalités suivantes pour deux rectangles semblables de dimensions l et L d'une part et l' et L' d'autre part :

$$\frac{L}{l} = \frac{L'}{l'}$$

De façon générale, on peut exprimer que deux rectangles sont semblables

- soit lorsqu'il y a égalité de rapport entre la largeur et la longueur de chacun des rectangles ;

- soit lorsqu'il existe un coefficient d'agrandissement ou de réduction entre toutes les dimensions de l'un et de l'autre.

3.2. Les écrans de télévision

La question suivante va nous permettre de traiter de la proportionnalité des autres grandeurs à l'intérieur de rectangles semblables.

Pourquoi, dans le commerce, les écrans de télévision sont-ils spécifiés uniquement à partir de leur diagonale ? Cette dimension fournie, peut-on retrouver la hauteur et la largeur d'un écran ?

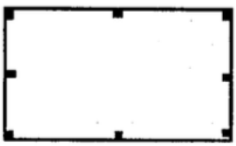
Tous les écrans de télévision sont semblables puisqu'ils peuvent transmettre la même image sans la déformer, quelles que soient les dimensions de l'écran. Le rapport entre la largeur et la hauteur des écrans classiques est toujours 4/3. Sachant que la diagonale d'un rectangle de 4 sur 3 est toujours 5, on peut retrouver les dimensions d'un écran quelconque, dont la diagonale est fournie, à l'aide d'un tableau de proportionnalité.

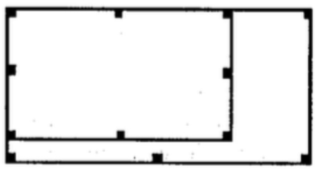
Acquis théorique :

On peut établir un tableau de proportionnalité entre toutes les dimensions de deux rectangles semblables.

3.3. Agrandir ou réduire une figure sur un ordinateur

Sur un certain nombre de programmes d'ordinateur, il est possible de déformer un dessin de la façon suivante. Lorsqu'on active la figure, un cadre rectangulaire apparaît. Les huit petits carrés noirs placés comme sur la figure 2 peuvent être déplacés de façon à faire varier les dimensions du cadre et du dessin par la même occasion. Par exemple, si on déplace un des carrés placés au milieu des côtés, on étire le dessin soit dans le sens de la longueur, soit dans le sens de la largeur. Par contre, lorsqu'on déplace un coin, on détermine un nouveau rectangle comme sur la figure 3.



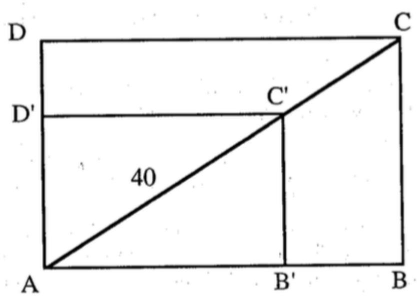


Comment faut-il procéder en une étape pour agrandir ou réduire une figure donnée ?

Pour agrandir ou réduire une figure, il suffit de transformer le cadre en un rectangle semblable au premier. Dans la situation qui nous occupe, le rectangle nous est fourni sans ses dimensions. On ne peut plus s'aider d'un tableau de proportionnalité. Comment traiter alors de la similitude de deux rectangles ? Il faut trouver un critère géométrique et non plus numérique pour résoudre ce problème et montrer ensuite l'équivalence entre les deux types de critères.

Acquis théorique :

On obtient un rectangle semblable au premier en positionnant le sommet déplacé le long de la diagonale du rectangle initial (ou de son prolongement). La figure 4 nous en fournit un exemple.

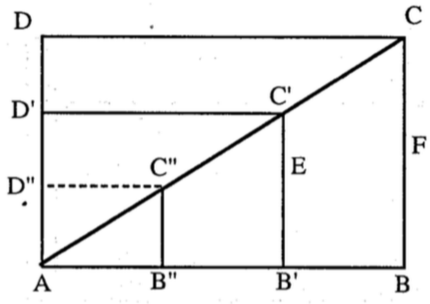


Montrons que le rectangle $AB'C'D'$ est semblable au rectangle $ABCD$. Supposons que la diagonale du nouveau rectangle vaut les $2/3$ de l'autre ([1]). Il faut donc prouver que

$$\overline{AB'} = \frac{2}{3}\overline{AB} \text{ et } \overline{AD'} = \frac{2}{3}\overline{AD}.$$

Situons les points C'' et C', respectivement au tiers et aux deux tiers du segment $[AC]$ qui devient ainsi une règle graduée (figure 5).

