Des figures en évolution : les tapis rectangulaires

Marie-France Guissard et Isabelle Wettendorff

Mots clés : Résolution de problèmes, suites de figures, suites de nombres, tableaux de nombres, stratégies, algébrisation, graphiques, équations du premier degré.

Résumé. *Cet article fait suite à celui paru dans Losanges 40 intitulé* Des figures en évolution : les carpettes carrées *[3]. On y présente deux nouveaux problèmes dont l'énoncé est assez semblable à celui des carpettes carrées, mais qui débouchent sur des conclusions différentes. Les exploitations proposées établissent des liens entre les registres géométrique, graphique et numérique, conduisent les élèves à utiliser la représentation graphique comme outil de résolution et à percevoir la puissance de la mise en équation pour résoudre un problème de ce type.*

L'ensemble de la séquence, reprenant les trois problèmes, a été présenté lors du congrès de la SBPMef à Bruxelles.

Introduction et déroulement de la séquence

La suite d'activités présentée ici est destinée à des élèves de 11 à 14 ans. Les problèmes peuvent être résolus par des enfants de la fin du primaire. L'analyse des méthodes de résolution en vue d'aborder d'autres problèmes est également accessible à ces élèves. Les exploitations plus spécifiquement mathématiques conduisant aux formules algébriques, aux représentations graphiques et aux équations sont plutôt destinées aux élèves du début du secondaire. Chaque enseignant jugera de ce qu'il peut faire avec sa classe, en fonction de l'âge des élèves et de leurs capacités.

Deux nouveaux problèmes (en pages 28 et 30) assez semblables à celui de la carpette carrée quant à la forme de l'énoncé sont soumis aux élèves. La résolution se déroule en deux temps. Durant la première séance, le premier problème est proposé tout d'abord et résolu sans intervention de l'enseignant qui reste en position d'observateur. Dès que les élèves ont résolu le premier problème, on leur donne le second qui, bien que très semblable au premier, débouche sur une tout autre conclusion.

À la fin de l'activité, l'enseignant anime le débat entre élèves pour dégager les similitudes d'énoncés entre les différents problèmes, les stratégies menées dans les deux cas et la comparaison des solutions.

Lors d'une seconde séance, l'enseignant prend en charge l'exploitation de l'activité en incitant les élèves à

- établir un graphique pour chacun des deux problèmes,
- comparer ces graphiques,
- établir des formules pour écrire des équations,
- réinterpréter les conclusions à la lumière des graphiques et des résolutions d'équations.

Tapis rectangulaires

1. Premier problème

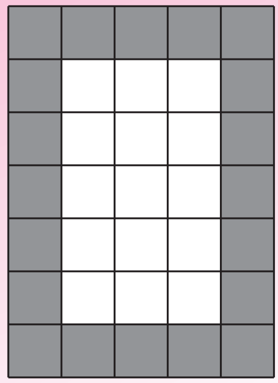
Tapis rectangulaires (I)

On commercialise un nouveau type de tapis. Il est rectangulaire et constitué de petits carrés identiques : une rangée de carrés gris sur les bords et des blancs à l'intérieur.

Sachant que ces tapis ont tous trois carrés sur un côté du rectangle blanc, est-il possible d'avoir un tapis composé du même nombre de carrés blancs que de carrés gris ?

Si oui, trouvez tous les tapis qui remplissent cette condition.

Expliquez votre démarche.



La situation proposée est une variante des « Carpettes carrées » présentée dans l'article précédent. Ici on ne considère plus des modèles carrés, mais des modèles rectangulaires dont la dimension d'un côté du rectangle intérieur est fixée. La bordure du tapis est toujours formée d'une simple rangée de carrés gris. La question posée au départ est la même, mais comme il n'y a plus de dimension maximum pour le tapis, les élèves sont confrontés à un nombre infini de cas. En plus de la question de l'existence d'une solution, celle de son unicité est posée.

Les démarches : dessins et tableaux

Comme dans la résolution du problème des carpettes carrées, les élèves déploient habituellement des stratégies mêlant dessins et tableaux de nombres.

