# Production des premières expressions littérales dans le cadre des suites figurées

Mariza Grand'Henry-Krysinska

**Mots clés : Suites de figures, suites de nombres, tableaux de nombres, stratégies, algèbre, variable.**

**Résumé.** *La plupart des difficultés liées à l'apprentissage des débuts de l'algèbre se résument aux faits suivants : les élèves perçoivent les expressions algébriques comme vides de sens parce qu'ils ne participent pas à leur production et ils ne comprennent pas les manipulations formelles qui régissent ces expressions parce qu'ils ignorent qu'il y a une relation entre les manipulations algébriques et la substitution des valeurs numériques dans ces expressions. Dans l'article, on propose quelques situations relatives aux suites figurées qui favorisent la production des premières expressions littérales dont certaines seront équivalentes, des premières transformations respectant cette équivalence et des premières équations du type arithmétique.*

## Introduction

Les idées défendues dans cet article sont une forme de réaction aux constatations faites par nous-mêmes ou par des chercheurs en didactique selon lesquelles les élèves perçoivent souvent les expressions algébriques comme vides de sens parce qu'ils ne participent pas à leur production. De plus, on peut aussi observer que, fréquemment, les élèves ne comprennent pas les manipulations formelles qui régissent ces expressions parce qu'ils ignorent qu'il y a une relation entre les manipulations algébriques et la substitution des valeurs numériques dans ces expressions. La formalisation algébrique, en absence de sa finalité, a pour effet que les élèves se comportent selon un « code de bonne conduite ».

Cette absence de la finalité de l'algèbre initiale s'ajoute à la conception assez répandue de l'algèbre élémentaire qui est celle de la continuité entre l'arithmétique et l'algèbre car ces deux domaines utilisent des lettres et partagent les mêmes symboles et signes comme $+$, $-$, $\times$, $\div$, $=$. Or, une telle conception devient une source supplémentaire des difficultés des élèves car, selon le contexte, les lettres n'ont pas la même signification et les symboles ont des interprétations différentes.

Pour favoriser l'acquisition des compétences algébriques il faut donc donner du sens à l'algèbre en la faisant fonctionner comme outil de résolution des problèmes issus d'une modélisation intra ou extra mathématique. L'une des pistes possibles est l'exploitation de la régularité des suites figurées. Cette régularité va favoriser la production des premières expressions littérales dont certaines seront équivalentes, des premières transformations respectant cette équivalence et des premières équations du type arithmétique.

Dans la section 1, nous traitons une classe de problèmes relatifs aux suites figurées. Dans ce contexte, les élèves ont une occasion de produire eux-mêmes les premières expressions littérales, les utiliser « à l'envers » pour résoudre les premières équations arithmétiques, rencontrer les expressions équivalentes obtenues par les différentes méthodes de comptage et finalement mettre en place les premières transformations qui conservent ces équivalences – les transformations qui peuvent servir ultérieurement à produire d'autres expressions équivalentes.

Dans la section 2, nous présentons quelques épisodes du travail réalisés dans les classes d'élèves et relatifs aux questions traitées dans la section 1, avec les réactions des élèves analysées et commentées.

Dans la section 3, nous revenons aux situations de production des expressions dans le contexte de quelques propriétés des nombres pairs et impairs représentés par des suites figurées.

# 1. Premières expressions littérales pour modéliser quelques suites figurées

## 1.1. Production des expressions algébriques

*Question 1*
*Voici quelques suites d'objets. Dans chaque cas, on a une suite d'objets dont le nombre augmente à chaque étape. Pour chacune de ces suites on cherche à déterminer le nombre d'objets à chaque étape.*

### 1.1.1. Suite de maisons

*Déterminez le nombre d'allumettes utilisé à n'importe quelle étape, par exemple la 10^e^ étape ou la 37^e^ étape. À quelle étape utilisez-vous exactement 117 allumettes pour construire des maisons de cette suite ?*

1^re^ étape 2^e^ étape 3^e^ étape

Fig. 1

Dressons le tableau à deux entrées, le numéro d'étape et le nombre correspondant d'allumettes utilisées.

| Numéro d'étape | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ⋯ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'allumettes | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | ⋯ |

Tableau 1

Le programme de calcul lié à la figure 1 se prête à des interprétations multiples, à cause de deux entités discernables : maisons et allumettes. Voici trois stratégies possibles.

— On reconnaît la loi de passage d'une étape à l'autre qui consiste à ajouter toujours quatre allumettes. Ainsi, après un certain nombre d'étapes, le nombre d'allumettes ajoutées est un multiple de quatre. À la première étape, il y a cinq allumettes. Aux suivantes, il faut ajouter quatre allumettes autant de fois qu'il y a d'étapes moins une.

— On regarde la première maison au même titre que les autres : le comptage des maisons dicte celui des allumettes. À ceci près que toutes les maisons sont construites avec quatre allumettes sauf la première qui en comporte cinq.

— On observe que le nombre de maisons correspond au nombre d'étapes et que chaque maison utilise cinq allumettes ; on multiplie donc le nombre d'étapes par cinq. Mais comme deux maisons contigües possèdent une allumette commune comptée ici deux fois, on doit la retirer autant de fois qu'il y a de passages d'une maison à l'autre.

Comparons ces trois stratégies.

La première stratégie suit le comptage net : 5, 9, 13, ... En effet, on y retrouve les cinq allumettes de la première maison et les quatre allumettes ajoutées autant de fois qu'il y a d'étapes supplémentaires. Ce comptage privilégie la lecture horizontale de la suite qui se trouve dans la deuxième ligne du tableau 1.

La deuxième stratégie s'appuie sur un artifice qui consiste à décomposer les allumettes de la première maison en la somme d'une allumette et de quatre autres, ce qui permet de suivre le comptage des maisons.

La troisième stratégie suit ce comptage, mais, à la place de l'artifice, elle consiste à retirer les allumettes comptées en double. Dans ces deux derniers cas, la lecture verticale du tableau correspondant est privilégiée : le nombre d'étapes est égal au nombre de maisons, le nombre d'allumettes dépend du nombre de maisons.

La question « *À quelle étape utilisez-vous exactement cent dix-sept allumettes pour construire les maisons de cette suite ?* » force à penser à la structure générale du calcul. En effet, pour obtenir la réponse, il faut penser « à l'envers », c'est-à-dire, par exemple, soustraire 5 allumettes et diviser le nombre obtenu par 4 ce qui donne 28 étapes en plus de la première, soit 29 étapes, ou encore soustraire 1 allumette et diviser le nombre obtenu par 4 ce qui conduit à la même réponse. Pour raisonner ainsi, on a besoin d'un programme de calcul qui peut s'exprimer ici par trois manières différentes :

$$5 + 4 \cdot (\text{numéro d'étape} - 1)$$

ou

$$1 + 4 \cdot \text{numéro d'étape}$$

ou

$$5 \cdot \text{numéro d'étape} - (\text{numéro d'étape} - 1).$$

Parmi ces trois programmes de calcul, c'est le deuxième qui est le plus simple dans le calcul « à l'envers ».