1. Le 2/3 est choisi à titre d'exemple. N'importe quelle autre fraction permettrait une démonstration analogue. Bien sûr, il faudra se reposer la question de la pertinence de la démonstration au moment de la découverte des rapports incommensurables.



Traçons les segments parallèles aux côtés $[CB]$ et $[CD]$, issus de C' et C'' jusqu'aux côtés $[AB]$ et $[AD]$. Par cette construction, les points C' et C'' sont envoyés d'une part parallèlement à CD sur AD et d'autre part parallèlement à CB sur AB. Or, nous savons que toute projection parallèle d'une règle graduée régulièrement est une règle graduée régulièrement. On peut en déduire que

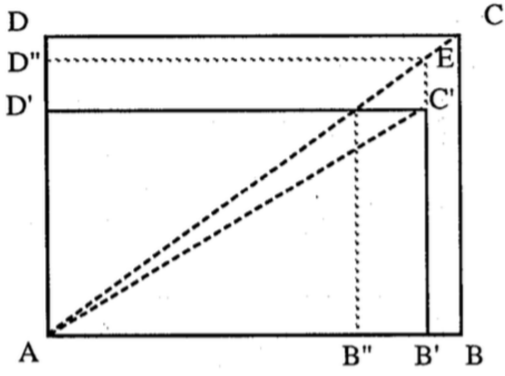
$$\overline{AB''} = \overline{B''B'} = \overline{B'B} \text{ et } \overline{AD''} = \overline{D''D'} = \overline{D'D}$$

et donc

$$\overline{AB'} = \frac{2}{3}\overline{AB} \text{ et } \overline{AD'} = \frac{2}{3}\overline{AD}.$$

Les rectangles $ABCD$ et $AB'C'D'$ sont donc bien semblables.

Si on déplace le point C du rectangle $ABCD$ ailleurs que sur la diagonale $[AC]$ (figure 6), le nouveau rectangle $AB'C'D'$ ne peut être semblable au rectangle $ABCD$.



En effet, le rapport entre les longueurs des deux rectangles est donné par $\frac{AB'}{AB}$. Grâce aux projections parallèles, on a

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AD''}{AD} \neq \frac{AD'}{AD}.$$

De même, si on part du rapport entre les largeurs $\frac{AD'}{AD}$, on peut établir

$$\frac{AD'}{AD} = \frac{AB''}{AB} \neq \frac{AB'}{AB}.$$

Par ailleurs, on peut observer que les deux triangles qui constituent le rectangle $AB'C'D'$ n'ont pas la même forme que les deux triangles qui constituent le rectangle $ABCD$ puisque l'angle entre la diagonale issue de A et chacun des côtés a varié.

Le triangle $AB'C'$ n'est pas semblable au triangle ABC. Par contre, le triangle $AB'E$ est semblable au triangle ABC.

Les angles correspondants de deux polygones semblables ont même amplitude.

On peut donc vérifier le caractère semblable de deux rectangles uniquement géométriquement. On superpose deux rectangles en faisant coïncider un sommet ainsi que les côtés issus de ce sommet et on vérifie que les diagonales issues du sommet se superposent.

4. Des figures obtenues à l'aide d'un pantographe

4.1.

Aujourd'hui, l'utilisation de logiciels de dessin permet de transformer des figures. Avant l'apparition de ces outils modernes, on utilisait à cet effet des appareils articulés appelés pantographes. Construisez-en un en suivant les indications ci-dessous.

1) Procurez-vous quatre lattes en bois ou en carton dans lesquelles vous percez des trous en respectant les intervalles indiqués à la figure 7 ;

2) Assemblez les lattes à l'aide de vis et d'écrous ou d'attaches-parisiennes afin d'obtenir le schéma de la figure 7.

