Problèmes de gouttière

Marie-France Guissard et Isabelle Wettendorff

Mots clés : Manipulations, modélisation, optimisation

Résumé. *Cet article propose plusieurs versions d'un même problème d'optimisation qui consiste à déterminer la forme et les dimensions d'une gouttière de volume maximum construite à partir d'une feuille de zinc de 21 cm de large. Plusieurs types de gouttières, qui diffèrent par la forme de la section, sont explorés. Les variables qui s'imposent dans les différents cas amènent les élèves à explorer les extrema d'une fonction quadratique, d'une fonction irrationnelle, ou encore d'une fonction trigonométrique. Une version plus générale du problème débouche sur une première rencontre avec un problème à deux variables.*

1. Présentation du problème

Lors d'une recherche intitulée *Math & Manips*, le CREM s'est intéressé à des problèmes d'optimisation dans un contexte géométrique, avec pour support des feuilles de papier à plier pour réaliser des boîtes ([1], [2] et [3]). À cette occasion, les chercheurs de l'équipe ont exploré de nombreux problèmes et ont constaté qu'il n'est pas toujours facile de trouver des problèmes d'optimisation adaptés à des classes de différents niveaux. C'est souvent la phase de modélisation qui est la plus difficile. Le problème présenté ici n'a pas été repris dans les travaux précédents mais il a paru intéressant de le développer car il admet plusieurs variantes, certaines très simples, accessibles à tous les élèves, et d'autres nettement plus complexes. De plus, une manipulation de courte durée au moyen d'une feuille A4 facilite l'entrée dans la démarche de modélisation aux élèves qui en éprouvent le besoin, et les aide à mieux percevoir les enjeux de l'optimisation.

Le contexte du problème est la construction d'un tronçon de gouttière à partir d'une feuille de zinc rectangulaire de 21 cm de large. Pour ce faire, on plie la feuille parallèlement à sa longueur comme le montre la figure 1.

Rien n'indique *a priori* que les pliures doivent être à la même distance des deux côtés de la feuille, ni que les angles formés par les parois et le fond sont les mêmes des deux côtés.

Les élèves peuvent utiliser une feuille A4 pour se rendre compte de la multitude des pliages possibles. Cette rapide manipulation peut les aider à prendre conscience des différentes variables qui entrent en ligne de compte, et à percevoir que les différents morceaux de gouttière (de même longueur) ainsi réalisés n'ont pas tous la même capacité.

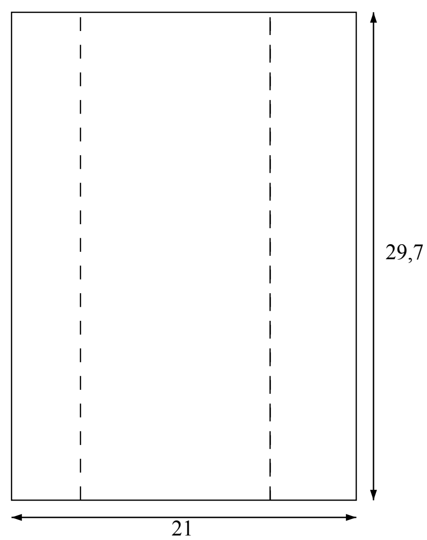

Fig. 1 : Pliage de la feuille

Après cette phase d'exploration, on pose le problème d'optimisation comme suit :

Quelle est la gouttière de capacité maximale qu'on peut obtenir en pliant une feuille de zinc de 21 cm de large parallèlement à sa longueur ?

Avec si peu de contraintes, le problème n'est pas accessible aux élèves du secondaire. Il est intéressant qu'ils en prennent conscience et réclament d'eux-mêmes une contrainte supplémentaire. Rien n'empêche alors de « recadrer » un peu le problème pour limiter le nombre de variables.

Une autre difficulté est de comprendre que, pour construire une gouttière de capacité maximum, il faut maximiser l'aire de la section perpendiculaire à la longueur de la gouttière. Les élèves doivent réaliser que, pour une feuille de zinc de longueur L, c'est l'aire de la section qui détermine la capacité, puisque le volume de la gouttière est celui d'un prisme de hauteur L. La longueur de la gouttière importe peu, c'est bien l'aire de la section qu'il faut maximiser. Ce passage n'est pas nécessairement évident pour tous, certains élèves auront besoin de résoudre une première version du problème avec la longueur L fixée pour passer ce cap.