Afin d'éviter de dessiner un à un les différents tapis, certains élèves peuvent penser à une démarche similaire à celle illustrée en figure 1. Les tapis sont complétés au fur et à mesure, en ajoutant une rangée au tapis de l'étape précédente. Les carrés de la bordure sont laissés blancs sur la feuille et ceux de l'intérieur sont coloriés ou marqués (avec un disque dans l'exemple). À chaque étape, on compte les carrés de l'intérieur et ceux de la bordure et les nombres sont reportés dans un tableau. Les élèves peuvent y constater les accroissements constants du nombre de carrés à l'intérieur ou sur la bordure.

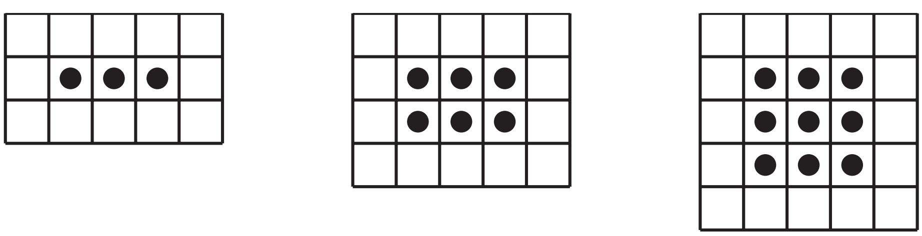


Fig. 1

Trois carrés sur un côté du rectangle blanc		
Nombre de rangées dans le rectangle blanc (intérieur)	Nombre total de carrés blancs (intérieur)	Nombre total de carrés gris (bordure)
1	3	12
2	6	14
3	9	16
4	12	18
5	15	20
6	18	22
7	21	24
8	24	26
9	27	28
10	30	30
11	33	32
12	36	34
⋮	⋮	⋮

Tab. 1

Le tableau 1 présente les nombres ainsi obtenus lorsque le nombre de rangées du rectangle blanc augmente d'une unité à chaque ligne.

Il est fort possible que certains élèves rejettent le tapis du tableau qui a un intérieur blanc de forme carrée (troisième ligne) car pour ceux-ci un rectangle possède par définition une largeur strictement plus petite que sa longueur. Il faudra amener ces élèves à faire évoluer leur point de vue sur les figures pour qu'ils considèrent le carré comme un rectangle particulier.

En construisant le tableau, les élèves constatent que, à chaque fois qu'on ajoute une rangée de carrés blancs dans la partie centrale de la carpette, le nombre de carrés blancs augmente de trois et le nombre de carrés gris augmente de deux. Ces accroissements constants quand on passe d'une ligne à la suivante peuvent être justifiés géométriquement à l'aide de la figure 2.

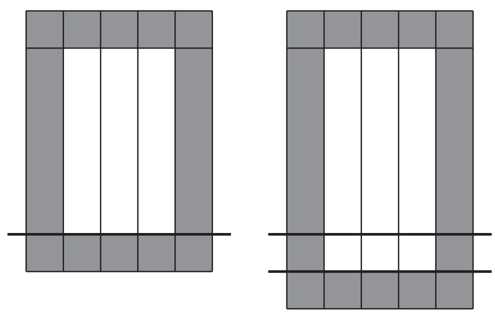


Fig. 2

Dans ce premier problème avec trois carrés dans les rangées du rectangle blanc, il y a une solution avec 10 rangées de carrés blancs, solution que les élèves obtiendront dans leur inventaire, par schémas ou tableau de nombres.

Le fait d'avoir trouvé un tapis qui présente les caractéristiques demandées ne suffit pas pour répondre complètement à la question. L'existence d'une solution ne garantit pas son unicité.

L'argument qui apporte la preuve de l'unicité peut être développé à partir du tableau de nombres ou de la figure 2. À partir du cas où il y a 10 rangées de carrés blancs dans la partie centrale (où le nombre de carrés gris est égal au nombre de carrés blancs) le nombre de carrés gris augmente de deux à chaque étape, tandis que le nombre de carrés blancs augmente de trois, le nombre de carrés blancs restera donc toujours supérieur au nombre de carrés gris et l'écart augmentera sans cesse.

