

Dans nos classes

Th. Gilbert

La différence de deux carrés

1. Stimuler l'argumentation

Le texte suivant relate une activité inspirée par la lecture d'une première version d'un article de CHRISTIAN AEBI et JOHN STEINIG [1] paru dans la revue suisse *Math École*. L'article en question décrit notamment une recherche proposée dans une classe de neuvième année (notre troisième année du secondaire).

Depuis cette lecture, j'ai proposé maintes fois cette recherche à des étudiants de régendat option mathématiques et à des professeurs de mathématiques. Presque chaque fois, de nouvelles pistes de résolution ont été découvertes. J'en livre une partie ci-dessous. Il me semble que ce problème constitue une excellente occasion pour les élèves (peut-être déjà de deuxième année du secondaire?), d'utiliser les connaissances arithmétiques et algébriques visées par les programmes, mais aussi et surtout de conjecturer, d'argumenter, de confronter leurs idées et enfin de démontrer.

2. Énoncé

Quels sont les entiers positifs pouvant s'écrire sous la forme d'une différence de deux carrés de nombres entiers?

3. Quelques pistes

Pour faciliter la formulation des arguments, décidons que, dans le cadre de cette recherche, un nombre constructible est un nombre entier positif

Adresse de l'auteur: Thérèse Gilbert, GEM et Institut Supérieur de Pédagogie Galilée, Rue de la Limite, 89, 1490 - Court-Saint-Étienne
courriel : theresegilbert@tiscalinet.be

pouvant s'écrire sous la forme d'une différence de deux carrés de nombres entiers.

Piste 0. Essais

Trouver une conjecture à partir d'essais (c'est-à-dire par induction).

Piste 1. Une piste algébrique

Calculer

$$2^2 - 1^2 =$$

$$3^2 - 2^2 =$$

$$4^2 - 3^2 =$$

$$5^2 - 4^2 =$$

Généraliser.

On obtient successivement les nombres impairs 3, 5, 7 et 9.
De façon générale, on a $(m+1)^2 - m^2 = 2m+1$. Lorsque m parcourt $\mathbb{N}$, $2m+1$ parcourt l'ensemble des nombres impairs.

Conclusion : tout impair est constructible.

Considérer un écart de 2 entre a et b dans $a^2 - b^2$ et essayer de se ramener à un des cas précédents.

On a $(m+2)^2 - m^2 = 4m+4$. Lorsque m parcourt $\mathbb{N}$, $4m+4$ parcourt l'ensemble des multiples de 4 non nuls.
Par ailleurs, $0 = 1^2 - 1^2$.

Conclusion : tout multiple de 4 est constructible.

Considérer un écart quelconque entre a et b dans $a^2 - b^2$ et essayer de se ramener à un des deux cas précédents.

Exemple d'un écart « quelconque » :

$$7^2 - 4^2 = (7^2 - 6^2) + (6^2 - 5^2) + (5^2 - 4^2).$$

Si l'écart est impair, on obtient une somme d'un nombre impair de nombres impairs, c'est-à-dire un impair (dont on sait déjà qu'ils sont tous constructibles). Rien de neuf.

Et si l'écart est pair? Exemple :

$$7^2 - 3^2 = (7^2 - 5^2) + (5^2 - 3^2).$$

Si l'écart est pair, on obtient une somme de multiples de 4, c'est-à-dire un multiple de 4 (dont on sait déjà qu'ils sont tous constructibles). Rien de neuf.

Conclusion et solution du problème : un nombre entier positif s'écrit sous la forme de la différence de deux carrés de nombres entiers si et seulement s'il est impair ou multiple de 4.

Prolongement : puisque $7^2 - 4^2$ est un nombre impair, à savoir 33, il est aussi la différence de deux carrés de nombres consécutifs : $17^2 - 16^2$. Possède-t-il d'autres décompositions en différence de deux carrés?

Piste 1 bis. Reste de la division par 4

Supposons que l'on ait déjà montré que tout nombre impair et tout multiple de 4 sont constructibles. Il reste donc à voir si d'autres nombres peuvent être écrits sous la forme de la différence de deux carrés.

Ces autres nombres sont de la forme $4m + 2$.

Quel peut être le reste de la division par 4 d'un carré? Et quel peut être le reste de la division par 4 de la différence de deux carrés?

Le reste de la division par 4 d'un nombre N est soit 0, soit 1, soit 2, soit 3.

Le reste de la division par 4 de son carré N^2 est 0 ou 1.

Le reste de la division par 4 de la différence de deux carrés ne peut être que 0, 1 ou 3, mais pas 2!