Voici quelques cas particuliers, de difficultés croissantes, les premiers ne faisant appel qu'à des mathématiques assez élémentaires.

2. Gouttière à section rectangulaire

En pliant à angle droit, parallèlement à la longueur, les deux bords d'une bande de zinc de 21 cm de large, on forme une gouttière. Déterminer les hauteurs des bords pour que la capacité de la gouttière soit maximale.

2.1. Longueur fixée

Dans un premier temps, on s'intéresse à un tronçon de gouttière de quatre mètres de long, par exemple.

Il est présupposé que le fond de la gouttière est horizontal. Dans ce contexte, les élèves sont immédiatement persuadés que les hauteurs des deux bords, notées *bg* et *bd* sur la figure 2, doivent être égales.

En effet, dans le cas contraire, l'eau déborderait aussitôt que le niveau aurait atteint le bord le moins haut.

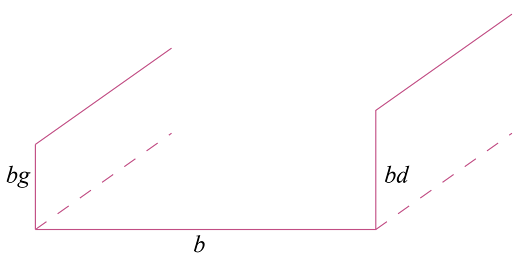

Fig. 2 : Symétrie du pliage

Dans ce cas, il y aurait du zinc « non utilisé » de l'autre côté. Si on divisait en deux la partie excédentaire pour la mettre de l'autre côté, on augmenterait la capacité de la gouttière. De cette remarque, on déduit que les deux bords doivent être de même hauteur, celle-ci est notée h dans la suite.

La capacité de la gouttière se calcule alors par la formule du volume d'un parallélépipède rectangle,

$$V = B \cdot h$$

La hauteur à déterminer, h sera donc naturellement la variable. On exprime alors les dimensions de la base en fonction de cette seule variable. La base sera de largeur $b = 21 - 2h$ et de longueur $L = 400$.

On obtient ainsi pour le volume la fonction

$$V(h) = 400(21 - 2h)h = 400(-2h^2 + 21h)$$

dont il faut rechercher pour quelle valeur de h elle est maximum. Notons que les élèves qui auront compris d'emblée que c'est l'aire de la section qui détermine la capacité ne passeront pas par cette étape, indispensable pour d'autres.

Le volume V est une fonction du second degré en h, son graphique est une parabole dont la concavité est tournée vers le bas. Les élèves peuvent la représenter, éventuellement au moyen d'un logiciel de dessin, et remarquer que la valeur maximum de $V(h)$ se trouve au sommet de la parabole. C'est aussi l'occasion de rechercher la partie du graphique qui correspond au problème et d'interpréter les valeurs limites $h = 0$ et $h = 10{,}5$. Il reste à comprendre que c'est l'abscisse du sommet qui fournit la valeur de h qui réalise en ordonnée le maximum de $V(h)$.

La réponse à la question posée est donc une gouttière dont la largeur de la base est 10,5 cm et dont les deux bords verticaux mesurent 5,25 cm.

2.2. Longueur indéterminée

Et s'il s'agit d'une feuille de zinc de 21 cm de large et de longueur L ?

À ce stade, il devrait être clair que si on remplace 400 par une autre longueur L, la solution du problème ne change pas. Il faudra s'assurer que les élèves ont pris conscience que c'est la valeur de h maximisant la fonction $S(h) = -2h^2+21h$ qui fournit la solution au problème, et que cette dernière fonction représente l'aire de la section de la gouttière perpendiculairement à la longueur.

Cette première version est à la portée d'élèves de quatrième qui ne connaissent pas la dérivée. Elle pourrait constituer une première approche d'un problème d'optimisation, sous forme de la recherche d'un sommet d'une fonction du second degré.

