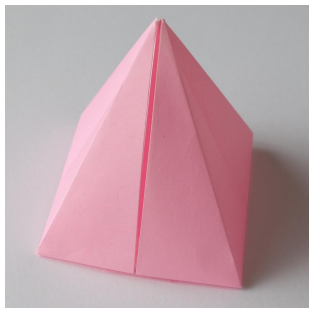
D'une pyramide en origami à la tangente de $22,5°$

Laure Ninove

Mots clés : Pliage, origami, polyèdre, géométrie, trigonométrie, nombre trigonométrique.

Résumé. *Dans cet article, nous invitons le lecteur à se pencher sur une pyramide droite à base carrée réalisée en origami. Nous verrons comment la recherche des dimensions de la pyramide en fonction de celles de la feuille de papier peut amener à déterminer la valeur exacte de tangente de $22,5°$, sans utiliser la formule trigonométrique classique de la tangente d'un angle moitié.*



1. Introduction

Le pliage de cette pyramide est une variation de la boite en étoile traditionnelle.

Cette pyramide en papier peut être utilisée avec de jeunes élèves comme outil de manipulation ou de visualisation d'un solide de l'espace. Les élèves peuvent y situer la base, les quatre faces triangulaires, le sommet ou encore la hauteur (en y introduisant une pique à brochette). Ils peuvent même noter ces caractéristiques directement sur leur pyramide de papier. En dépliant entièrement le pliage, les élèves peuvent reconnaitre, et mettre en évidence dans les plis, un des développements de la pyramide : un carré entouré de quatre triangles isocèles isométriques.

Au milieu du secondaire, on peut aussi exploiter ce pliage comme problème faisant intervenir la trigonométrie des triangles rectangles, le théorème de Pythagore et les triangles isométriques [6].

Dans cet article, nous verrons comment l'exploration de ce pliage peut déboucher sur la détermination de la valeur exacte de $\tan 22,5°$.

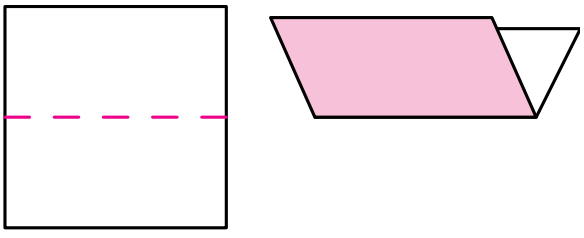
Notons qu'il existe plusieurs manières différentes de construire des pyramides avec les mêmes caractéristiques (des pyramides semblables au sens mathématique du terme). On en trouvera par exemple trois dans l'ouvrage de Dider Boursin et Valérie Larose [4], certaines étant plus stables que le pliage proposé ci-dessous, ce qui est un avantage si on s'intéresse surtout aux propriétés des polyèdres et autres solides.

2. Pliage de la pyramide

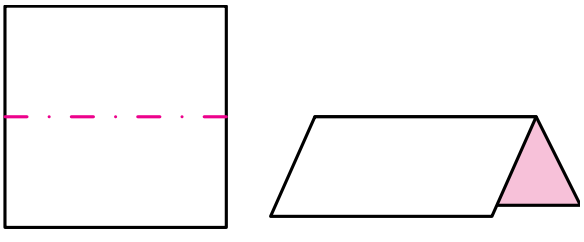
Avant de se lancer dans la réflexion, nous vous invitons à construire la pyramide avec une feuille de papier carrée. Néanmoins, le lecteur pressé peut directement passer aux mathématiques à la section suivante. Les instructions de pliage sont illustrées ci-contre et sont disponibles en format pdf sur le blog OrigamiMaths [11]. Vous pouvez également voir sur la chaine YouTube Origamaths [2] une vidéo présentant le pliage de cette pyramide par un enfant d'une

dizaine d'années. Par ailleurs, le lecteur qui aurait déjà réalisé un oiseau qui bat des ailes [9] ou une grue japonaise en origami reconnaitra les premières étapes du pliage.

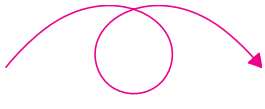
Commençons par rappeler ce que sont des plis vallées et montagnes en origami. Un *pli vallée* est un pli en creux, obtenu par pliage de la feuille vers l'avant. Il est codé par un trait en pointillés.