### *Passage à l'écriture littérale*

L'introduction d'une lettre à la place du « numéro d'étape » peut être justifié par le besoin de transformer un programme de calcul en un autre plus simple qui lui est équivalent à l'aide des règles algébriques établies dans ce but. Ce passage à l'écriture littérale donne trois expressions algébriques $5+4\cdot(n-1)$, $1+4n$ et $5n-(n-1)$ qui sont équivalentes parce qu'elles fournissent le même nombre d'objets : en effet, elles correspondent aux trois comptages différents d'une même collection d'objets. L'équivalence de ces trois expressions est notée par une double égalité

$$5 + 4 \cdot (n-1) = 1 + 4n = 5n - (n-1).$$

Pour faire une économie de pensée, on a besoin de règles algébriques qui permettent de simplifier certaines expressions littérales sans nécessairement passer par la recherche des programmes de calcul équivalents plus simples. Cela peut être réalisé de la manière suivante.

— Les valeurs numériques des expressions littérales $5 + 4 \cdot (n - 1)$ ou $1 + 4n$ ou $5n - (n - 1)$ varient en fonction des valeurs de $n$.

— Pour une même valeur de $n$, les valeurs numériques de ces expressions sont les mêmes.

— Les règles algébriques qui permettent de transformer $5+4\cdot(n-1)$ en $1+4n$ (ou $5n-(n-1)$ en $1 + 4n$) sont choisies de telle manière qu'une valeur de l'expression $5 + 4 \cdot (n - 1)$ correspondant à une valeur de la variable $n$ ne soit pas modifiée par les transformations conformes à ces règles. Par exemple, à partir de $5 + 4 \cdot (n - 1) = 1 + 4n$, on établit la règle de « distribution » du facteur 4 sur chacun des termes de la parenthèse : $5 + 4 \cdot (n - 1) = 5 + 4n - 4$. On regroupe alors 5 et 4 ce qui nous conduit à $1 + 4n$. D'une manière analogue, l'égalité $5n-(n-1) = 1+4n$ permet d'établir la règle du changement de signe à l'ouverture d'une parenthèse précédée du signe moins : $5n - (n - 1) = 5n - n + 1$, et la règle du regroupement des termes semblables, $5n - n + 1 = 4n + 1$.

Ainsi, en choisissant les transformations algébriques qui conservent l'équivalence des expressions littérales sur base de leurs valeurs numériques, on met en place deux idées majeures de l'algèbre :

— on utilise la lettre $n$ dans le sens d'une variable ;

— on instrumentalise la lettre comme notation qui réduit un programme de calcul en une expression aisément transformable en d'autres expressions équivalentes.

### 1.1.2. Suite d'étoiles

*Combien d'étoiles y a-t-il à la 6e étape ? À une étape quelconque ?*


Fig. 2

La disposition des étoiles sur le dessin de la figure 2 est peu évocatrice. En effet, d'un premier regard, il est difficile de s'apercevoir que ce nombre double d'une étape à l'autre lorsque, comme nous l'avons dit plus haut, les étoiles sont disposées presque en quinconce. Reste le dénombrement net, assez parlant : 1, 2, 4, 8, . . .

Une autre disposition des étoiles (figure 3) suggèrerait immédiatement le doublement d'une étape à l'autre.

1re étape 2e étape 3e étape 4e étape

Fig. 3

À partir de là, si on tient compte de la structure du calcul, on pourra présenter le calcul sous forme du tableau suivant :

| Numéro d'étape | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'étoiles | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |

Tableau 2

Ce tableau ne permet pas de généraliser la démarche. Déjà, lorsqu'il s'agit du calcul relatif à la 37e étape, on est confronté à la longueur et à la lourdeur de celui-ci. Regardons de plus près le calcul du nombre d'étoiles à la 4e étape. Il y a plusieurs manières de l'envisager :

— 8 étoiles c'est le double des 4 étoiles de l'étape précédente et l'on peut facilement imaginer le double de 8, c'est-à-dire 16 à l'étape suivante ;

— mais 8 étoiles, c'est aussi $2 \cdot 2 \cdot 2$ ce qui s'écrit encore $2^3$, dès lors à la 5e étape, on aura $2^4$, ce qui nous conduit à la formule $2^{n-1}$ étoiles à la $n$e étape ;

— enfin, 8 c'est aussi $\frac{16}{2}$ ou $\frac{2^4}{2}$, de même 16 c'est $\frac{32}{2}$ ou $\frac{2^5}{2}$, ce qui se généralise sous la forme $\frac{2^n}{2}$.

Les deux derniers calculs supposent la disponibilité de la notation « puissance ».

Comme les formules $2^{n-1}$ et $\frac{2^n}{2}$ donnent le même nombre d'étoiles à chaque étape, cela laisse supposer que $2^{n-1} = \frac{2^n}{2}$ quelle que soit la valeur de $n$. Les deux formules sont donc équivalentes.

Cette équivalence nous force à admettre que $2^0$ est égal à 1. En effet, d'une part $\frac{2^1}{2} = 1$ et d'autre part $\frac{2}{2} = 1 = 2^{1-1} = 2^0$.

### 1.1.3. Suite de carrés en allumettes

*Combien d'allumettes y a-t-il à une étape quelconque ?*

$1^{\text{re}}$ étape  $2^{\text{e}}$ étape  $3^{\text{e}}$ étape

Fig. 4

Regardons le tableau avec les calculs pour voir si ce problème s'apparente à l'un des deux précédents.

| Numéro d'étape | 1 | 2 | 3 | 10 | 37 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'allumettes | 4 | 7 | 10 | 31 | 112 | $\cdots$ |

Tableau 3

Avec ou sans tableau, on peut s'apercevoir que, d'une étape à l'autre, on ajoute toujours trois allumettes. Comme dans le cas de la suite de maisons, on peut obtenir ici trois expressions algébriques équivalentes.

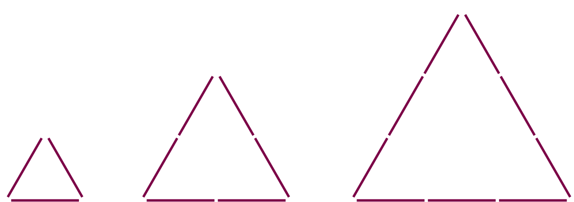
— Le premier terme est le nombre 4 et pour passer d'une étape à l'autre, on ajoute 3. L'expression algébrique qui tient compte de cela est $4 + (n - 1) \cdot 3$.
— On peut considérer, en plus, que le premier terme est la somme de 1 et de 3, ce qui apporte l'expression algébrique $1 + 3n$.
— Le nombre de carrés correspond au numéro de l'étape. Chaque carré utilise quatre allumettes, mais deux carrés adjacents utilisent une allumette commune. Il faut donc la retirer autant de fois que le nombre de maisons adjacentes. Cela donne l'expression algébrique $4n - (n - 1)$.