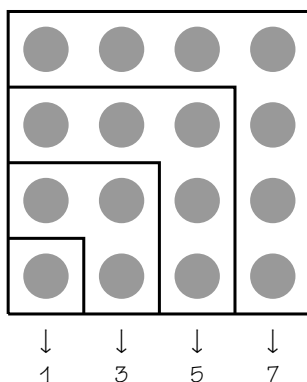
Conclusion et solution du problème : un nombre entier positif s'écrit sous la forme de la différence de deux carrés de nombres entiers si et seulement s'il est impair ou multiple de 4.

Piste 2. Nombres figurés

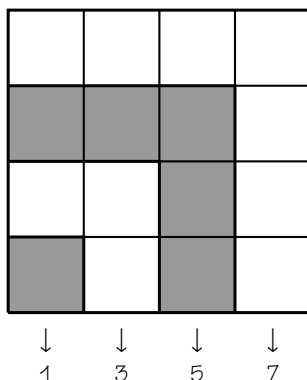
Comment Pythagore représentait-il les carrés, les nombres impairs? Quel(s) lien(s) y a-t-il entre ceux-ci et ceux-là?

Se souvenir de ce que donne une somme des premiers nombres impairs successifs jusqu'à 3, 5, 7, ... et la représenter.

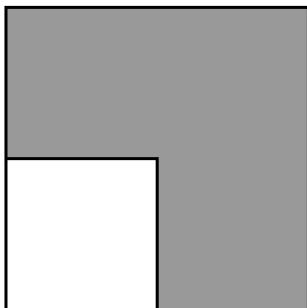
La somme des premiers nombres impairs successifs jusqu'à 7 est représentée ci-dessous. Les unités sont représentées par des « cailloux ». Elle est égale au carré de 4.



On peut aussi remplacer ces cailloux par de petits carrés.



La différence de deux carrés peut être représentée par un coude comme ci-dessous.



Quand le coude a une épaisseur de 1, nous appellerons cela un *gnomon*. Un coude peut être composé de plusieurs gnomons successifs. Donc un nombre est constructible si et seulement il peut être représenté par un gnomon ou un emboîtement de plusieurs gnomons successifs.

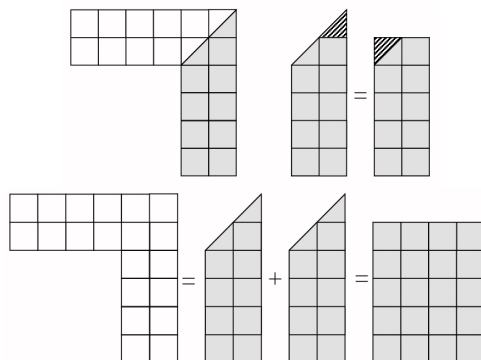
Les nombres impairs peuvent-ils être représentés par un coude? Plus précisément par un gnomon?

Les gnomons successifs sont exactement les nombres impairs successifs. Une manière d'exprimer 47, par exemple, sous la forme de la différence de deux carrés, consiste à le représenter par un gnomon, bordant donc un carré de côté égal à $\frac{47-1}{2} = 23$. On peut donc écrire $47 = 24^2 - 23^2$.

Conclusion : tout nombre impair est constructible.

Et les nombres pairs?

Un nombre pair est constructible car il est la somme d'un nombre pair de gnomons successifs. Or la somme de deux gnomons successifs est multiple de 4, comme le montrent les figures suivantes.



La somme d'un nombre pair de gnomons successifs est donc également un multiple de 4. De plus, la suite des coudes d'épaisseur 2 correspond exactement à la suite des multiples de 4 non nuls. Par ailleurs $0 = 1^2 - 1^2$.

Conclusion et solution du problème : un nombre entier positif s'écrit sous la forme de la différence de deux carrés de nombres entiers si et seulement s'il est impair ou multiple de 4.

Commentaire : la piste des nombres figurés offre (comme d'autres) plusieurs chemins d'entrée dans la résolution du problème.

On peut partir de la représentation par un coude et chercher des caractéristiques de tous les nombres ainsi représentés : ils sont impairs ou multiples de 4. On établit ainsi une condition nécessaire pour qu'un nombre soit constructible. Il reste alors à montrer que tous les nombres impairs et tous les multiples de 4 sont représentables de cette façon. Ceci fait, la condition nécessaire devient aussi suffisante.

Un autre chemin, également naturel, consiste à commencer par chercher des nombres qui peuvent être représentés par des coudes : les nombres impairs sont vite trouvés. Cette caractéristique constitue une première condition suffisante pour qu'un nombre soit constructible. On se demande alors s'il y a d'autres nombres qui peuvent être ainsi représentés. On trouve encore tous les multiples de 4. Être impair ou multiple de 4 constitue donc une nouvelle condition suffisante, plus large. Il reste alors à montrer qu'il n'y a pas d'autres nombres constructibles et la condition suffisante devient ainsi également nécessaire.