3. Gouttière à section trapézoïdale (pliage en trois parties égales)

En pliant deux fois, aux tiers de sa largeur, une feuille de zinc de 21 cm de large parallèlement à sa longueur, de façon symétrique, on peut obtenir une gouttière. Quelle est la gouttière de capacité maximale ?

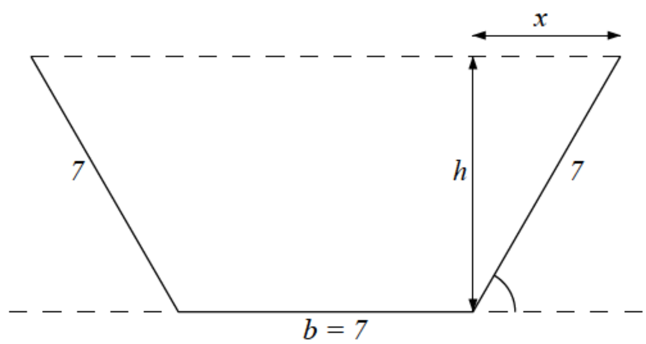

Fig. 3 : Pliage en trois parties égales

La longueur de la feuille est indéterminée, la question doit être reformulée en terme de section trapézoïdale de surface maximale.

La figure 3 illustre la situation et met en évidence trois variables possibles pour exprimer la fonction à maximiser :

- h, la hauteur de la section trapézoïdale isocèle,
- x, la longueur de la projection de la paroi oblique de la gouttière sur la direction horizontale,
- θ, l'angle aigu formé par l'horizontale et le bord de la gouttière.

Les deux premiers choix de variable débouchent sur des fonctions irrationnelles, le troisième sur une fonction trigonométrique. Dans la suite, les calculs sont développés pour les variables h et θ.

3.1. En fonction de la hauteur

Exprimons l'aire de la section trapézoïdale en fonction de la variable h. La section est un trapèze dont la petite base mesure le tiers de la largeur de la feuille, soit 7 cm et sa grande base B vaudra $7+2x$ comme le montre la figure 3. La variable x peut s'exprimer en fonction de h grâce au théorème de Pythagore :

$$x = \sqrt{7^2 - h^2}.$$

On obtient ainsi comme formule pour l'aire A du trapèze isocèle :

$$A(h) = \frac{(7+2\sqrt{7^2-h^2})+7}{2}h = 7h + h\sqrt{7^2-h^2}$$

Les valeurs admissibles pour h sont bien celles appartenant à l'intervalle $[0,\ 7]$. La valeur $h=0$ correspond à une gouttière plate (qui présente peu d'intérêt, elle correspond à la section d'aire nulle) et la valeur $h=7$ correspond à un gouttière à section carrée.

En calculant la dérivée de $A(h)$, on obtient :

$$A'(h) = \frac{1}{\sqrt{7^2-h^2}}(7\sqrt{7^2-h^2}+7^2-2h^2)$$

La recherche des valeurs où $A'(h)$ s'annule revient à résoudre l'équation

$$7\sqrt{7^2-h^2}+7^2-2h^2=0$$

ce qui donne pour la hauteur de la gouttière

$$h = \pm 7\frac{\sqrt{3}}{2},$$

dont on rejette la valeur négative. Il reste à justifier qu'on a ainsi obtenu la hauteur h de la gouttière qui réalise l'optimum demandé.

L'angle θ peut être calculé :

$$\sin\theta = \frac{h}{7} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et donc} \quad \theta = 60^o.$$

3.2. En fonction de l'angle

Si on choisit comme variable l'angle θ que forme le bord de la gouttière avec la base, h et x s'obtiennent à l'aide des formules trigonométriques dans un triangle rectangle

$$h = 7\sin\theta,$$

$$x = 7\cos\theta,$$

ce qui donne

$$B = 7 + 2\cdot 7\cos\theta$$

pour la grande base B du trapèze.