On note l'équivalence de ces trois expressions à l'aide d'une double égalité :

$$4 + (n - 1) \cdot 3 = 1 + 3n = 4n - (n - 1).$$

### 1.1.4. Suite de triangles en allumettes

*Combien d'allumettes y a-t-il à la $n^{\text{e}}$ étape ?*



$1^{\text{re}}$ étape  $2^{\text{e}}$ étape  $3^{\text{e}}$ étape

Fig. 5

Comme le problème des maisons, celui des triangles se prête à deux regards. Le premier regard est centré sur le fait que le nombre d'allumettes formant un côté est le même que le numéro de l'étape ; en triplant ce nombre, on obtient le nombre total d'allumettes. Ainsi, à la $n^e$ étape, on a $3n$ allumettes. Dans ce regard, on privilégie la régularité fonctionnelle.

Le second regard est porté sur le nombre d'allumettes ajoutées d'une étape à l'autre. En effet, à chaque fois, on ajoute une allumette à chaque côté du triangle, on ajoute donc au total trois allumettes. On trouve ainsi la ressemblance avec les situations des maisons et des carrés. À la $n^e$ étape, on aura $3 + 3 \cdot (n - 1)$ allumettes. Ce regard privilégie la régularité itérative.

Les deux formules donnent, chaque fois, un même nombre d'allumettes, donc elles sont équivalentes : $3+3\cdot(n-1) = 3n$. Les transformations algébriques de l'une vers l'autre ont été mentionnées précédemment : la distributivité de la multiplication sur la soustraction et la réduction des termes semblables.

### 1.1.5. Suite de branches formant un arbre

*Combien de branches y a-t-il à la $n^e$ étape ?*

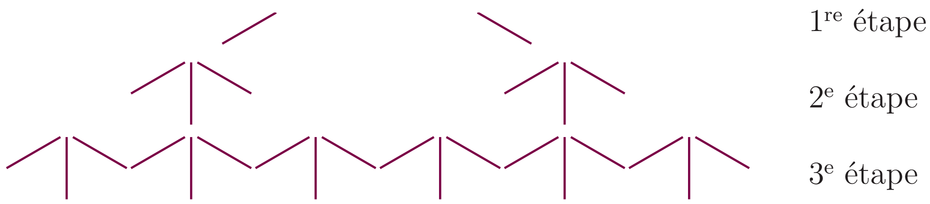



Fig. 6

Ce problème peut s'avérer assez perturbant : la figure 6 montre, à la première étape, deux branches qui ensuite triplent pour former des ramifications mais, aux étapes suivantes, ce sont les ramifications elles-mêmes qui sont multipliées par 3. On peut également diviser la figure 6 en deux parties : les branches de gauche et celles de droite ; dénombrer sur une partie et multiplier par 2 le résultat obtenu. Ces deux comptages des branches aboutissent à l'expression algébrique $2 \cdot 3^{(n-1)}$.

### 1.1.6. Suite des croix

*Combien de croix y a-t-il à la $n^e$ étape ?*

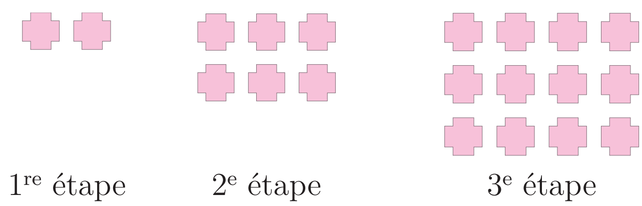



Fig. 7

Le tableau associé à cette suite permet de tester si l'une de deux structures de suites déjà rencontrées est présente ici. Cela n'est pas le cas ; il ne s'agit ici ni d'additionner un même nombre, ni de multiplier par un même nombre, pour passer d'une étape à l'autre.

| Numéro d'étape | 1 | 2 | 3 | 4 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de croix | 2 | 6 | 12 | 20 | $\cdots$ |

Tableau 4

Pour exprimer le nombre de croix en fonction du numéro de l'étape, on peut observer plusieurs particularités de la disposition des croix.

— Premièrement, à chaque étape présentée sur le dessin, le nombre de lignes est le même que le numéro de l'étape et le nombre de colonnes est le numéro de l'étape plus un. De plus, les croix sont ordonnées en rectangles. En supposant que toutes ces caractéristiques vont se trouver à n'importe quelle étape, on obtient l'expression algébrique $n \cdot (n+1)$.

— Deuxièmement, à chaque étape, on peut décomposer la figure en un carré dont le nombre de lignes ou de colonnes correspond au numéro d'étape et d'une colonne d'autant de croix que le numéro d'étape. Ce comptage est exprimé par l'expression algébrique $n^2 + n$.

On obtient ainsi l'équivalence de deux expressions : $n \cdot (n+1) = n^2 + n$. La transformation algébrique de l'une vers l'autre est la distributivité de la multiplication sur la soustraction, étendue ici à la variable $n$.

## 1.2. Classification des expressions algébriques

*Question 2*
*Parmi les six suites proposées ci-dessus, lesquelles supposent des calculs semblables ?*

Dans cinq exemples sur six, on a rencontré deux régularités particulières : l'une additive, lorsqu'on passe d'une étape à la suivante en ajoutant un même nombre et l'autre multiplicative, lorsqu'on passe d'une étape à la suivante en multipliant par un même nombre.

Le travail de classification des suites à partir de leurs formules apporte les observations suivantes :

— Dans les formules relatives à la structure additive, la variable $n$ est au premier degré. Toutes les expressions relatives à cette structure sont résumées par une seule expression paramétrisée $an + b$, car les lettres $a$ et $b$ sont appelées des paramètres : pour chaque valeur numérique attribuée à $a$ et à $b$, on obtient un cas particulier d'une suite additive.

— Dans les formules relatives à la structure multiplicative, la variable $n$ est l'exposant d'une puissance. Toutes les expressions relatives à cette structure sont résumées par une seule expression paramétrisée $b \cdot a^n$. Pour chaque valeur numérique de $a$ et de $b$, on obtient une suite multiplicative particulière.

— Lorsqu'on n'a aucune de ces deux structures, la variable $n$ n'est ni au premier degré, ni un exposant, c'est le cas dans la suite des croix.