Notons pour l'enseignant que cela correspond au fait que *des inégalités sont créées en ajoutant des quantités inégales aux deux membres d'une égalité.*

2. Deuxième problème

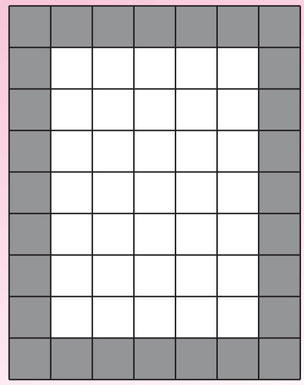
Tapis rectangulaires (II)

On commercialise un nouveau type de tapis. Il est rectangulaire et constitué de petits carrés identiques : une rangée de carrés gris sur les bords et des blancs à l'intérieur.

Sachant que ces tapis ont tous cinq carrés sur un côté du rectangle blanc, est-il possible d'avoir un tapis composé du même nombre de carrés blancs que de carrés gris ?

Si oui, trouvez tous les tapis qui remplissent cette condition.

Expliquez votre démarche.



Cette deuxième version est proposée aux élèves dès qu'ils ont résolu la première. On table sur le fait qu'ils voudront réinvestir ce qu'ils viennent de voir.

Les démarches : dessins et tableaux

Les élèves procèdent comme précédemment et remplissent un tableau, éventuellement à partir de schémas (figure 3).

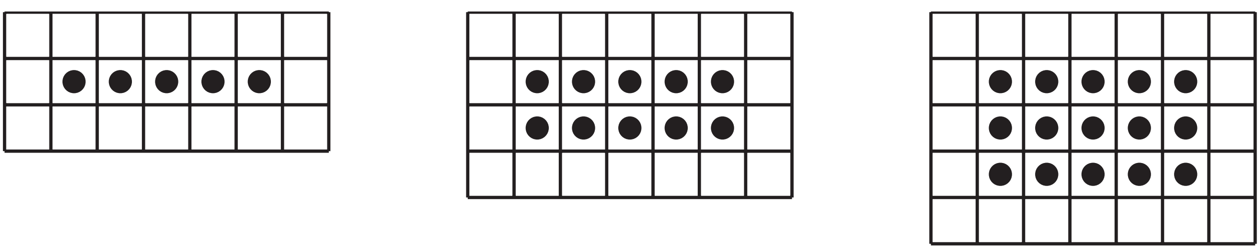


Fig. 3

Le tableau 2 montre les nombres de carrés blancs et gris lorsque le nombre de rangées dans la partie blanche au centre du tapis augmente de 1 à chaque fois. Cette fois, bien que l'énoncé du problème soit très semblable au précédent, le tableau 2 ne montre pas de valeur commune pour les nombres de carrés blancs et gris.

Cinq carrés sur un côté du rectangle blanc		
Nombre de rangées dans le rectangle blanc (intérieur)	Nombre total de carrés blancs intérieur)	Nombre total de carrés gris (bordure)
1	5	16
2	10	18
3	15	20
4	20	22
5	25	24
6	30	26
7	35	28
8	40	30
9	45	32
10	50	34
11	55	36
⋮	⋮	⋮

Tab. 2

Les plus petits tapis ont moins de carrés blancs que de carrés gris, et ce jusqu'au tapis avec quatre rangées dans la partie centrale blanche qui compte 20 carrés blancs et 22 carrés gris. Le tapis suivant, avec cinq rangées dans la partie centrale (c'est un tapis carré), compte 25 carrés blancs et 24 gris. Il y a donc plus de carrés blancs à l'intérieur que de gris sur la bordure, et cela sera toujours le cas pour les tapis plus grands car l'écart entre les nombres de carrés blancs et gris ne cesse d'augmenter.

En effet, à chaque fois qu'on ajoute une rangée de carrés blancs dans la partie centrale de la carpette, le nombre de carrés blancs augmente de cinq et le nombre de carrés gris n'augmente que de deux.

Notons pour l'enseignant la propriété sous-jacente : *une inégalité est renforcée en ajoutant une quantité plus grande au membre le plus grand.*

Les accroissements constants quand on passe d'une ligne à la suivante peuvent être justifiés géométriquement à l'aide de la figure 4.