Ces deux démarches sont sensiblement différentes d'un point de vue de la logique.

Prolongement : la représentation par un coude donne une piste de réflexion sur la question du nombre de décompositions en différence de deux carrés.

Il est utile pour cela de remarquer qu'un assemblage d'un nombre impair n de gnomons successifs est un multiple de n (et inversement??).

Par exemple, le nombre 33, s'écrivant 1×33 et 3×11 , possède exactement deux décompositions en différence de deux carrés. Est-ce généralisable?

Et pour les multiples de 4? Le nombre 36, par exemple, s'écrivant $4 \times (1 \times 9)$ et $4 \times (3 \times 3)$, possède également deux décompositions en différence de deux carrés...

Piste 3. Identités remarquables

Écrire la différence de deux carrés sous la forme $a^2 - b^2$...

On a $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$.

Exprimer un nombre sous la forme de la différence de deux carrés revient donc à l'exprimer sous la forme du produit ci-dessus. Or tout nombre N s'écrit sous la forme d'un produit, fût-il $1 \cdot N$.

Si $a - b = 1$. L'égalité $N = 1 \cdot N$ permet-elle (toujours) d'écrire N sous la forme de la différence de deux carrés? Il faudrait pour cela trouver a et b tels que $a - b = 1$.

Dans ce cas, les nombres a et b vérifient $a - b = 1$ et $a + b = N$. Ils sont donc consécutifs et $a + b = N$ est impair. Ce cas particulier où $a - b = 1$ nous permettra peut-être de résoudre le problème pour les nombres impairs. Cette décomposition aboutit-elle effectivement à une solution pour tous les nombres impairs? Oui, car ceux-ci sont tous la somme de deux nombres consécutifs (nos a et b). Par exemple,

$$9 = 1 \cdot 9 = (5 - 4)(5 + 4) = 5^2 - 4^2.$$

D'une façon générale, si N est impair, il suffit de prendre $a = \frac{N+1}{2}$ et $b = \frac{N-1}{2}$.

Conclusion : tout impair est constructible.

Si un nombre N est pair, l'écriture $1 \cdot N$ ne permet pas d'écrire N sous la forme de la différence de deux carrés, comme nous l'avons fait ci-dessus pour tous les nombres impairs. Par contre, on peut écrire $N = 2 \cdot M$. Poser alors $a - b = 2$ et examiner la parité de $(a + b)$.

Si $a - b = 2$, c'est que a et b sont deux impairs consécutifs ou deux pairs consécutifs. Dans les deux cas, $a + b$ est pair et $(a - b)(a + b)$ est multiple de 4.

Plus généralement, quelle relation y a-t-il entre la parité de $a - b$ et celle de $a + b$?

Finalement, que dire de $(a - b) \cdot (a + b)$?

$(a - b)$ et $(a + b)$ ont la même parité. Donc soit $(a - b)(a + b)$ est impair, soit il est multiple de 4!

Conclusion : un nombre constructible est soit impair, soit multiple de 4. Par ailleurs, tous les nombres impairs sont constructibles.

Le problème est-il résolu? Non, il reste à voir que tout multiple de 4 est constructible, c'est-à-dire qu'il peut s'écrire $(a - b)(a + b)$.

Reprenons le cas particulier où $a - b = 2$. Dans ce cas, $a + b = 2b + 2$ et $(a - b)(a + b) = 4b + 4$. De cette façon, nous obtenons en fait tous les multiples de 4 non nuls.

Et cette relation permet de trouver b en fonction du nombre de départ N : on obtient $b = \frac{N}{4} - 1$.

Par exemple, pour $N = 16$, on obtient $b = \frac{16}{4} - 1 = 3$. D'où

$$16 = (5 - 3)(5 + 3) = 5^2 - 3^2.$$

Conclusion et solution du problème : un nombre entier positif s'écrit sous la forme de la différence de deux carrés de nombres entiers si et seulement s'il est impair ou multiple de 4.

Piste 4. Autre piste algébrique

La différence de deux carrés peut s'écrire $(a + n)^2 - a^2$ où a et n sont des entiers naturels. Développer.

On obtient

$$\begin{aligned}(a+n)^2 - a^2 &= a^2 + 2an + n^2 - a^2 \\ &= 2an + n^2 \\ &= (2a+n) \cdot n.\end{aligned}$$

Examiner la parité de chaque facteur du dernier produit.

Si n est impair, alors $2a+n$ aussi et le produit est impair.

Si n est pair, alors $2a+n$ aussi et le produit est multiple de 4.

Conclusion : un nombre constructible est soit impair, soit multiple de 4.