## 1.3. Statut privilégié des suites figurées dans la production des expressions algébriques

La régularité des tableaux numériques associés aux suites figurées étudiées ci-dessus est facilement observable, sauf celle qui correspond à la suite des croix. Les premières expressions algébriques sont associées à ces tableaux dans lesquels on met en correspondance le numéro d'étape et le nombre d'objets à cette étape.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ |
| 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | $\cdots$ |

Tableau 5 : $5 + 4 \cdot (n - 1)$ ou $1 + 4n$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\cdots$ |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | $\cdots$ |

Tableau 6 : $2^{n-1}$ ou $\dfrac{2^n}{2}$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | $\cdots$ | 10 | $\cdots$ | 37 | $\cdots$ |
| 4 | 7 | 10 | $\cdots$ | 31 | $\cdots$ | 112 | $\cdots$ |

Tableau 7 : $4 + 3 \cdot (n - 1)$ ou $1 + 3n$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | $\cdots$ |

Tableau 8 : $3 + 3 \cdot (n - 1)$ ou $3n$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ |
| 2 | 6 | 18 | 54 | 162 | $\cdots$ |

Tableau 9 : $2 \cdot 3^{(n-1)}$

Bien que cette régularité soit observée sur quelques exemples numériques particuliers, ces exemples ont ici une valeur générique qui peut être généralisée par les différentes expressions algébriques. Les suites figurées offrent aussi une possibilité de faire de différentes façons les comptages de leurs éléments. Ainsi, elles favorisent la production d'expressions algébriques équivalentes c'est-à-dire des expressions qui donnent la même valeur pour une valeur choisie de la variable. On convient de noter cette équivalence à l'aide du signe « = ».

Voici les équivalences obtenues ci-dessus :

$$\begin{aligned} 5+4\cdot(n-1) &= 1+4n = 5n-(n-1) \\ 4+(n-1)\cdot 3 &= 1+3n = 4n-(n-1) \\ 3+3\cdot(n-1) &= 3n \\ n\cdot(n+1) &= n^2+n \\ 2^{(n-1)} &= \frac{2^n}{2} \end{aligned}$$

Les règles algébriques des transformations des expressions algébriques en d'autres expressions sont choisies d'une telle manière qu'elles puissent produire des expressions équivalentes. Autrement dit, elles sont choisies pour qu'une valeur d'une expression correspondant à une valeur de la variable $n$ ne soit pas modifiée par les transformations conformes à ces règles. En voici des exemples.

— la distribution d'un facteur donné sur chacun des termes de la parenthèse

$$\begin{aligned} 5+4\cdot(n-1) &= 5+4n-4 \\ n\cdot(n+1) &= n^2+n \\ 4+(n-1)\cdot 3 &= 4+3n-3; \end{aligned}$$

— le changement de signe à l'ouverture d'une parenthèse précédée du signe moins

$$5n-(n-1) = 5n-n+1;$$

— le regroupement des termes semblables

$$\begin{aligned} 5+4n-4 &= 1+4n \\ 4+3n-3 &= 1+3n \\ 5n-n+1 &= 4n+1. \end{aligned}$$

## 1.4. Première utilisation des paramètres motivée par le besoin de la classification

Les expressions particulières comme $4n+1$, $1+3n$, $3n$ sont reprises dans la forme paramétrée de l'expression $a+bn$. Cette forme caractérise toutes les suites additives dans lesquelles, pour passer d'un terme au terme suivant, on lui ajoute toujours un même nombre. Dans l'expression $a+bn$, $a$ est le premier terme de la suite et $b$ le nombre qu'on ajoute à chaque étape.

Les expressions comme $\frac{2^n}{2}$ ou $2\cdot 3^{n-1} = \frac{2}{3}\cdot 3^n$ sont reprises dans la forme paramétrée de l'expression $b\cdot a^n$. Cette forme caractérise toutes les suites multiplicatives dans lesquelles, pour passer d'un terme à l'autre, on le multiplie toujours par un même nombre. Dans l'expression $a\cdot b^n$, $a$ est le premier terme de la suite et $b$ le nombre par lequel on multiplie à chaque étape.

Ces deux types de suites sont particulièrement utiles dans l'étude des fonctions élémentaires comme les fonctions du premier degré ou les fonctions exponentielles.

### 1.5. Équations arithmétiques comme premières équations à résoudre

Il s'agit des équations de la forme générale $an + b = c$. Ce type d'équations ne demande pas de techniques nouvelles particulières. On le résout en faisant le calcul « à l'envers » : $n = \dfrac{c-b}{a}$, en exprimant en français les opérations arithmétiques à faire, comme dans le cas de la première suite, où on devait calculer le numéro d'étape auquel correspondaient 117 allumettes : soustraire 5 allumettes et diviser le nombre obtenu par 4 ce qui donne 28 étapes en plus de la première, soit 29 étapes, ou encore soustraire 1 allumette et diviser le nombre obtenu par 4 ce qui conduit à la même réponse.

## 2. Expérimentation et quelques éléments de son analyse

Le dispositif présenté dans la section précédente a été expérimenté dans six classes de trois professeurs (deux classes chez chacun), pendant trois années consécutives (2003/2004, 2004/2005, 2005/2006). Il s'agit de classes d'élèves de première année du cycle secondaire dans deux écoles de l'enseignement général libre en Fédération Wallonie-Bruxelles, l'une dans une ville de province et l'autre à Bruxelles. Les classes étaient à peu près de 25 élèves en moyenne, de milieux sociaux assez variés mais plutôt bourgeois.

Au moment des expériences, tous ces élèves connaissaient déjà la notation $a^n$, ils ont rencontré aussi l'usage des lettres dans des problèmes d'aire et de périmètre de figures planes, et ils maitrisaient l'usage des parenthèses pour exprimer la priorité des opérations dans le calcul numérique.

### 2.1. Des messages hybrides et des formules pré-algébriques, une multiplication itérative qui ne s'exprime pas

Les élèves ont proposé des formules pré-algébriques dans le sens où les opérations sont déjà notées à l'aide de symboles mathématiques mais le nom de la variable ou celui des objets sont écrits en français, éventuellement en abréviation. Voici un échantillon constitué des uns et des autres.

- *Le nombre de l'étape fois quatre plus un.*
- *Pour trouver le nombre d'allumettes, on soustrait* 1 *au nombre de « maisons » puis on multiplie par* 4 *le résultat obtenu et l'on ajoute* 5.
- *À une étape : nombre d'étapes* $\cdot\, 4 + 1$.
- *Pour un calcul quelconque :* $($*nombre d'étapes* $- 1) \cdot 4 + 5$.
- *À chaque étape, on doit rajouter 4 allumettes :* $(($*nombre d'étapes* $- 1) \cdot 4 + 5$.
- *Pour n'importe quel calcul, on ferait le nombre de l'étape trouvée, on multiplierait par* 4 *plus* 1.
- *Chaque fois c'est le double.*
- *À chaque étape, on multiple un nombre trouvé par deux, le nombre d'étoiles de l'étape précédente.*
- $($*nbr étapes* $\cdot\, 4) + 1$.