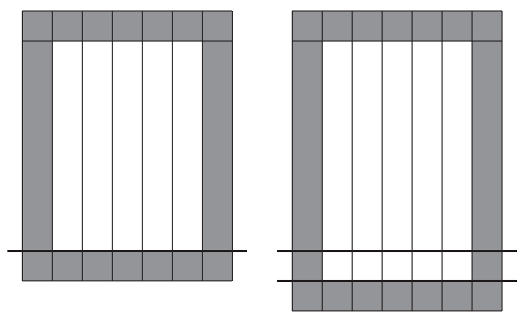


Fig. 4

3. Première synthèse : comparaison des deux problèmes

En fonction des différentes propositions des élèves, l'enseignant met en évidence les procédés qui ont permis de résoudre le problème. On retrouve les stratégies qui ont été porteuses lors de l'activité des carpettes carrées :

- dessiner pour comprendre la situation ;
- placer les nombres à comparer dans un tableau ;
- établir des liens entre les différents éléments ;
- valider les régularités observées dans le registre numérique en les justifiant dans le registre géométrique sur une figure « typique ».

Le premier problème a une solution qu'on détecte en observant le tableau. Encore faut-il s'assurer qu'elle est unique. Pour cela il faut avancer des arguments supplémentaires. Ainsi, à partir de la carpette qui compte dix rangées dans le rectangle blanc intérieur, et qui a autant de carrés blancs que de carrés gris (30) et en constatant que le nombre de carrés gris augmente de 2 à chaque étape alors que le nombre de carrés blancs augmente de 3, on peut déduire que le nombre de carrés gris restera toujours inférieur au nombre de carrés blancs.

Le deuxième problème n'a pas de solution apparente dans le tableau de nombres. Il faut justifier qu'il n'y en aura jamais, même si on prolonge le tableau. À partir de la carpette carrée qui compte cinq rangées dans le rectangle blanc intérieur, qui est la première carpette qui compte plus de carrés blancs (25) que de gris (24), et en constatant que le nombre de carrés blancs augmente de 5 à chaque étape alors que le nombre de carrés gris n'augmente que de 2, on peut déduire que le nombre de carrés blancs restera toujours supérieur au nombre de carrés gris.

Par rapport à l'existence et à l'unicité d'une solution, on retiendra que :
- exhiber un exemple avec les caractéristiques demandées suffit à prouver l'existence d'un élément avec les dites caractéristiques dans une famille infinie ;
- pour justifier l'unicité de la solution, il faut avancer des arguments supplémentaires ;
- inventorier beaucoup de cas possibles ne suffit pas pour justifier l'inexistence d'un élément avec certaines caractéristiques dans une famille infinie.

4. Représentations graphiques

Certains élèves pourraient penser à reporter les nombres du tableau sur un graphique. Si ce n'est pas le cas, l'enseignant leur suggère de le faire. Le travail sur un graphique fait appel à un autre registre, qui permet de voir le problème sous un autre aspect.

Une fiche proposant un système d'axes orthonormés est proposée aux élèves pour leur faciliter le travail. Une première discussion avec les élèves porte sur le choix des variables à placer sur les axes. Dans les figures 5 et 6, nous avons choisi de porter en abscisse le nombre r de rangées de carrés blancs dans la partie centrale. Cela correspond à la première colonne du tableau, dont dépendent les deux autres colonnes. Ce n'est pas le seul choix possible, on pourrait par exemple opter pour le nombre de carrés gris sur le côté variable du tapis.

Problème I

La figure 5 montre un graphique (1) pour le premier problème.

Les élèves peuvent y voir que le nombre de carrés gris est égal au nombre de carrés blancs (30) pour le tapis qui compte 10 rangées de carrés blancs dans la partie centrale. Cette observation est à mettre en relation avec ce qui a été découvert en élaborant le tableau 1.

Le graphique montre aussi que c'est le seul cas qui présente cette particularité.

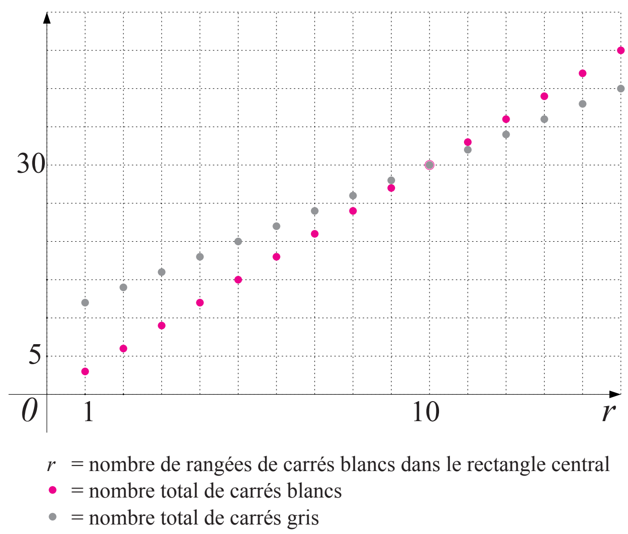


Fig. 5

1. Les graphiques 5 et 6 ne sont pas orthonormés pour des raisons de mise en page.

Les élèves seront peut-être tentés de relier les points de ces graphiques en lignes droites. La discussion s'engagera alors sur la signification des points intermédiaires sur les droites.