Le problème est-il résolu? Peut-on atteindre ainsi tous les impairs? Tous les multiples de 4?

Pour voir que l'on peut atteindre tous les impairs, il suffit de remplacer n par 1 dans $(2a+n) \cdot n$. Cela donne $2a+1$, qui prend bien comme valeurs tous les impairs lorsque a parcourt l'ensemble $\mathbb{N}$.

Pour voir que l'on peut atteindre tous les multiples de 4, il suffit de remplacer n dans $(2a+n) \cdot n$ par 2. Cela donne $4a+4$, qui prend bien comme valeurs tous les multiples de 4 non nuls. Par ailleurs 0 est également atteint puisque $0 = 1^2 - 1^2$.

Conclusion et solution du problème : un nombre entier positif s'écrit sous la forme de la différence de deux carrés de nombres entiers si et seulement s'il est impair ou multiple de 4.

Commentaire : par l'argumentation précédente, on établit d'abord une condition nécessaire, puis on démontre qu'elle est aussi suffisante. C'était aussi le cas des argumentations relatives aux pistes 2 et 3, contrairement à celle de la piste 1.

Prolongement : cette piste peut également être exploitée dans le problème du nombre de décompositions en différence de deux carrés, la lettre n représentant la différence des nombres élevés au carré.

4. Avec des étudiants

Les pistes mentionnées ci-dessus mènent toutes vers la solution. Pourtant, en classe, il est rare que des étudiants suivent leur piste et rien qu'elle jusqu'au bout. En effet, une première mise en commun permet d'échanger les idées. Il arrive que ceux qui ont exploité la piste des nombres figurés pour prouver une partie de leur conjecture, l'abandonnent au profit d'une piste plus algébrique, et vice versa.

D'autres idées fructueuses peuvent apparaître. Par exemple, l'idée de distinguer d'emblée les nombres de départ (dont on prend la différence des carrés) selon leur parité : on développe alors

$$\begin{aligned}(2m)^2 - (2n)^2, \\ (2m+1)^2 - (2n+1)^2, \\ (2m+1)^2 - (2n)^2, \\ (2n)^2 - (2m+1)^2.\end{aligned}$$

En général, les pistes nouvelles, même celles qui n'aboutissent pas tout de suite à la solution, donnent lieu à des résultats intermédiaires souvent intéressants, par exemple sur le lien entre la parité d'un nombre et de son carré, sur la représentation géométrique d'une différence, d'un produit...

5. Mathématiques utilisées, compétences travaillées

Ce problème présente à mes yeux plus d'un atout.

Tout d'abord, il suscite une démarche spontanée de recherche. Chacun peut commencer à chercher. Chacun peut trouver une idée.

Ensuite, comme on l'a vu aux paragraphes précédents, les idées sont nombreuses et fructueuses. Elles peuvent être échangées, débattues, adaptées.

Au niveau du début du secondaire, le problème permettrait aussi d'appliquer des connaissances fraîchement acquises en arithmétique et en algèbre : nombres figurés, somme des n premiers nombres impairs, identités remarquables, factorisation simple, écriture algébrique d'un nombre pair, impair, reste d'une division, parité...

Enfin, le problème provoque l'argumentation, et sa solution se termine par une démonstration. Lors de la confrontation des idées, les étudiants sont presque toujours amenés à distinguer ce dont ils sont sûrs de ce qui reste à prouver et à souligner la différence entre une implication et sa réciproque, deux points importants dans l'apprentissage de la démonstration.

D'autres compétences interviennent dans cette recherche, telles que conjecturer, illustrer une conjecture par des exemples ou l'infirmier par un contre-exemple, envisager des cas particuliers, simplifier le problème, représenter une situation, s'exprimer, confronter ses arguments...

6. L'avenir du problème et son histoire

Problème gratuit, tout juste bon à amuser quelques professeurs? Pas vraiment. La proposition démontrée, et surtout le type de raisonnement employé pour la démontrer, peuvent être réinvestis dans la recherche de triplets pythagoriciens et dans d'autres problèmes d'arithmétique. Pour des exemples de tels problèmes, le lecteur pourra consulter l'article de CHRISTIAN AEBI et JOHN STEINIG [1] mentionné en début d'article.

Par ailleurs la problématique de la différence de deux carrés fut étudiée par PIERRE DE FERMAT dans le cadre de la recherche d'une méthode pour factoriser de grands nombres. Cette méthode est décrite dans l'article cité.

Bibliographie

- [1] Christian Aebi & John Steinig, Activité autour des « identités remarquables » et « Factorisation des entiers : la méthode de FERMAT », *Math École* n° 210.

Merci à CHRISTIAN AEBI et NICOLAS ROUCHE pour leurs commentaires qui ont contribué à améliorer ce texte.