Un *pli montagne* est un pli en crête, obtenu par pliage de la feuille vers l'arrière. Cela revient à retourner la feuille, réaliser le pli en vallée, puis retourner à nouveau la feuille. Le pli montagne est codé par un trait mixte tirets-points.



Enfin, on utilise une flèche comme ci-dessous pour indiquer qu'il faut retourner le modèle.



Pour plus de détails sur les conventions en origami, se reporter au *Solfège du plieur* réalisé par le Mouvement Français des Plieurs de Papier [8].

Instructions de pliage de la pyramide

(1) Plier selon les deux diagonales du carré. Retourner la feuille de papier.

(2) Plier selon les deux médianes du carré.

(3) Ramener trois sommets (les deux sommets latéraux et le sommet du haut) sur le quatrième sommet (le sommet du bas), en utilisant les plis faits aux étapes précédentes.

(4) On obtient un carré à plusieurs couches. Il est appelé la **base préliminaire** en origami.

(5) Plier selon les bissectrices des deux angles de sommet ouvert (le sommet du bas).

(6) Plier selon l'hypoténuse du triangle rectangle isocèle (triangle du haut).

(7) Déplier les deux dernières étapes.

(8) Retourner le pliage.

(9) Réaliser les plis (4) à (6) sur cette face.

(10) Déplier entièrement la feuille de papier.

(11) Mettre en volume, en gardant le carré du centre à plat sur la table et en amenant les quatre sommets de la feuille vers le haut, au centre. Aplatir les volets le long des faces triangulaires de la pyramide si nécessaire.

(12) La pyramide est terminée !

3. Exploration mathématique

Quelles sont les dimensions de la pyramide obtenue par pliage d'une feuille de papier carrée de dimensions données ? Autrement dit, nous cherchons le côté c de la base ainsi que la hauteur h de la pyramide.

Pour explorer la pyramide, des allers-retours entre la pyramide pliée, la feuille dépliée et un dessin en perspective de la pyramide aident à visualiser la situation. On peut proposer aux élèves de directement mettre en couleurs certaines longueurs sur le carré de papier.

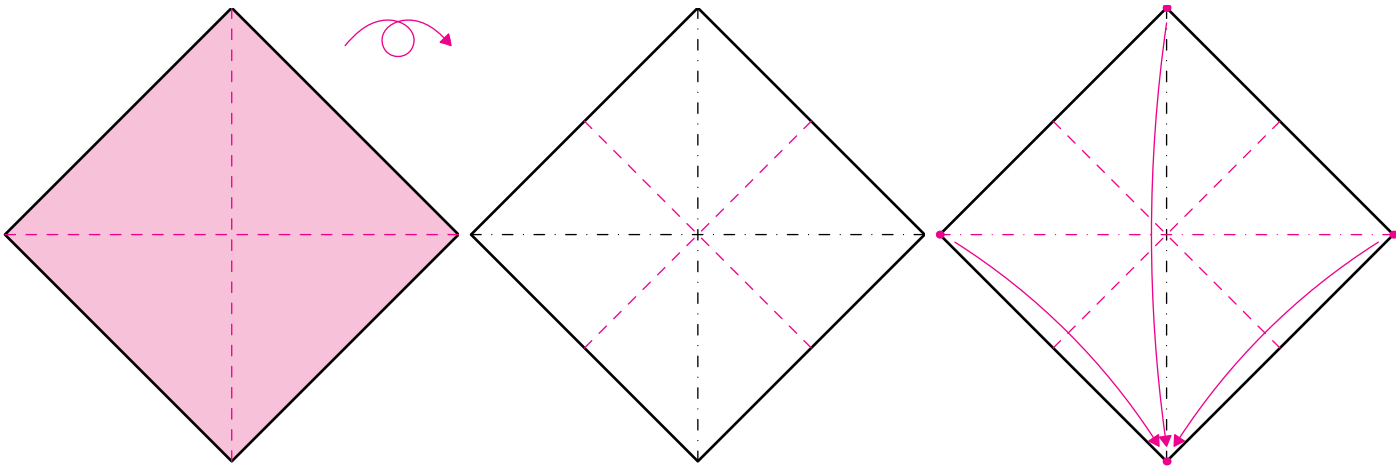
3.1. Détermination des dimensions de la base de la pyramide

Pour fixer les choses, notons a le côté de la feuille de papier carrée dans laquelle on réalise le pliage.