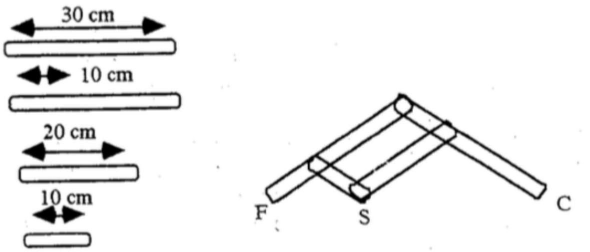


Fig.7

3) Les trois trous F, S et C vont nous servir à placer
- en F, un point fixe (à l'aide d'une punaise ou d'une attache parisienne par exemple) de l'appareil sur la feuille de dessin ;
- en S, une pointe sèche que l'on conduit le long de la figure modèle ;
- en C, une pointe de crayon ou de compas qui trace le nouveau dessin.

4.2.

Dessinez, sur une feuille de dessin, un motif M_1 dans le style de celui proposé à la figure 8. Fixez le point F du pantographe sur la feuille de dessin. Transformez ce motif en un motif M_2 à l'aide du pantographe en choisissant les positions des points F, S et C comme sur la figure 7. Comparez la figure M_2 avec la figure M_1.

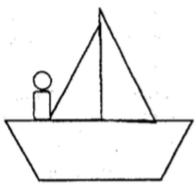


Fig.8

4.3.

Sur le pantographe, on peut échanger les positions du point fixe (F), de la pointe sèche (S) et du crayon (C). Transformez le même motif M_1 en disposant à chaque fois le pantographe comme indiqué sur la figure 9 et en replaçant chaque fois le point fixe F au même endroit sur une feuille de dessin. Qu'observez-vous ?

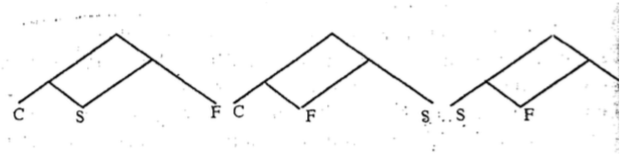


Fig.9

4.4.

Nous observons que le pantographe est un appareil articulé qui transforme une figure en une figure semblable. Retrouvez le coefficient d'agrandissement ou de réduction pour chacune des figures obtenues à partir de la figure M_1. Trouvez un lien entre la disposition des points F, S et C sur le pantographe et le coefficient de similitude ainsi que l'orientaion du motif.

4.5.

Observez le pantographe qui a permis de dessiner M_2 (figure 7). Pourquoi les points F, S et C restent-ils toujours alignés et sont -ils toujours disposés de telle sorte que le segment $[SC]$ ait une longueur double de celle de $[FS]$?

Les points F, S et C sont alignés si on peut montrer que la somme des amplitudes des angles FSP, PSQ et QSC vaut 180°.

Par construction, les segments $[PR]$ et $[SQ]$ ont même longueur. Il en est de même pour les segments $[RQ]$ et $[PS]$. Le quadrilatère $PRQS$ a ses côtés opposés de même longueur. Il s'agit donc d'un parallélogramme. On peut en déduire que PS est parallèle à RC et SQ est parallèle à FR.

La droite SQ, sécante aux parallèles PS et RC, détermine les deux paires d'angles alternes-internes PSQ et SQC, FPS et PSQ (figure 10).

Donc les deux triangles FPS et SQC, qui sont isocèles par construction, ont leur angle au sommet et leurs angles à la base également respectivement de même amplitude.

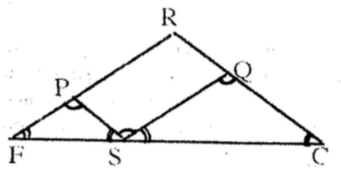


Fig.10

La somme des amplitudes des angles FSP, PSQ et QSC est donc égale à la somme des amplitudes de angles de chacun des deux triangles, à savoir $180°$. Les points F, S et C sont donc bien alignés.