Problème II

Une représentation graphique correspondant au deuxième problème apparaît à la figure 6. Celle-ci apporte un éclairage différent sur le fait que pour les tapis les plus petits, le nombre de carrés blancs est inférieur au nombre de carrés gris, mais que la situation s'inverse à partir du cinquième tapis.

On y perçoit également l'écart entre les nombre de carrés blancs et gris qui diminue dans un premier temps, puis ne cesse d'augmenter à partir de $r = 5$.

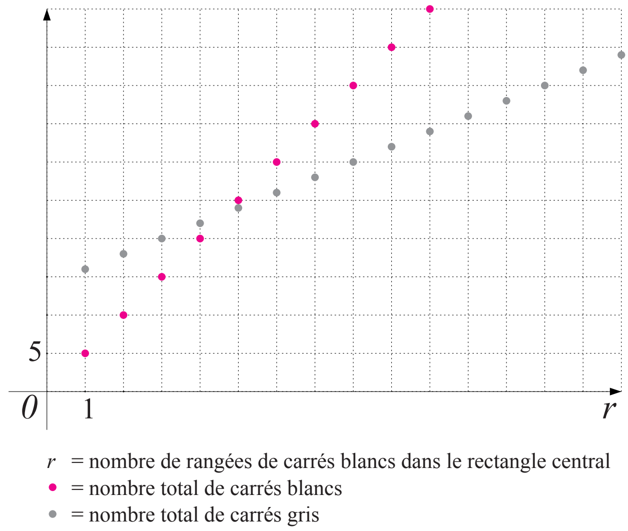


Fig. 6

Pour le cinquième tapis, les nombres de carrés blancs et gris sont très proches, c'est le va-et-vient entre le tableau et le graphique qui lève le doute et permet de conclure que ces nombres ne sont jamais égaux.

Le fait de ne pas trouver de point commun poussera peut-être encore plus les élèves à relier les points, avec l'idée de rechercher le point d'intersection des deux droites supports des points. Il leur faudra comprendre que ce point d'intersection ne fournit pas de solution au problème puisqu'il ne correspond pas à un nombre entier de rangées. Notons que cela correspond au fait que le point d'intersection n'est pas un nœud du quadrillage dans un repère orthonormé.

Prolongement

Dans chacun des deux problèmes, l'alignement des points peut être mis en relation avec les accroissements constants [2] chaque fois qu'on avance de 1 sur l'axe des abscisses, le nombre de carrés gris augmente de 2 et le nombre de carrés blancs augmente de 3 ou de 5.

On peut revenir sur le problème des carpettes carrées et proposer aux élèves de représenter sur un graphique les nombres de carrés gris et de carrés blancs (en fonction du nombre de carrés blancs sur un côté du carré intérieur par exemple). On verra alors apparaître un ensemble de points alignés (les nombres de carrés gris) et un ensemble de points disposés sur une parabole (les nombres de carrés blancs). L'absence de solution au problème des carpettes carrées est à mettre en relation avec le fait qu'il n'y a pas de point commun à ces deux ensembles de points sur le graphique.

D'une manière générale, la diversité des graphiques obtenus en changeant le choix des axes permet des observations intéressantes.

2. Voir à ce sujet [2], chap. 5.

5. Algébrisation

L'enseignant peut décider de poursuivre l'activité afin d'illustrer l'efficacité de l'algèbre pour modéliser une situation et résoudre un problème.

Comme dans le cas de la carpette carrée, on peut faire rechercher par les élèves une règle de calcul pour déterminer directement le nombre de carrés blancs ou gris de n'importe quel tapis de trois (ou de cinq) carrés blancs de large, si on connaît r, le nombre de rangées de carrés blancs du rectangle intérieur.