Le côté c se repère facilement sur la pyramide et par suite sur la feuille de papier dépliée. Essayons de dé-

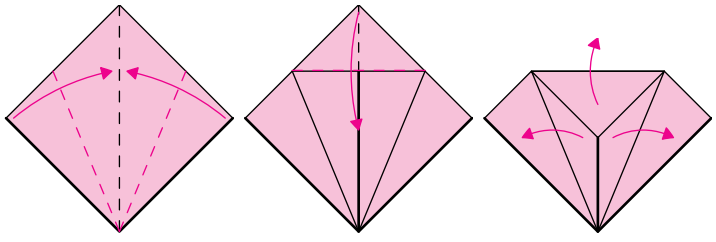
Pyramide en origami

Une pyramide à base carrée en origami

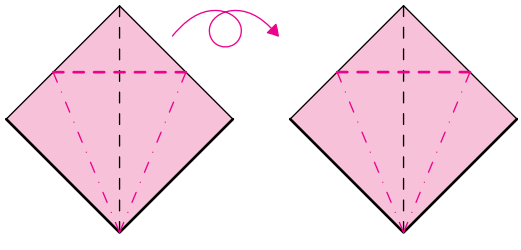


(1) (2) (3)

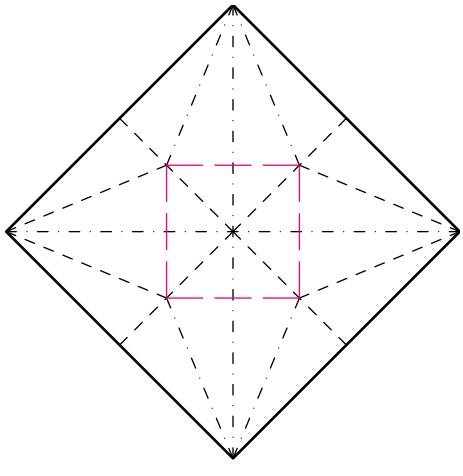
(4) **Base préliminaire**



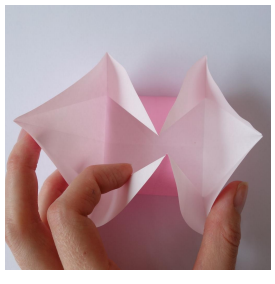
(5) (6) (7)



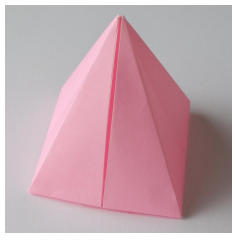
(8) (9)



(10) **Feuille dépliée**

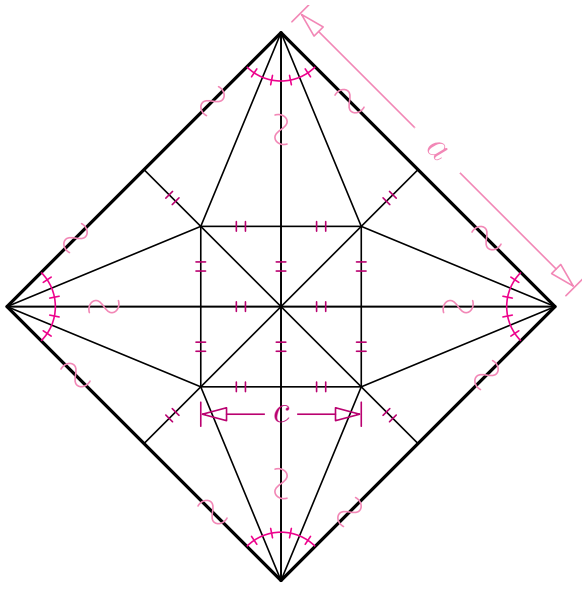


(10)



(11) **La pyramide**

terminer sa mesure. Un bon réflexe est de coder le dessin de la feuille dépliée, comme sur la figure suivante. L'isométrie des différents mesures se justifie par construction : on a plié les axes de symétrie du carré et des triangles rectangles ont été construits par superposition par groupes de quatre.



La construction de la figure sur une feuille de cahier, avec les instruments classiques tels que l'équerre géométrique, permet d'expliciter à quel objet géométrique correspond chaque pli, et notamment de mettre en évidence les bissectrices d'angles de 45°. Le codage minutieux de la figure permet aussi d'éviter une erreur fréquente : on pourrait à première vue imaginer que les sommets du petit carré au centre sont situés au milieu des demi-médianes du grand carré.