On obtient ainsi comme formule pour l'aire A du trapèze isocèle :

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \frac{(7 + 2 \cdot 7\cos\theta) + 7}{2} 7\sin\theta \\ &= 7^2(1+\cos\theta)\sin\theta \end{aligned}$$

Les valeurs de θ susceptibles de fournir une solution appartiennent à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$. La valeur 0 a été écartée car elle correspond à une gouttière plate (section d'aire nulle) et si l'on dépasse la valeur de l'angle droit, l'aire de la section de la gouttière sera de toute façon inférieure à celle du carré.

En dérivant $A(\theta)$, on obtient :

$$A'(\theta) = 7^2(-\sin^2\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta).$$

La recherche des valeurs de θ qui annulent $A'(\theta)$ amène, par exemple, à résoudre l'équation

$$\cos 2\theta = -\cos\theta$$

ou encore l'équation du second degré en $\cos\theta$

$$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0.$$

La solution qui correspond à l'angle plat, est à rejeter, l'autre solution est l'angle de $\frac{\pi}{3}$ radians ou 60^o.

Là encore, il faudra justifier que cette valeur $\theta = 60^o$ nous fournit bien le maximum demandé.

La hauteur peut aussi être calculée :

$$h = 7\cos\theta = 7\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'enseignant peut s'arranger pour que, dans la classe, certains élèves (ou groupes d'élèves) résolvent le problème en utilisant la variable h (ou x), et d'autres la variable θ (ou encore l'angle complémentaire de θ formé par la paroi latérale de la gouttière avec la verticale). Il est alors intéressant de rassembler tous les résultats et de faire prendre conscience aux élèves de la variété des chemins pour résoudre le problème, tous conduisant à la même gouttière de capacité maximale.

4. Gouttière à section trapézoïdale (pliage symétrique)

En pliant deux fois une feuille de zinc de 21 cm, parallèlement à sa longueur, de façon symétrique (mais pas nécessairement au tiers de sa largeur), on peut obtenir une gouttière. Quelle est la gouttière de capacité maximale ?

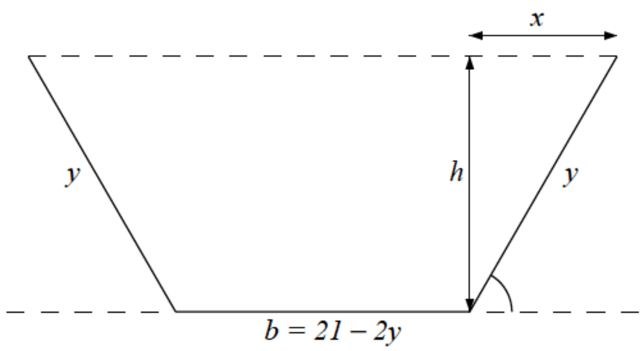

Fig. 4 : Pliage symétrique

La figure 4 met en évidence une variable supplémentaire par rapport au problème précédent : la longueur des bords de la gouttière, notée y. La seule contrainte sur cette variable est qu'elle soit strictement plus grande que 0 et strictement inférieure à 10,5 (cm). Ce sont les mêmes valeurs admissibles que celles de h dans la première version du problème.

Nous avons donc ici un problème à deux degrés de liberté. L'aire de la section trapézoïdale est bien fonction des deux variables y et au choix : x, h ou θ (ici encore, il y a d'autres choix possibles).

L'expression de la surface trapézoïdale se déduit aisément du cas précédent. En effet, il suffit de comparer les figures 3 et 4 pour déduire que

$$b = 21 - 2y, \quad x = y\cos\theta \quad \text{et} \quad h = y\sin\theta.$$

Ceci amène à exprimer l'aire en fonction des deux variables y et θ :

$$\begin{aligned} A(y,\theta) &= \frac{(21-2y) + (21-2y) + 2y\cos\theta}{2} y\sin\theta \\ &= (21 - 2y + y\cos\theta)y\sin\theta \end{aligned}$$

Les variables y et θ sont indépendantes, il n'y a pas de contraintes les liant, directement ou indirectement. L'étape de modélisation est ainsi achevée.

4.1. Illustration graphique

La figure 5 montre la fonction de deux variables y et θ dans un espace à trois dimensions ainsi que le plan tangent horizontal au sommet de la surface.