Remarquons le caractère hybride de ces messages dans lesquels les élèves n'hésitent pas à additionner ou à multiplier des nombres d'objets hétérogènes : ils retirent une allumette du nombre de maisons, multiplient un nombre de maisons par un nombre d'allumettes… Ce caractère peut faire obstacle à l'algébrisation de ces messages, surtout dans les cas où une même lettre est mobilisée pour dénombrer des objets de natures différentes.

Ces embryons de formules langagiers ou ces formules pré-algébriques expriment tantôt une régularité fonctionnelle, tantôt une régularité itérative. Dans le cas des suites géométriques, ces messages n'expriment que la régularité itérative : une multiplication répétée par un même nombre ne fait pas écho pour les élèves à la notion de puissance. Dès lors, des expressions langagières telles que « 2 exposant 36 » ne sont pas plus disponibles que la notation exponentielle. Et c'est ce qui empêcherait ces élèves de formuler un message exprimant une quelconque régularité fonctionnelle et, par suite, d'écrire cette régularité au moyen d'une notation du type $a^n$.

## 2.2. La question inverse traitée par opérations réciproques

Les embryons de formules que constituent les messages formulés en français et les formules pré-algébriques semblent suffire pour traiter la question réciproque. Rappelons qu'il s'agit, dans le problème des maisons, de trouver l'étape à laquelle il y aura 117 allumettes. Nous avons pu observer que des élèves répondent à cette question à partir d'un dénombrement des allumettes formulé par un message équivalent à celui-ci : quatre allumettes par maison plus une pour la première maison.

Un groupe d'élèves :

Élève 4 : *Cent dix-sept divisé par quatre.*
Élève 2 : *Moins un.*
Élève 3 : *Cent dix-sept moins un et divisé par quatre.*
Élève 4 : *Il faut d'abord enlever un.*
Élève 1 : *Donc cent seize divisé par quatre… On fait le calcul à l'envers, quoi.*
Élève 4 : *Vingt-neuf.*

Un autre groupe d'élèves :

Élève 5 : *À chaque étape, il faut ajouter quatre allumettes, sauf à la première étape.*
Élève 6 : *Pour 117 allumettes, comment tu fais ?*
Élève 5 : *C'est la vingt neuvième étape. Tu enlèves une pour la première, donc tu enlèves un de cent dix-sept et tu divises par quatre… Mais oui, parce que chaque fois tu ajoutes quatre. Et tu obtiens vingt-neuvième étape.*
Observateur : *Ajoute le raisonnement. Pourquoi c'est comme cela.*
Élève 5 montre ses notes :

$$\begin{aligned} 117 - 1 &= 116 \\ 116 : 4 &= (100 : 4) + (16 : 4) \\ &= 25 + 4 \\ &= 29. \end{aligned}$$

Ces deux exemples mettent en scène des élèves qui parviennent à utiliser implicitement une structure générale de calcul dans leur raisonnement et à manipuler le nombre inconnu d'étapes comme s'il avait été connu, sans que cette structure ne soit notée algébriquement par qui que ce soit. On rejoint là des observations faites par maints chercheurs à propos des apprentissages algébriques : les équations arithmétiques, c'est-à-dire les équations dans lesquelles l'inconnue apparaît dans un seul membre, se résolvent tout aussi bien avec des méthodes dites intuitives qu'avec des méthodes formelles.

## 2.3. L'obtention de la formule « à l'arraché »

L'observateur pousse les élèves à penser à l'écriture littérale.

Observateur : *Qu'est-ce qu'on fait d'une manière générale ?*
Élève 4 : *Le nombre d'étapes fois quatre plus un.*
Observateur : *Encore plus court ! Qu'est ce qu'on peut faire pour avoir plus court ? Pour ne pas écrire des mots ?*
Élève 1 : *$x$ fois quatre plus un. $x$ est égal à l'étape. C'est comme dans la formule de l'aire d'un rectangle : $\ell$ fois $L$.*

L'élève écrit $x \cdot 4 + 1$. Mais, l'utilisation de la lettre à cette étape est l'objet d'un débat entre élèves.

Élève 2 : *Pas d'accord. Les deux réponses sont bonnes* (pour rappel, la sienne est nbr étapes $\cdot 4 + 1$).
Élève 1 : *C'est l'algèbre. Le but c'est trouver la formule mathématique, $x$ ce sera le nombre, $x$ étapes fois quatre plus un.*
Élève 2 : *Ma formule est claire car j'écris le nombre d'étapes fois quatre plus un. Dans la formule $x$ fois quatre plus un, il faut préciser que $x$ est le nombre d'étapes.*

Mais, à ce stade, qu'est-ce qui peut convaincre un élève de l'intérêt de disposer d'une expression littérale ? Serait-ce le travail de transformations de formules par le biais de manipulations algébriques permises, comme le suggère l'un des professeurs participant à l'expérience à propos des formules $x \cdot 4 + 1$ et $(x - 1) \cdot 4 + 1 \cdot 5$ : « *est-ce que tout de suite, je peux voir que ces deux calculs représentent bien la même chose ?* ». Il est vrai que, pour un œil exercé, c'est facile et que ce l'est moins pour les élèves lesquels ne seront pas convaincus. Mais on le serait encore moins s'il fallait, comme ci-dessous, procéder aux manipulations algébriques en s'empêchant de représenter la variable par une seule lettre :

$$(\text{nbre étapes} - 1) \cdot 4 + 5 = 4 \cdot \text{nbre étapes} - 4 + 5 = 4 \cdot \text{nbre étapes} - 1.$$

## 2.4. Paradigme du professeur : algèbre comme généralisation de l'arithmétique

Pour justifier l'équivalence de deux expressions $x \cdot 4 + 1$ et $(x - 1) \cdot 4 + 1 \cdot 5$, le professeur s'appuie sur des règles algébriques de transformation des expressions littérales qui sont admises comme extensions des règles de calcul sur des nombres.