Problème I

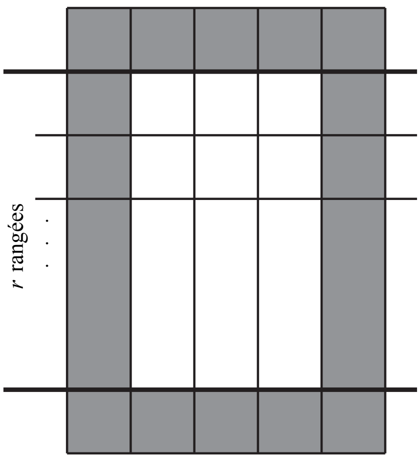


Fig. 7

Si on désigne par r le nombre de rangées de trois carrés blancs dans le rectangle central, on construit les formules suivantes en s'appuyant sur la figure 7 :

le nombre total de carrés blancs : $B = 3 \times r$,

le nombre total de carrés gris : $G = 2 \times r + 2 \times 5$.

Si on cherche ensuite une valeur de r pour laquelle $B = G$, on obtient l'équation

$$3 \times r = 2 \times r + 10,$$

dont la solution $r = 10$ correspond bien à celle obtenue dans le tableau, et qu'on voit sur le graphique.
Cette dernière démarche montre l'intérêt de la mise en équation pour résoudre un problème de ce type.

Problème II

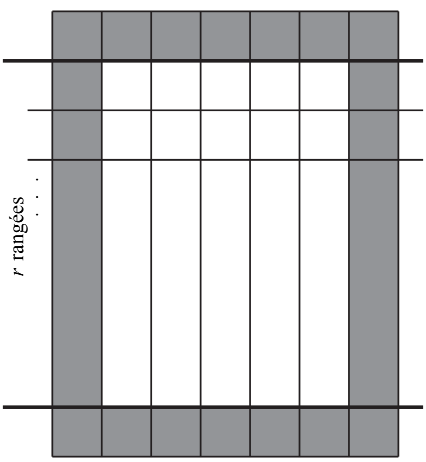


Fig. 8

Un schéma comme celui de la figure 8, où r désigne le nombre de rangées de cinq carrés blancs dans le rectangle central, permet d'obtenir :

le nombre de carrés blancs : $B = 5 \times r$,

le nombre de carrés gris : $G = 2 \times r + 2 \times 7$.

Si on cherche, à partir des formules obtenues plus haut, la valeur de r pour laquelle le nombre de carrés gris est égal au nombre de carrés blancs, on écrit l'équation

$$5 \times r = 2 \times r + 14,$$

et on obtient la solution $r = \frac{14}{3}$ qui n'est pas une solution acceptable car cela ne correspond pas à un nombre entier de rangées.

Ceci est à mettre en relation avec le fait qu'il n'y a pas de point commun aux deux ensembles de points alignés de la figure 6. Cette valeur $r = \frac{14}{3}$ est l'abscisse du point d'intersection des deux droites support des points correspondant au problème. On conclut que le problème II n'a pas de solution, aucun tapis n'a autant de carrés blancs que de gris.

6. Synthèse

Deux nouvelles stratégies ont été mises en place :

— à partir des tableaux de nombres, représenter graphiquement le nombre de carrés gris et le nombre de carrés blancs et observer sur le graphique s'il existe un nombre de rangées qui rend ces nombres égaux ;

— établir des formules pour calculer directement le nombre de carrés gris et de carrés blancs en fonction du nombre de rangées de carrés blancs dans la partie centrale, puis résoudre une équation.

Quelques considérations à propos des équations méritent d'être discutées avec les élèves.

— Le premier problème des carpettes rectangulaires débouche sur une équation du premier degré qui a une solution dans les nombres naturels, c'est celle qui ressort des dessins et tableaux de nombres, elle est aussi fournie par le point commun aux deux ensembles de points alignés.

— Le deuxième problème des carpettes rectangulaires débouche sur une équation du premier degré dont la solution n'est pas acceptable. Les dessins, tableaux de nombres et graphiques ont montré que le problème n'avait pas de solution.
Comme on recherche un nombre entier de carrés blancs et gris, c'est le fait que la solution de l'équation n'est pas un entier positif qui confirme que le problème n'a pas de solution.