Résolution par calculs d'aire

La feuille carrée $ABCD$ ressemble ainsi à un puzzle constitué du carré formant la base de la pyramide et de seize triangles rectangles isométriques.

On peut comparer l'aire du puzzle complet, avec la somme des aires des différentes parties. On obtient ainsi la relation

$$a^2 = c^2 + 16 \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{c}{2}}{2},$$

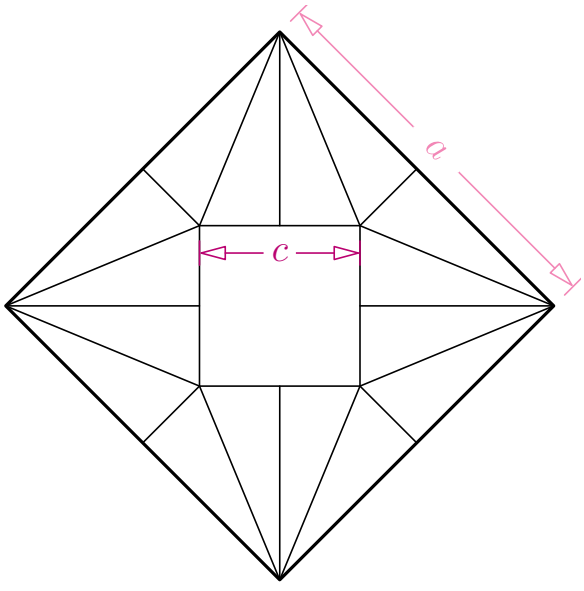
qui se simplifie en

$$a^2 = c^2 + 2ac.$$

En résolvant par rapport à c, on trouve

$$c = (\sqrt{2} - 1)a.$$

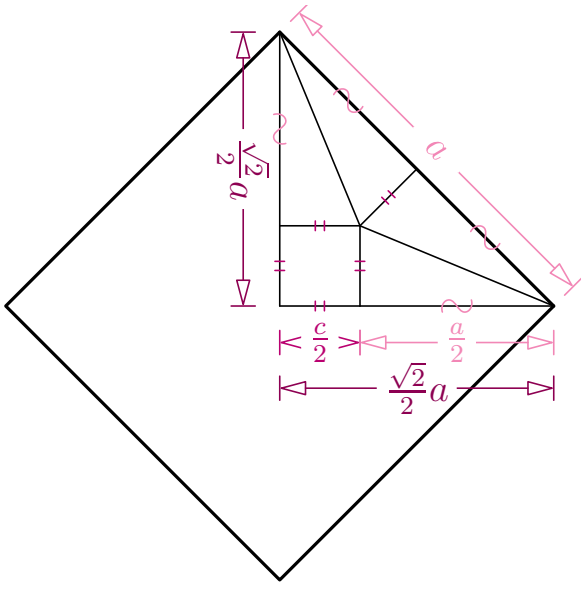
On trouve également $c = -(1 + \sqrt{2})a$, mais cette dernière solution est négative et doit donc être rejetée.



Cette première résolution ne fait appel qu'à des notions géométriques de base : les formules d'aire du carré et du triangle (ici un triangle rectangle), et à la résolution d'équations du second degré (par une complétion de carré ou la formule générale).

Résolution par la demi-diagonale

On peut aussi remarquer que la demi-diagonale du grand carré mesure la somme de la moitié de c et la moitié de a.



Puisque la demi-diagonale d'un carré de côté a mesure $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, on obtient la relation

$$\frac{c}{2} + \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

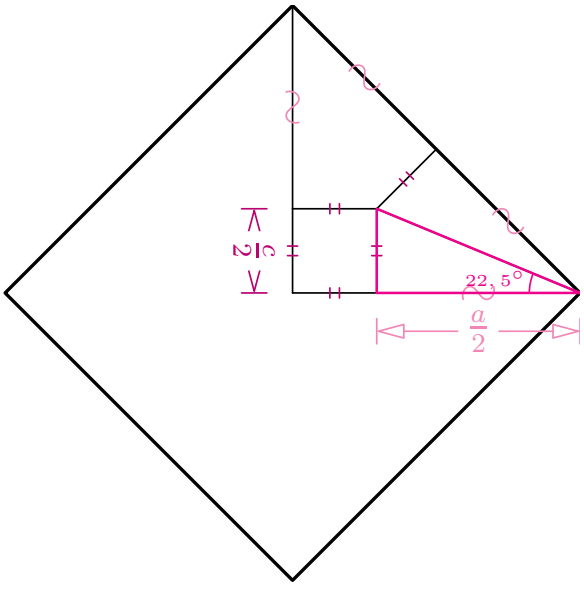
On retrouve ainsi, comme pour la première résolution,