Professeur : *Là, on suit les deux propositions qu'on a eues. Alors là, je peux reposer ma question : est-ce que, tout de suite, je peux voir que ces deux calculs représentent bien la même chose ? Aurélie ?*
Élève 7 : *Non.*
Professeur : *Alors, vous me dites que d'un seul coup d'oeil, on ne voit pas que c'est la même chose. Qu'est-ce qu'on peut faire ?*
Élève 7 : *Un calcul.*
Professeur : *On pourra faire un calcul, là c'est un peu loin, on va voir si on se rappelle. Comment pourrais-je calculer ce genre de choses-là ? On a une somme, la parenthèse, le produit. Réfléchissez bien. Priorité des opérations ce sont d'abord les parenthèses. À l'intérieur, on a $x$ moins un. Est-ce que tu peux calculer cela ?*
Élève 7 : *Non.*
Professeur : *Et après, on a fois quatre.*

Élève 7 : *Ah, oui, quatre $x$ moins un.*
Professeur : *Presque. Est-ce que tu peux donner le nom à ce que tu as utilisé ?*
Élève 7 : ...
Professeur : *Quelqu'un d'autre ? Stéphanie ?*
Élève 8 : *La distributivité.*
Professeur : *Voilà, la distributivité. Je dois faire $x$ fois quatre moins...*
Élève 7 : *Moins quatre.*
Professeur : *Moins un ou moins quatre ? Donc ça, on a vu avec le calcul numérique qu'on n'a pas encore abordé avec des lettres.* Il écrit $= 4x - 4 + 5$.
Professeur : *Ensuite, C'est fini ce calcul, ici ?*
Élève 7 : *Non, quatre $x$ plus un.*
Professeur : *Quatre $x$ moins quatre plus cinq.* Il écrit $4x + 1$.

Dans cet épisode, le professeur interprète d'emblée la proposition de calcul de l'élève comme étant une manipulation algébrique. Pourtant, on assiste là à la première transformation de ce genre dans cette classe. Ce professeur a été habitué à produire et justifier les équivalences uniquement par les transformations algébriques. Or, à ce stade là, on sait déjà que les deux programmes de calcul sont équivalents. Et donc, ce fait aurait pu lui servir à légitimer les transformations en question : la distribution de la multiplication sur l'addition, la réduction des termes semblables. C'est cette démarche qui aurait pu donner du sens à ce premier calcul algébrique.

## 2.5. Le sens octroyé au littéral : la lettre représentant l'étape est-elle une variable explicite ou une variable transparente ?

Le risque existe, dans les problèmes de dénombrement, de considérer le nombre d'objets comme une variable temporelle, c'est-à-dire de prendre la lettre $n$ qui représente le numéro de l'étape comme une simple « étiquette » qui est accolée à toutes les étapes quelles qu'elles soient sans qu'il soit nécessaire de respecter le fait qu'en remplaçant $n$ par telle valeur particulière, le programme de calcul modélisé par l'expression littérale donne bien le nombre exact d'objets à dénombrer à cette étape-là et non pas à la suivante, à la précédente ou à toute autre (notons que les suites mobilisées sont injectives).

L'exemple qui suit nous permet de mieux situer cette difficulté. Lors d'une séance, on voit un professeur insister sur l'utilisation d'une formule et demander à un élève d'en expliquer l'intérêt : « *Quel est le but de ta formule ?* ». L'élève ne comprend pas la question se contentant d'évoquer son calcul antérieur : « *Aller jusqu'à la dixième étape et trouver...* ». Après plusieurs vaines relances à propos de la $n^{e}$ étape, le professeur insiste à nouveau sur la structure du calcul : « *N'oublie pas, tu m'as dit cinquante moins neuf égal quarante et un. Comment as-tu obtenu cinquante ?* » et obtient une partie de la réponse : « *En faisant cinq fois dix. Il y aura cinq fois $n$* ». Mais l'élève échouera à exprimer, d'une manière générale le nombre d'allumettes à retrancher. Regardons la suite.

Professeur : *Et après, qu'est-ce que je fais ?*
Élève : *Moins neuf.*
Professeur : *Moins neuf. C'est parce qu'on a pris l'exemple de la dixième étape. Et si on parle de manière générale ?*
Élève : *Moins le nombre d'étapes.*
Professeur : *Le nombre d'étapes...*
Élève : *En commençant par la deuxième.*

Professeur : *Oui, en commençant par la deuxième étape, donc c'est finalement le nombre d'étapes total... ?*
Élève : *Moins l'étape $n$.*
Professeur : *Moins une étape.*

Ces réactions de l'élève montrent qu'il est conscient de la nécessité d'enlever une étape pour comptabiliser les allumettes à retrancher, l'exprime incorrectement en français, puis parle de commencer par la $2^e$ étape et enfin propose d'enlever l'étape $n$. Pense-t-il à supprimer la dernière étape plutôt que la première, dernière étape qu'il « nommerait » alors l'étape $n$ ? Ce n'est pas sûr, mais ce n'est pas exclu non plus. Il n'en est pas moins vrai que l'élève éprouve beaucoup plus de difficultés à formuler cette partie de la réponse globale — rappelons que cette réponse est $5n - (n-1)$ dans laquelle, ce n'est $n$ mais $(n-1)$ qui va permettre de dénombrer les allumettes à enlever. On peut imaginer que si les étapes avaient été numérotées à partir de la $2^e$, c'eût sans doute été le terme $5 \cdot (n+1)$ qui aurait posé problème plutôt que le terme $n$ à retrancher. Mais, de toute façon, si problème il y a, c'est sans doute parce que $n$ rappelle plus une étape donnée qu'une simple variable numérique.

L'obtention d'une formule chez un élève donné ne signifie donc pas que celui-ci a pris acte que la lettre représentant le numéro de l'étape est une variable indépendante explicite dont dépend le nombre d'objets. Il peut, au contraire, la considérer comme variable transparente qui n'intervient pas vraiment dans le calcul.

## 2.6. La prise de valeurs numériques comme l'indice d'un usage de la lettre en tant que variable

Lors de l'expérimentation, on a pu observer une instabilité de la signification octroyée à la lettre et des locutions langagières utilisées pour en rendre compte : on voit le même élève dire que la lettre représente n'importe quelle étape « *Donc $n$ c'est n'importe quelle étape* » pour préciser aussitôt après « *C'est pour représenter tous les nombres* ». De même, on voit un autre élève utiliser indifféremment l'expression « *$n^e$ étape* », « *Toutes les étapes* » et « *N'importe quelle étape* » à quelques secondes d'intervalle. Du côté des professeurs, nous avons rencontré des expressions telles que « *Le nombre d'allumettes pour n'importe quelle étape* », « *l'étape numéro $n$* », « *$n^e$ place ? Si tu m'avais dit $x$, j'aurais dit $x^e$ étape* » et « *Si $n$ est le numéro de l'étape* ». L'un d'entre eux reprend un élève qui avait répondu « *une étape* » à sa question « *La lettre, qu'est-ce qu'elle va représenter, à ton avis ?* » et le corrige en disant : « *Ah, le numéro de l'étape* ».