— Le problème des carpettes carrées débouche sur une équation du second degré que les élèves du début du secondaire ne sont pas capables de résoudre. L'absence de solution au problème n'est pas due au fait que l'équation est du second degré ($b^2 = 4b + 4$) mais au fait que cette équation n'admet pas de solution entière positive, comme dans le second problème des carpettes rectangulaires.

Les deux problèmes des tapis rectangulaires illustrent l'efficacité de l'algèbre ; ils montrent tout l'intérêt d'être capable de mettre le problème en équation pour trouver la solution.

— Si le problème a une (ou plusieurs) solution(s), la résolution de l'équation permet de la trouver sans passer par l'inventaire des cas possibles.

— Si le problème n'a pas de solution, l'équation permet de s'en assurer, c'est particulièrement intéressant dans les cas où l'inventaire exhaustif des cas possibles est fastidieux ou impossible.

7. Conclusion

Cette proposition de séquence d'apprentissage a été construite à partir de trois problèmes sélectionnés pour les nombreuses compétences qu'ils permettent de travailler avec les élèves. En voici quelques unes que nous avons relevées.

— Établir des liens entre les registres géométrique, graphique et numérique ;
— présenter des résultats dans des tableaux ordonnés de nombres ;
— dégager des régularités dans un tableau de nombres, élaborer des conjectures ;

— distinguer conjecture et preuve.

En voici d'autres telles qu'elles figurent dans le document *Socles de compétences* [4] :

Compétences transversales

— *Repérer, reformuler la ou les question(s) explicite(s)* [...].
— *Agir et interagir sur des matériels divers (tableaux, figures,* [...]*).*
— *Utiliser un schéma, un dessin, un tableau, un graphique lorsque ces supports sont pertinents.*
— *Exposer et comparer ses arguments, ses méthodes ; confronter ses résultats avec ceux des autres* [...]
— *S'exprimer dans un langage clair et précis ; citer l'énoncé qu'on utilise pour argumenter ; maîtriser le symbolisme mathématique usuel, le vocabulaire et les tournures nécessaires pour décrire les étapes de la démarche ou de la solution.*
— *Distinguer « ce dont on est sûr » de « ce qu'il faut justifier ».*

Compétences disciplinaires

— *Relever des régularités dans des suites de nombres.*
— *Dans un contexte* [...] *de pavage et de reproductions de dessins, relever la présence de régularités.*
— *Organiser selon un critère.*
— *Construire des expressions littérales où les lettres ont le statut de variables ou d'inconnues.*
— *Associer un point à ses coordonnées dans un repère.*
— *Résoudre et vérifier une équation du premier degré à une inconnue issue d'un problème simple.*

Globalement, l'approche par résolution de problèmes propose d'organiser l'apprentissage en partant des problèmes pour aller vers les concepts plutôt que dans le sens inverse, plus traditionnel. Du point de vue pédagogique, la confrontation des stratégies est organisée pour emmener les élèves vers un véritable débat scientifique où la nécessité d'expliciter sa démarche viendra de la volonté d'être compris par ses pairs plutôt que d'une exigence de l'enseignant. Nous prenons aussi en compte que la rédaction d'une démarche ou la justification d'une stratégie fait partie des compétences à enseigner.

Dans ce type d'approche, le rôle de l'enseignant est largement modifié, comme le montre cet article qui tente de décrire le déroulement possible de l'activité, au plus près de la réalité du terrain.

Pour en savoir plus

[1] *Banque de problemes du RMT (Rallye Mathématique Transalpin).* http://www.projet-ermitage.org/ARMT/doc/bp-rmt-acces-fr.html.

[2] CREM, *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur.* N. Rouche coordinateur, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, 2002.

[3] Guissard M.-F. et Wettendorff I., Des figures en évolution : les carpettes carrées. *Losanges*, n° 40, pp. 3–12., 2018.

[4] Ministère de la Communauté française, *Socles de compétences (Enseignement fondamental et premier degré de l'enseignement secondaire).* Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Direction de la Recherche en Éducation et du Pilotage interréseaux, 15-17, Place Surlet de Chokier, 1000 - Bruxelles, 1999.

Marie-France Guissard est chercheur au CREM, Isabelle Wettendorff est chercheur à l'UNamur
mf.guissard@crem.be, isabellewettendorff@gmail.be