$$c = (\sqrt{2} - 1)a.$$

Pour cette seconde résolution, on utilise le rapport de $\sqrt{2}$ entre la diagonale d'un carré et son côté. Ce rapport peut être déterminé à l'aide du théorème de PYTHAGORE, ou bien simplement à nouveau par le biais d'un calcul d'aires : l'aire d'un carré en fonction de son côté, ou l'aire du même carré vu comme un losange en fonction de ses diagonales.

Résolution par la trigonométrie

On peut aussi exploiter le fait que l'angle aigu de chacun des seize triangles isométriques mesure $22,5°$.



On peut écrire $\tan 22,5° = \frac{c/2}{a/2}$, dont on tire

$$c = a \tan 22,5°.$$

En troisième ou quatrième secondaire, les élèves ne connaissent en général pas la valeur exacte de $\tan 22,5°$. On peut en trouver une valeur approchée telle que $0,4142\ldots$ avec la calculatrice.

Au détour d'un pliage, la tangente du quart d'un angle droit...

De ce qui précède, on peut donc conclure que

$$\tan 22,5° = \sqrt{2} - 1.$$

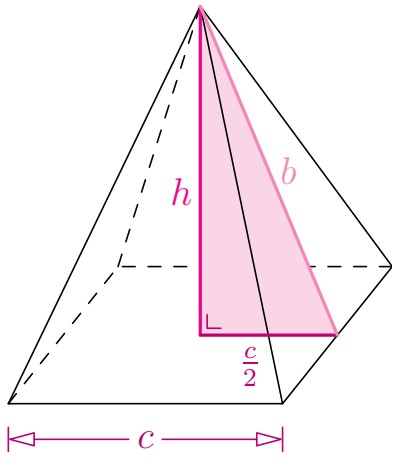
Autrement dit, nous avons déterminé la valeur exacte de $\tan 22,5°$ à l'aide d'une comparaison de deux calculs d'aires (ou d'une application du théorème de PYTHAGORE) dans la figure correspondant au pliage de la pyramide ! Pour se rassurer tout à fait sur l'exactitude des calculs réalisés, on peut comparer les valeurs numériques données par la calculatrice pour $\tan 22,5°$ et $\sqrt{2} - 1$.

Nous reviendrons à la section 4 sur différentes méthodes qui peuvent être utilisées pour déterminer la valeur exacte de $\tan 22,5°$.

3.2. Détermination de la hauteur de la pyramide

Contrairement au côté de la base, on ne peut pas repérer sur la feuille dépliée la hauteur de la pyramide. On peut visualiser cette hauteur à l'aide d'une pique à brochette glissée à l'intérieur de la pyramide. Cette observation de la pyramide en trois dimensions peut aider à identifier deux triangles rectangles qui permettront, l'un ou l'autre, de déterminer la hauteur h à l'aide du théorème de PYTHAGORE. Le repérage de l'un ou l'autre triangle rectangle et l'expression de la relation donnant h en fonction de c et a à l'aide du théorème de PYTHAGORE sont des étapes intéressantes. Nous verrons néanmoins que le développement de cette expression permettant de trouver la valeur exacte de la hauteur est assez fastidieux. On pourrait préférer travailler de manière numérique avec les élèves, en veillant à la gestion des arrondis.