Par ailleurs, dans le triangle RFC, par construction, $[PR]$ a une longueur double de $[FP]$. En situant le point M, milieu de $[PR]$, on obtient une règle graduée régulièrement. Si, de chacun des points de division, on trace des parallèles à RC, celles-ci rencontrent $[FC]$ en trois points qui divisent $[FC]$ en trois segments de même longueur. On peut en déduire que $[SC]$ a une longueur double de celle de $[FS]$ ou encore que la distance qui sépare C de F vaut le triple de celle qui sépare S de F (figure 11).

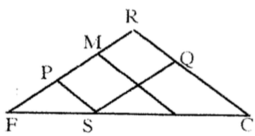


Fig.11

5. Et sans pantographe ?

5.1.

On peut observer que le point C du pantographe se situe à l'intersection de la droite FS et de la droite parallèle à PS passant par R (figure 11). En *vous basant sur cette propriété, trouvez une construction du point A' image du point A par la transformation à l'aide du pantographe.*

Voici deux possibilités :

1) Supposons qu'on ait situé trois points F, P et R tels que $\overline{FR} = 3\overline{FP}$.

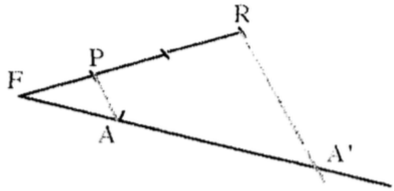


Fig.12

Le point A' se situe à l'intersection de la droite FA et de la parallèle à PA menée par R.

2) Une autre solution consiste à se donner un calque sur lequel on a dessiné trois droites parallèles f, a et a' de telle sorte que la distance FR qui sépare a' de f vaut trois fois la distance FP qui sépare f de a (figure 13).

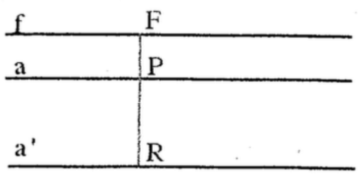


Fig.13

L'image d'un point A à partir du point F se situe à l'intersection de la droite FA et de la droite a' placée de telle façon que F appartienne à la droite f et A à la droite a (figure 14).

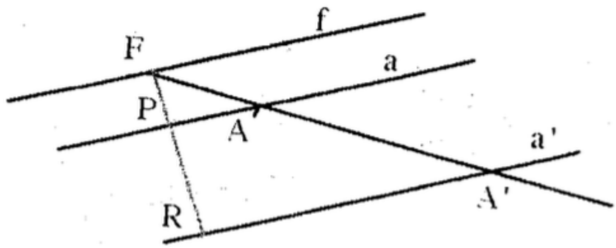


Fig.14

En effet, on sait que $\overline{FR} = 3\overline{FP}$. Par la propriété des projections parallèles $\overline{FA'} = 3\overline{FA}$.

Définition :

Toute transformation comme celle qu'on obtient à l'aide d'un pantographe ou d'une des deux constructions décrites ci-dessus porte le nom d'*homothétie de centre F et de rapport* 3.

L'image d'un point A par une homothétie de centre F et de rapport rationnel r positif quelconque se situe sur la droite FA de telle sorte que les trois points F, A et A' sont obtenus par projection parallèle de trois points alignés F, P et R tels que $\overline{FR} = r\overline{FP}$.

Propriétés d'une homothétie de rapport r positif :

1) Le point F est un point fixe.

2) Les points F, A et A' sont alignés.

3) L'image d'un segment est un segment parallèle, d'une droite est une droite parallèle. Le rapport entre le segment-image et le segment initial vaut r.

4) Les droites passant par F sont fixes.

5) Les amplitudes des angles sont conservées.

6) Les rapports entre les segments sont conservés.

Les propriétés 1 et 2 sont des conséquences immédiates de la définition. Démontrons la propriété 3.

Considérons un point fixe F et un point A dont on connaît l'image A'. Montrons que l'image d'un segment $[AB]$ est un segment $[A'B']$ parallèle à $[AB]$.

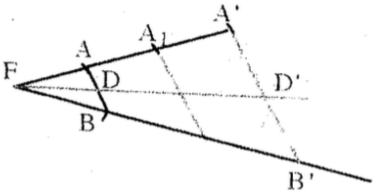


Fig.15

Le point B' se situe à l'intersection de la droite FB et de la parallèle à AB passant par A'. On peut montrer, grâce à la propriété des projections parallèles, que n'importe quel point D du segment $[AB]$ a son image D' sur $[A'B']$ (figure 15). L'image du segment $[AB]$ est donc bien le segment $[A'B']$ parallèle à $[AB]$.