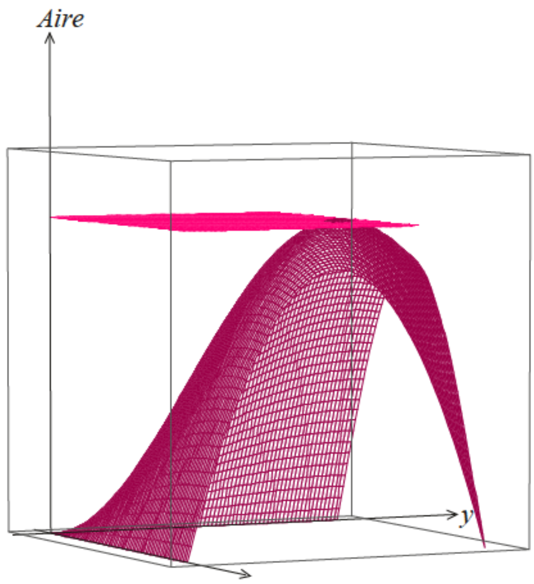

Fig. 5 : Fonction de deux variables

Le graphique d'une fonction f à deux variables (dénommées x et y) peut être obtenu sur internet en introduisant dans la fenêtre de recherche de Google « grapheur de z=f(x,y) ». On obtient par exemple *Grapheur 3D* qui réalise le graphique demandé. Il suffit d'introduire l'expression de la fonction sous la forme $z = f(x, y)$ dans une fenêtre prédéfinie pour obtenir un premier graphique. Un bouton « SYNTAXE » fournit l'aide nécessaire. Le graphique peut ensuite être modifié en précisant les bornes des intervalles de variation de la valeur de la fonction et des variables. Le point de vue sur la surface obtenue peut encore être modifié en la faisant pivoter à la souris.

4.2. Résolution

L'enseignant peut signaler aux élèves qu'il existe des techniques, notamment certaines qui prolongent celles de la dérivée pour obtenir les extrema de fonctions à plusieurs variables. Dans certaines classes scientifiques, il n'est pas exclu de mener à bien cette résolution, même si toutes les justifications ne sont pas fournies. Cela donne aux élèves une perspective vers les questions mathématiques plus avancées auxquelles le cours d'analyse du secondaire les prépare.

La résolution nécessite d'introduire la notion de dérivée partielle et d'expliquer qu'il faudra résoudre le système d'équations obtenu en annulant simultanément les dérivées partielles par rapport à chacune des deux variables y et θ.

On calcule tout d'abord $\dfrac{\partial A(y,\theta)}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial A(y,\theta)}{\partial y} &= \\ &= (-2+\cos\theta)y\sin\theta + (21-2y+y\cos\theta)\sin\theta \\ &= \sin\theta(21-4y+2y\sin\theta)\end{aligned}$$

Cette première dérivée partielle s'annule si et seulement si $\sin\theta = 0$ ou $\cos\theta = \dfrac{4y-21}{2y}$. La première solution est rejetée car elle correspond à un angle θ nul ou plat, qui ne fournit pas une réponse au problème.

On calcule ensuite $\dfrac{\partial A(y,\theta)}{\partial \theta}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial A(y,\theta)}{\partial \theta} & \\ &= -y^2\sin^2\theta + (21-2y+y\cos\theta)y\cos\theta \\ &= y[2y\cos^2\theta + (21-2y)\cos\theta - y]\end{aligned}$$

Cette seconde dérivée partielle s'annule si et seulement si $y = 0$ (qu'on rejette également) ou $2y\cos^2\theta + (21-2y)\cos\theta - y = 0$.

On peut montrer que le discriminant de cette équation du second degré en $\cos\theta$ est positif et on obtient

$$\cos\theta = \frac{2y-21+\sqrt{21^2-84y+12y^2}}{4y}$$

en éliminant la valeur négative de $\cos\theta$.