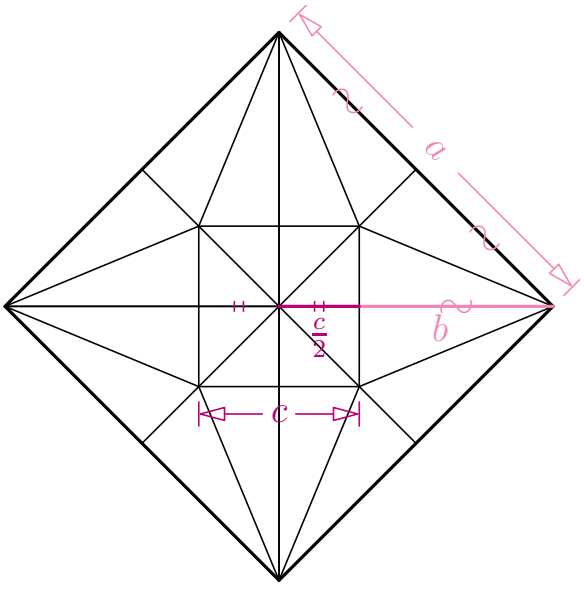
Résolution via un premier triangle rectangle



En notant comme sur le dessin ci-dessus b la hauteur d'une face latérale, le théorème de Pythagore nous donne

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Pour déterminer ce que vaut b, il suffit d'ouvrir le pliage et d'observer la feuille dépliée préalablement codée : b n'est rien d'autre que $a/2$.



On a donc

$$h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{(\sqrt{2}-1)a}{2}\right)^2$$
$$= \frac{a^2}{4}(1-(2+1-2\sqrt{2})) = \frac{\sqrt{2}-1}{2}a^2.$$

On en tire

$$h = a\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = a\,\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2},$$

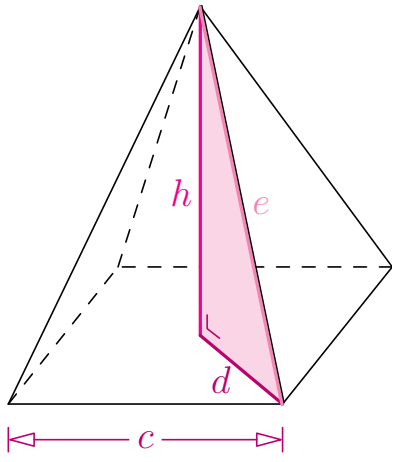
ou encore

$$h = a\sqrt{\frac{\tan 22,5^\circ}{2}}.$$

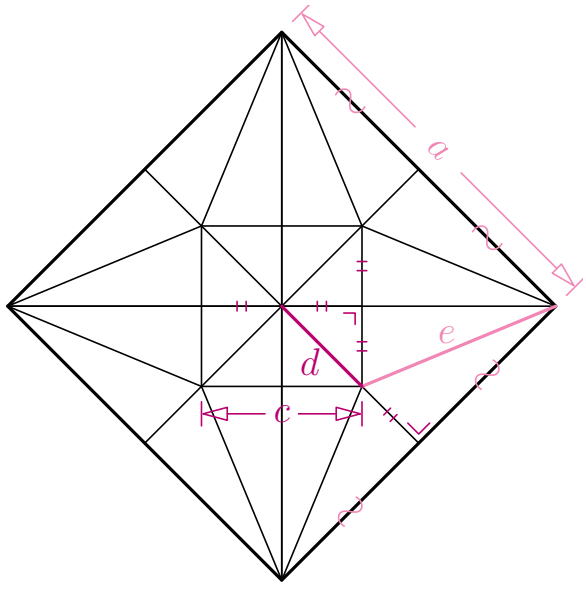
Résolution via un second triangle rectangle

On peut également visualiser un autre triangle rectangle. En notant d la demi-diagonale de la base carrée de la pyramide et e une arête de la pyramide comme ci-dessous, on obtient par Pythagore

$$h^2 = e^2 - d^2.$$



On a en outre $d^2 = 2\left(\frac{c}{2}\right)^2$ et $e^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$.



On a donc

$$h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

ce qui nous ramène aux calculs que nous avons faits en considérant l'autre triangle rectangle.

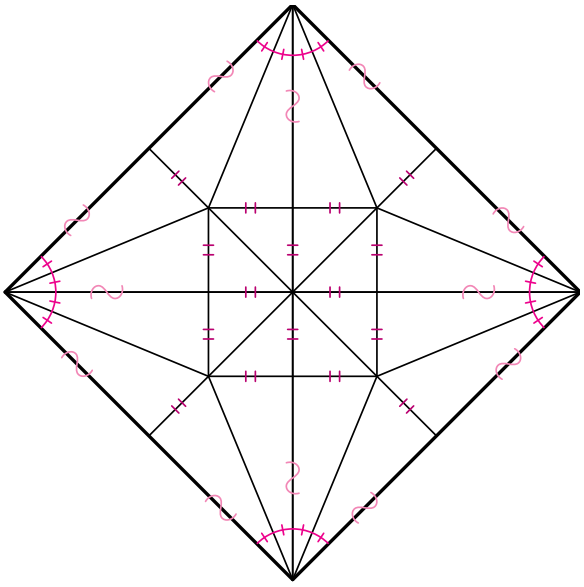
4. Retour sur le calcul de la valeur exacte de $\tan 22,5^\circ$

