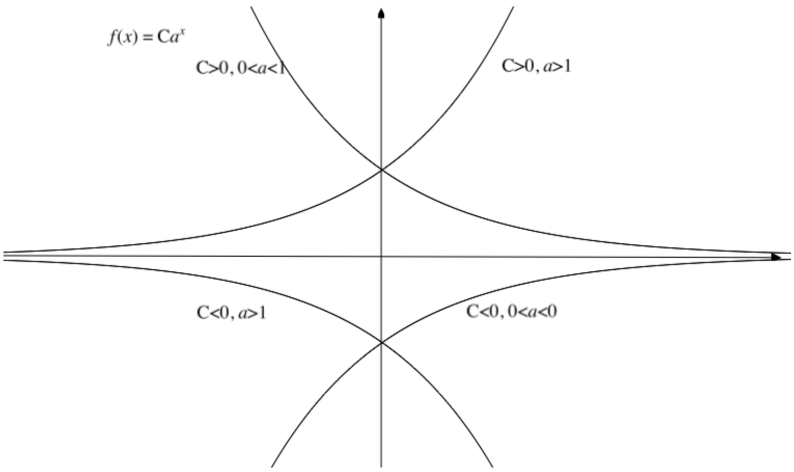
Construction du modèle exponentiel

MARIZA KRYSINSKA, KRYSINSKA.MARIZA@GMAIL.COM
site : https://wp.gem-math.be/
courriel : contact@gem-math.be

Introduction

Par le modèle exponentiel nous comprenons la classe de fonctions exponentielles identifiée numériquement par la transformation de toute suite arithmétique en suite géométrique, algébriquement par la formule paramétrée $f(x) = Ca^x$ et graphiquement par quatre idéogrammes (figures emblématiques de la classe) représentés ci-dessous.



Le terme « *construction* » est utilisé comme en géométrie lorsqu'on veut, par exemple, construire un triangle dont les longueurs des côtés sont données ou encore le lieu de points équidistants de deux points donnés. Deux questions mathématiques sont alors traitées : l'existence d'un objet à construire et son unicité.

Pour quelles raisons considère-t-on des fonctions exponentielles comme objets à construite ? Car la construction des fonctions exponentielles peut être organisé en un processus composé des confrontations entre les preuves et les réfutations des diverses hypothèses, ce qui contribue à la compréhension profonde du modèle exponentiel en fournissant ainsi ses raisons d'être, les critères de son identification et les outils de résolution des divers problèmes d'application intra et extra mathématiques.

Un autre intérêt d'une telle approche est sa potentialité à garantir un certain degré d'autonomie de l'élève dans le traitement des questions formant cette approche.

Quelques éléments d'un parcours didactique organisé autour de la construction du modèle exponentiel sont proposés ci-dessous. Ce parcours a été testé et ajusté lorsque j'ai enseigné cette matière pendant des nombreuses année, dans les classes de 6^{e} avec les différents nombres d'heures des mathématiques (math

Construction du modèle exponentiel

MARIZA KRYSINSKA, KRYSINSKA.MARIZA@GMAIL.COM
site : https://wp.gem-math.be/
courriel : contact@gem-math.be

4, math 6, math 8). Sa première version est présente dans le manuel AHA, puis retravaillée au cours des années et proposée sous la forme fortement retravaillée dans l'article de Krysinska, Schneider (2017)

1. Trois problèmes relevant d'un même modèle fonctionnel

Dans cette sections, je presente quelques problèmes d'application des fonctions exponentielles dont le traitement est conforme à l'approche proposée.