On peut se demander si l'une ou l'autre de ces locutions est plus associée à la conception d'une lettre comme véritable variable indépendante ou sa perception comme variable temporelle transparente. *A priori*, nous aurions pensé que, dans des expressions telles que « *nombre d'étapes* », « *numéro de l'étape* », « *n'importe quelle étape* » ou « *à la $x^e$ étape* » rendaient mieux compte de l'idée de variable que des expressions comme « *toutes les étapes* » ou « *l'étape $n$* » qui semblent plus renvoyer à l'ensemble des étapes comme à un ensemble de nombres indéterminés. Mais, vu l'instabilité du langage chez certains élèves, que ceux-ci aient compris le sens de la lettre ou non, nous en doutons. En fait, nous ne pouvons trancher sans regarder si cette lettre joue un rôle réellement instrumental, comme chez ces élèves qui utilisent l'une ou l'autre de ces locutions au sein d'une stratégie calculatoire dans l'expression d'un programme de calcul : « *nombre d'étapes fois quatre plus un* » ou : « *pour n'importe quel calcul, on ferait le nombre de l'étape trouvée, on multiplierait par 4 plus 2* ». En effet, on est sûr alors que, pour eux, la lettre prend des valeurs numériques.

### 2.7. Les différentes lettres pour un même programme de calcul

Des écritures pouvant apparaître comme différentes pour les élèves, du fait de l'emploi de lettres différentes, sont reconnues comme identiques puisque correspondant à une même méthode (programme) de calcul : $4n+1$ ou $4x+1$ ou $4b+1$.

### 2.8. Classement des suites par les élèves et paramétrisation

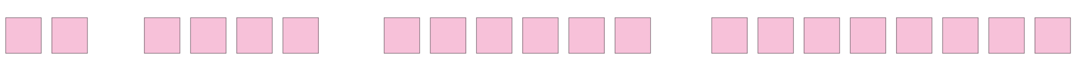
Les élèves ont été interrogés avant et après la synthèse faite par le professeur au cours de laquelle ce dernier a utilisé les tableaux pour établir finalement les formules correspondant à chacune des suites étudiées. Le nombre de réponses attestant de la non-compréhension de la consigne avant la synthèse témoigne de la difficulté des élèves à traiter des questions relatives à la classification d'objets mathématiques. D'après le professeur des élèves observés, cela peut s'expliquer par le fait que les questions de classification d'objets et de critères de classification font rarement l'objet d'une activité proposée aux élèves, la seule activité de classification étant située en géométrie, lorsqu'il s'agit de faire la classification des quadrilatères, mais étant habituellement à charge du seul professeur. Les réponses s'améliorent après la synthèse, comme on peut s'en douter car, à ce moment-là, la structure de chacune des suites est bien mise en évidence par le biais des formules. La question posée était : « *Selon quels critères peut-on classer ces six suites d'objets ? Parmi les six suites ci-dessus, y en a-t-il qui sont construites selon une même procédure ? Quelle est cette procédure ?* ». Il est dommage que nous n'ayons pas eu l'occasion de la formuler en des termes peut-être plus compréhensibles *a priori* du genre « *Quelles sont les suites qui supposent des calculs semblables ?* ».

Il n'empêche qu'il est très significatif d'observer les réponses des élèves qui réussissent complètement ou partiellement le travail de classement. Avant la synthèse, la plupart détectent une régularité itérative : on additionne un même nombre ou l'on multiplie par un même nombre, même si certaines suites, telles que celle des allumettes disposées en triangles ne s'expriment pas facilement en termes de sommes, ainsi que nous l'avions prévu *a priori* et que la suite des croix est jugée inclassable, et pour cause… Après la synthèse, les élèves repèrent des analogies de formes, telles que des formes exponentielles.

## 3. Prolongement : production des expressions littérales dans le contexte de nombres pairs et impairs

### 3.1. Expression littérale d'un nombre pair

*Exprimez la régularité de la suite figurée ci-dessous par une expression littérale.*



1re étape 2e étape 3e étape 4e étape

Fig. 8

Cette suite figure les nombres pairs. On peut y associer le tableau numérique suivant.

| 1re étape | 2e étape | 3e étape | 4e étape | 5e étape | 6e étape | 7e étape | 8e étape | $\cdots$ | $n$e étape |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | $\cdots$ | $2n$ |

Tableau 10

La régularité du tableau est exprimée par l'expression algébrique $2n$, elle correspond au fait qu'à chaque étape, il y a deux fois plus de carrés que le numéro d'étape.

## 3.2. Expression littérale d'un nombre impair

*Exprimez la régularité de la suite figurée ci-dessous par une expression littérale.*

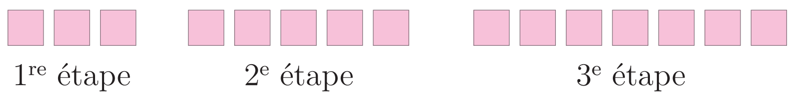



Fig. 9

Cette suite figure les nombres impairs successeurs des nombres pairs. Le tableau numérique lui correspondant est le suivant :

| 1re étape | 2e étape | 3e étape | 4e étape | 5e étape | 6e étape | 7e étape | 8e étape | $\cdots$ | $n$e étape |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | $\cdots$ | $2n+1$ |

Tableau 11

La régularité du tableau est exprimée par l'expression algébrique $2n+1$ qui correspond au fait qu'à chaque étape, il y a deux fois plus de carrés que le numéro d'étape, plus un.

## 3.3. Somme de deux nombres successifs

*Considérez la somme de deux nombres consécutifs. Quelle régularité peut-on observer ? Exprimez-la à l'aide d'une expression littérale.*

Représentons la suite des nombres naturels et à la suite de leurs successeurs par deux suites figurées ci-dessous :

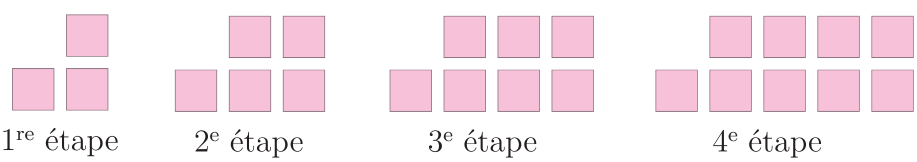



Fig. 10

Représentons les deux suites de nombres et leur somme dans le tableau ci-dessous :

| $1^{\text{re}}$ étape | $2^{\text{e}}$ étape | $3^{\text{e}}$ étape | $4^{\text{e}}$ étape | $5^{\text{e}}$ étape | $6^{\text{e}}$ étape | $7^{\text{e}}$ étape | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $\cdots$ |
| $2 = 1 + 1$ | $3 = 2 + 1$ | $4 = 3 + 1$ | $5 = 4 + 1$ | $6 = 5 + 1$ | $7 = 6 + 1$ | $8 = 7 + 1$ | $\cdots$ |
| $3 = 1 + 1 + 1$ | $5 = 2 + 2 + 1$ | $7 = 3 + 3 + 1$ | $9 = 4 + 4 + 1$ | $11 = 5 + 5 + 1$ | $13 = 6 + 6 + 1$ | $15 = 7 + 7 + 1$ | $\cdots$ |

Tableau 12

La régularité du tableau « somme d'un nombre naturel et de son successeur » peut être exprimée par deux manières : $n + n + 1$ et $2n + 1$. Cette régularité s'étend à tous les nombres du tableau. Les deux expressions sont donc équivalentes pour tous les nombres naturels. Étant donné que l'expression $2n + 1$ caractérise un nombre impair, la somme des deux nombres successifs est bien un nombre impair. La règle de la réduction des termes semblables qui permet de transformer $n + n + 1$ en $2n + 1$ est ici confirmée.