Détermination de la valeur exacte de $\tan 22,5^\circ$ via le motif des plis de la pyramide

Nous avons vu à la section 3.1 qu'on pouvait établir que

$$\tan 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$$

à l'aide d'une comparaison de deux calculs d'aires ou d'une application du théorème de PYTHAGORE dans la figure correspondant au pliage de la pyramide.



Cette méthode est simple et élégante, mais n'est malheureusement pas transférable à d'autres angles.

Détermination de la valeur exacte de $\tan 22,5°$ via une formule de duplication

Habituellement, pour déterminer $\tan 22,5°$, on utilise une formule de duplication comme

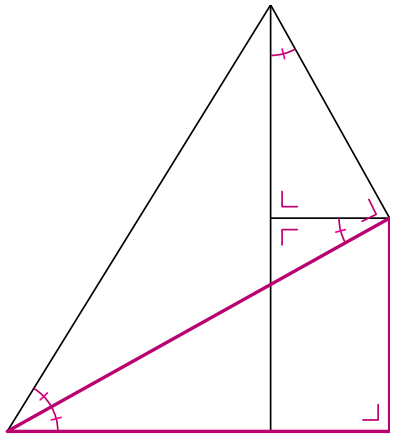
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-(\tan\alpha)^2},$$

ce qui, en prenant $\alpha = 22,5°$, et sachant que $\tan 45° = 1$, donne

$$1 = \frac{2\tan 22,5°}{1-(\tan 22,5°)^2},$$

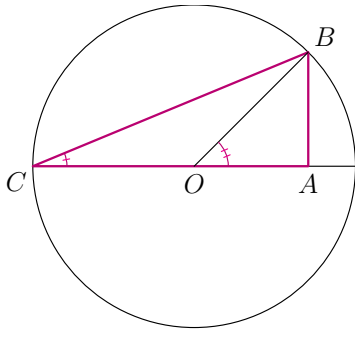
ou encore $(\tan 22,5°)^2 + 2\cdot\tan 22,5° = 1$. Dès lors, par résolution d'une équation du second degré en $\tan 22,5°$, on trouve bien $\tan 22,5° = \sqrt{2}-1$ (on exclut la racine négative de l'équation, vu que $22,5°$ est situé dans le premier quadrant trigonométrique). La formule générale de duplication peut être prouvée en établissant d'abord les formules d'addition du sinus et du cosinus ou en se basant sur la figure suivante.

Cette méthode est transférable à d'autres angles qui sont moitiés d'angles dont les nombres trigonométriques sont connus.



Détermination de la valeur exacte de $\tan 22,5°$ via le théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre

Si on souhaite déterminer la tangente d'un angle moitié sans se plonger dans les formules d'additions et leurs preuves, on peut utiliser le théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre [5] : un angle inscrit à un cercle mesure la moitié de l'angle au centre interceptant le même arc de cercle.



Dans le cas qui nous intéresse, en se plaçant dans un cercle de rayon 1, on a

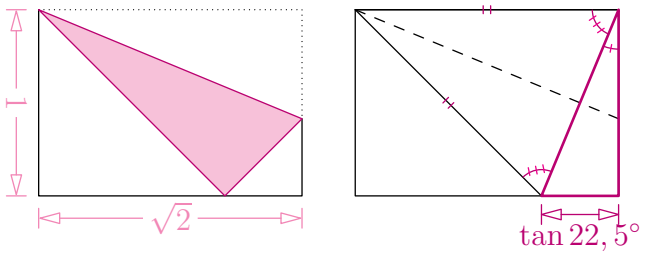
$$\begin{aligned}\tan 22,5° &= \frac{|AB|}{|AO|+|OC|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{4-2}\\ &= \sqrt{2}-1.\end{aligned}$$

Cette méthode est également transférable à d'autres angles qui sont moitiés d'angles dont les nombres trigonométriques sont connus.