Il nous reste à montrer que le rapport $\frac{A'B'}{AB} = 3$.

Si, de chacun des points de division de $[FB']$ en trois segments de même longueur, on trace des parallèles à $[FA']$, on divise $[A'B']$ en trois segments de même longueur que $[AB]$ (figure 16).

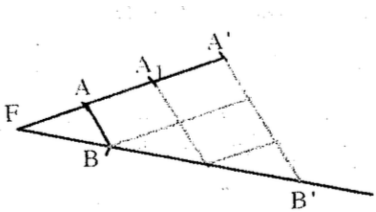


Fig.16

La conservation des amplitudes des angles (propriété 5) est une conséquence immédiate de la propriété 3. En effet, tout angle formé par deux demi-droites issues d'un même point se voit transformé en un angle formé de deux demi-droites parallèles aux premières. Il a donc même amplitude.

Fig.17

Puisque toute homothétie multiplie toutes les dimensions par le rapport tout en conservant l'amplitude des angles, l'image de tout polygone par une homothétie est un polygone semblable au premier.

5.2.

Qu'est-ce qui change à la description précédente si on considère r négatif ?

6. Des polygones semblables

6.1.

Recopier les cinq pentagones ci-dessous sur du papier calque et déterminer sans rien mesurer s'ils sont semblables. Justifier les réponses en citant les propriétés utilisées.

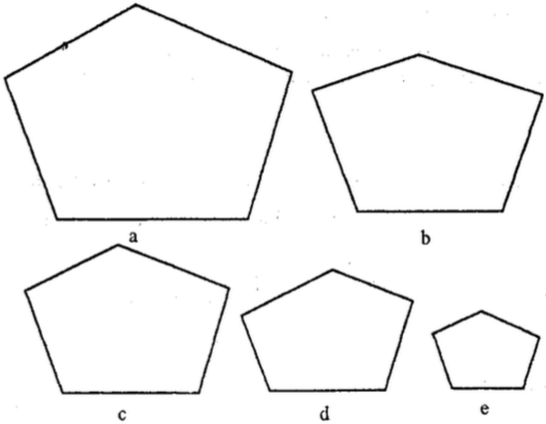


Fig.18

Recherchons, parmi ces pentagones, ceux qui sont images l'un de l'autre par une homothétie.

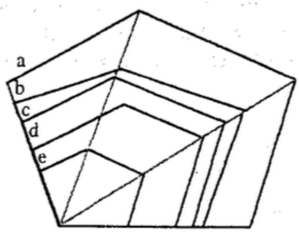


Fig.19

Acquis théorique :

Comment vérifier uniquement géométriquement que deux polygones sont semblables ?

Si on peut trouver une homothétie qui envoit un des polygones sur l'autre, alors les deux polygones sont semblables.

Pour cela, on superpose les deux polygones de façon à faire coïncider un point commun (sommet, milieu d'un côté,...) ainsi que les segments issus de ce point.

Si de plus,

- les côtés correspondants des deux polygones sont parallèles,

- les sommets correspondants sont alignés avec le point commun,

alors les deux polygones sont semblables.

Ainsi les polygones a, c et e sont semblables entre eux.

7. Conclusion

La séquence nous a amenés à être en possession de critères géométriques et numériques pour reconnaître ou construire des polygones semblables. Nous n'avons fait aucune recherche des conditions nécessaires et suffisantes qui autorisent à conclure à la similitude.

Avec l'homothétie, on a en mains un outil puissant qui va permettre de donner une définition générale de figures semblables : *deux figures sont semblables si on peut les placer l'une par rapport à l'autre de telle sorte que l'une soit l'image de l'autre par une homothétie.*

Une fois cette définition mise en place, il devient aisé de développer les cas de similitude des triangles et de vérifier le caractère nécessaire ou suffisant de certaines propriétés des figures semblables.

Adresse de l'auteur :

Anne Chevalier
Rue de l'Eau Vive 15
1420 Braine l'Alleud