Pour que les deux dérivées partielles soient nulles simultanément, il faut résoudre le système

$$\begin{cases}\cos\theta = \dfrac{4y-21}{2y} \\ \cos\theta = \dfrac{2y-21+\sqrt{21^2-84y+12y^2}}{4y},\end{cases}$$

ce qui amène à résoudre l'équation irrationnelle en y obtenue en éliminant θ :

$$2(4y-21) = 2y-21+\sqrt{21^2-84y+12y^2}$$

dont la solution admissible est $y = 7$ (on rejette à nouveau $y = 0$).

On obtient alors $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou 60^o.

Comme pour les fonctions d'une variable, il faut s'assurer que la solution ainsi trouvée réalise bien l'optimum demandé, l'annulation simultanée des deux dérivées partielles étant une condition nécessaire mais non suffisante. L'enseignant peut à cette occasion évoquer le « point de selle » comme généralisation du point d'inflexion.

C'est donc le pliage en trois parties égales avec l'angle de 60^o qui réalise la gouttière de capacité maximale.

5. Conclusion

Ces différentes versions du problème de la gouttière ont chacune leur intérêt et leur spécificité.

La gouttière à section rectangulaire fournit une première approche d'un problème d'optimisation, avec la phase de modélisation facilitée par une courte manipulation d'une feuille A4. Il peut être résolu par des élèves de cinquième année en calculant la dérivée d'une fonction du second degré, mais peut déjà être proposé à des élèves de quatrième année puisque la solution est fournie par le sommet d'une parabole.

Le problème de la gouttière à section trapézoïdale, avec le pliage en trois parties égales, nécessite l'utilisation de la dérivée. Il convient à des élèves de cinquième année capables de calculer la dérivée d'une fonction irrationnelle ou d'une fonction trigonométrique, et aussi de résoudre une équation irrationnelle ou trigonométrique. Il présente l'avantage de montrer la multiplicité des approches selon le choix de la variable. Il est intéressant de comparer toutes ces approches et de vérifier qu'elles conduisent bien à la même solution, ce qui n'est pas évident d'emblée, puisque la solution peut s'exprimer relativement à des variables différentes.

Quant au problème plus général du pliage symétrique, probablement plus adapté aux sections « scientifiques », il ouvre des perspectives vers les fonctions à plusieurs variables et donne l'occasion d'introduire le calcul d'une dérivée partielle.

Pour en savoir plus

[1] CREM, *Math & Manips, des manipulations pour favoriser la construction des apprentissages en mathématiques*, M.-F. GUISSARD et V. HENRY coordinatrices, CREM, Nivelles, 2017.
https://www.crem.be/publication/M&M

[2] CREM, Math & Manips pour le secondaire supérieur : problèmes d'optimisation. *Losanges*, n° 24, pp. 3—12, 2014.

[3] FANUEL J., GUISSARD M.-F. et WETTENDORFF I., Variations sur la boîte du pâtissier. *Losanges*, n° 28, pp. 21—30, 2015.

Marie-France Guissard est chercheur au CREM, Isabelle Wettendorff est chercheur à l'UNamur
mf.guissard@crem.be, isabellewettendorff@gmail.com

ASCM
L'Algèbre au Service du Calcul Mental

Le calcul mental se perd, et avec lui les innombrables petits trucs qui y sont tellement utiles. Pour justifier ceux-ci, nous utiliserons, bien souvent, un peu d'algèbre : par exemple l'une ou l'autre formule de produit remarquable. En classe, ceci peut être une source de motivation pour nos élèves : ces formules voient ainsi leur utilité confortée.

1 *Comment élever au carré un entier terminé par 5 ?*

Soit $N = 10n + 5$ l'entier proposé. Alors,

$$N^2 = 100n^2 + 100n + 25 = 100n(n+1) + 25.$$

Nous en déduisons la règle :

Pour élever au carré un entier terminé par 5, nous multiplions le nombre de dizaines par son successeur, et nous faisons suivre ce produit de 25.

Exemples :

- 65^2 : le nombre de dizaines est 6 ; son successeur est 7 ; leur produit est 42 ; ainsi, $65^2 = 4225$.
- 115^2 : le nombre de dizaines est 11 ; son successeur est 12 ; leur produit est 132 ; ainsi, $115^2 = 13225$.