Détermination de la valeur exacte de $\tan 22,5°$ via un pliage dans une feuille A4

En cherchant sur le web des méthodes alternatives permettant de déterminer $\tan 22,5°$, je suis tom-

bée sur une preuve sans mots de Grégoire Nicollier [3] sur le blog *Cut The Knot* de Alexander Bogomolny.

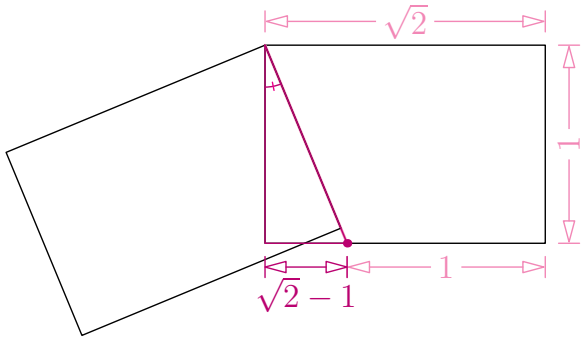


Cette preuve repose sur le fait que les côtés d'un rectangle de format A4 sont dans un rapport $1 : \sqrt{2}$ (voir par exemple [12, 10]).

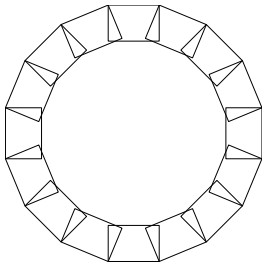
Ici non plus, comme dans la méthode liée au pliage de la pyramide, la méthode n'est pas transférable à d'autres angles.

Conjecture de la valeur exacte de $\tan 22,5°$ via une rosace réalisée avec 16 feuilles A4

Sur son blog *mathrecreation*, Dan MacKinnon [7] propose de réaliser une rosace en positionnant des feuilles A4 de la manière suivante les unes par rapport aux autres :



Il remarque qu'avec 16 feuilles A4 disposées de cette manière, la rosace se referme.



Cela signifierait que l'angle représenté ci-dessus mesurerait $\frac{360°}{16} = 22,5°$. On en déduirait que $\tan 22,5° = \sqrt{2} - 1$. Tel que présenté sur le site, néanmoins, le fait que la rosace se referme n'est que constaté par l'expérience, et pas démontré.

Pour en savoir plus

[1] *Origamimaths. Des pliages en classe de mathématiques.* http://origamimaths.blogspot.be/.

[2] Benoît, *Une pyramide à base carrée en origami.* Sur : Origamaths, htpps://youtu.be/uuXOLJ6quHs.

[3] Bogomolny A., *Tangent of 22.5° – Proof Without Words (G. Nicollier).* sur : Cut The Knot, http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Tangent225.shtml.

[4] Boursin D. et Larose V., *Pliages et mathématiques, ACL.* Les Éditions du Kangourou, 2000. pp. 34–37.

[5] Gem, *De question en question. Mathématiques 3.* Éditions Didier Hatier, 1996. pp. 93–96.

[6] Gioé J., *Origamis et mathématiques. Problèmes à composer.* http://origami.c.la/.

[7] MacKinnon D., *A4 window patterns ans special triangles.* sur : mathrecreation, http://www.mathrecreation.com/2011/11/a4-window-patternrs-and-special.html.

[8] mouvement français des plieurs de papier, *Solfège du plieur.* http://mfpp-origami.fr/origami/.

[9] Ninove L. et Wettendorf I., Variations à partir d'un oiseau en origami (partie 1). *Losanges*, n°35, pp. 3–10., décembre 2016.

[10] Ninove L., *Fabuleux papier A4.* sur : OrigamiMaths. Des pliages en classe de mathématiques, http://origamimaths.blogspot.be/2016/04/fabuleux-papier-a4.html.

[11] Ninove L., *Une pyramide à base carrée.* sur : OrigamiMaths. Des pliages en classe de mathématiques, http://origamimaths.blogspot.be/2017/07/une-pyramide-base-carree.html.

[12] Wantiez P. et Ninove L., Exploiter le pliage pour démontrer au milieu du secondaire. *Losanges*, n°20, pp. 32–42., mars 2013.

Laure Ninove est maître-assistante à la Haute École Vinci - ENCBW et membre du GEM.
laure.ninove@gmail.com.