## 3.4. Équivalence algébrique $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$ établie par un raisonnement arithmétique

*Quelle régularité peut-on observer lorsqu'on calcule la différence des carrés de deux nombres consécutifs ?*

| $n + 1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(n + 1)^2$ | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 | $\cdots$ |
| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\cdots$ |
| $n^2$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | $\cdots$ |
| $(n + 1)^2 - n^2$ | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | $\cdots$ |

Tableau 13

Le résultat est la suite des nombres impairs. D'où on obtient que la différence $(n + 1)^2 - n^2$ des carrés de deux nombres naturels successifs est un nombre qu'on peut exprimer comme $2n + 1$. On établit ainsi l'équivalence

$$(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1.$$

De là, et par la définition de la différence de deux nombres, on établit que le carré $(n+1)^2$ est égal à la somme du carré $n^2$ et de la différence $(n+1)^2 - n^2$, ce qu'on exprime à l'aide de l'équivalence suivante

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1.$$

À partir de cette équivalence, on peut établir la règle de calcul algébrique suivante :

$$(n + 1)^2 = (n + 1)(n + 1) = n^2 + n + n + 1 = n^2 + 2n + 1.$$

### 3.5. Équivalence algébrique $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$ établie par un raisonnement arithmétique

*Quelle régularité peut-on observer dans le cas de trois nombres consécutifs, lorsqu'on calcule la différence entre le carré du nombre au milieu et le produit des deux autres nombres ?*

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | $\cdots$ |
| $(n+1)$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\cdots$ |
| $(n-1)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $\cdots$ |
| $(n+1)(n-1)$ | 3 | 8 | 15 | 24 | 35 | 48 | 63 | 80 | $\cdots$ |
| $n^2-(n+1)(n-1)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $\cdots$ |

Tableau 14

La régularité observée se traduit par l'équivalence

$$n^2 - (n+1)(n-1) = 1,$$

d'où, par la définition de la différence de deux nombres, le produit des extrêmes est égal au carré du terme au milieu moins 1, ce qui est exprimé par l'équivalence suivante

$$(n+1)(n-1) = n^2 - 1.$$

Les règles du calcul algébrique qu'on peut établir à partir de l'équivalence $(n+1)(n-1) = n^2 - 1$ sont la double distributivité et la réduction des termes semblables :

$$(n+1)(n-1) = n^2 + n - n - 1 = n^2 - 1.$$

## 4. Synthèse

Les suites de nombres figurés portent naturellement une idée de variation et forment ainsi un point de départ pour la construction de la pensée fonctionnelle par l'introduction de la notion de variable.

Les suites géométriques sont aussi facilement identifiables que les suites arithmétiques mais ne peuvent conduire à l'écriture ou à la verbalisation d'une régularité fonctionnelle qu'au prix d'une disponibilité de la notion de puissance comme mode d'expression d'une multiplication répétée avec un même nombre.

L'usage de la lettre par les élèves n'est pas spontané. Par contre, il est possible pour eux de formuler des messages hybrides ou des formules pré-algébriques pour décrire des programmes de calcul. Selon les cas, des messages sont les formes embryonnaires des formules algébriques. L'obtention d'une expression littérale chez un élève donné ne signifie pas que celui-ci a pris acte que la lettre représentant le numéro de l'étape est une variable indépendante explicite dont dépend le nombre d'objets. Il peut, au contraire, la considérer comme variable transparente qui n'intervient pas vraiment dans le calcul.

L'usage de la lettre est motivé par l'économie de pensée lorsqu'on doit manipuler les expressions littérales pour les transformer en d'autres expressions littérales équivalentes. La relation entre les manipulations algébriques des expressions littérales et la substitution des valeurs numériques dans ces expressions, mise en place à cette occasion, est la base de l'algèbre élémentaire. C'est aussi l'indice d'un usage de la lettre comme variable.

Nous concluons cet article, en suivant l'avis de Douady (1994) selon lequel l'accès à la pensée algébrique se réalise en termes d'équilibre entre le travail sur le sens et la familiarité technique des algorithmes de transformations des expressions algébriques.

## Pour en savoir plus

[1] Chevallard Y., Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x*, 19, 1989.

[2] Douady R., *Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir*, Volume 15. Repères IREM, pp. 37 – 41, 1994.

[3] Eduscol, Projet de document d'accompagnement du numérique au littéral. ediscol.education.fr/D0015/, 2006.

[4] Gascon J., Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'arithmétique généralisée. *Petit x*, 37, 1993.

[5] Grugeon B., Analyse des difficultés des élèves en algèbre. *Recherche en didactique des mathématiques (Hors série : Enseignement de l'algèbre élémentaire, bilan et perspectives)*, Grenoble : La pensée Sauvage, 2012.

[6] Krysinska M., *Émergence de modèles fonctionnels comme outil de catégorisation de phénomènes divers : repères épistémologiques et didactiques.* Thèse de doctorat, Facultés universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur, 2007.

[7] Krysinska M., Mercier A. et Schneider M., Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 29/3, 2009.

[8] Krysinska M. et Schneider M., *Émergence de modèles fonctionnels.* Éditions de l'Université de Liège, 2010.

[9] Pressiat A., *Trouver un fil rouge pour l'enseignement du calcul algébrique.* in Actes de l'Université de Saint-Flour, 2005. https://www.acclermont.fr/disciplines/fileadmin/user_upload/Mathematiques/pages/site_math_universite/CD-UE/Menu_pour_Internet.htm

[10] Sackur J.-P., Drouhard M. et Pécal M., *Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ?* Repères 28, Tropiques éditions, 1997.

[11] Vlassis J. et Demonty I., *L'algèbre par des situations problèmes au début du secondaire.* De Boeck, 2002.

Mariza Grand'Henry-Krysinska était professeure au collège Saint-Michel à Bruxelles et est membre du GEM. ✉ maria.krysinska@belgacom.net