*1. Le physicien Rutherford et ses collègues ont montré que les atomes d'un élément radioactif sont instables et que **sur une période de temps donnée il y a une proportion fixe des atomes qui se désintègrent en formant un nouvel élément**. Le Polonium 210 a une demi-vie de 140 jours. Trouvez une formule qui permette de calculer la masse qui reste d'une masse initiale de 200 mg, après t jours.*

*2. Une substance radioactive se décompose à un rythme tel que**, au cours d'un intervalle de temps très petit, la quantité décomposée est proportionnelle à la longueur de l'intervalle et à la quantité présente au début de l'intervalle**. On conserve à Turin un linge portant les marques d'un visage et dont on a cru longtemps qu'il avait été appliqué sur la face du Christ : cet objet est connu sous le nom de « suaire de Turin ». Pour savoir si cette relique est authentique, on en a confié la datation à cinq laboratoires. La radioactivité résiduelle du suaire a été trouvée égale à 92%. Qu'en pensez-vous ? La demi-vie du carbone 14 est de 5730 ans.*

*3. Des lames de verre identiques d'une épaisseur donnée sont juxtaposée. **Chacune d'elle absorbe un pourcentage constant de la lumière. On suppose que toute la lumière qui sort d'une lame est reçue par la suivante.** Si les lames ont une épaisseur d'un millimètre alors chacune d'elles absorbe 4% et transmet donc 96% de la lumière.*

a. Quel est le nombre minimum de lames que la lumière doit traverser pour que 40% au moins de la quantité de la lumière initiale soit absorbée ?
b. On considère maintenant l'ensemble des lames comme un bloc de verre homogène. Si x est un nombre réel positif qui mesure en millimètres la distance parcourue par la lumière dans le bloc de verre, quelle est la quantité de lumière non absorbée par le verre par ce parcours ?

On peut se convaincre rapidement que ces trois problèmes relèvent d'un même modèle fonctionnel car répondant à un même type de contraintes. En effet, analysons les trois énoncés en y dégageant ces contraintes.
Dans le cas du premier problème, la contrainte est exprimée en ces mots : **«** *sur une période de temps donnée il y a une proportion fixe des atomes qui se désintègrent en formant un nouvel élément* **».** Lorsque

Construction du modèle exponentiel

MARIZA KRYSINSKA, KRYSINSKA.MARIZA@GMAIL.COM
site : https://wp.gem-math.be/
courriel : contact@gem-math.be

$N(t)$ désigne le nombre d’atomes non désintégrés au moment *t,* cette contrainte est traduite algébriquement par la condition

Le rapport $\frac{N(t+\Delta t)}{N(t)}$ est constant sur les intervalles de la même longueur Δx,

ou par l’égalité vraie pour toutes les valeurs de t et de Δt

$$\frac{N(t+\Delta t)}{N(t)} = \frac{N(\Delta t)}{N(0)}.$$

Dans le cas du deuxième problème, la contrainte est exprimée par ces mots : *« au cours d’un intervalle de temps très petit, la quantité décomposée est proportionnelle à la longueur de l’intervalle et à la quantité présente au début de l’intervalle ».* Elle est équivalente à la contrainte précédente. En effet, algébriquement on la traduit par l’égalité

$$N(t) - N(t+\Delta t) = k_{\Delta t} \cdot \Delta t \cdot N(t),$$

d’où

$$\frac{N(t+\Delta t)}{N(t)} = -k_{\Delta t} \cdot \Delta t + 1,$$

donc le rapport $\frac{N(t+\Delta t)}{N(t)}$ est constant sur les intervalles de la même longueur Δx.

Quant à la contrainte du troisième problème, elle est exprimée ainsi : « *Des lames de verre identiques d’une épaisseur donnée sont juxtaposée. Chacune d’elle absorbe un pourcentage constant de la lumière. On suppose que toute la lumière qui sort d’une lame est reçue par la suivante* ». Lorsque $L(x)$ désigne la quantité de lumière non absorbée par le verre d’épaisseur x, elle est traduite algébriquement par la condition :

$\left(\frac{L(x)-L(x+\Delta x)}{L(x)}\right) \times 100$ constant sur les intervalles de la même longueur Δx,

ou par la condition :

$\frac{L(x+\Delta x)}{L(x)}$ constant sur les intervalles de la même longueur Δx.

Dans ces trois cas, on voit la ressemblance entre les contraintes, ce qui fait penser que le modèle fonctionnel y impliqué est le même.

Dans les sections suivantes, nous allons construire, pas à pas, ce type de modèle fonctionnel et nous allons montrer qu’il s’agit bien du modèle exponentiel.

Construction du modèle exponentiel

MARIZA KRYSINSKA, KRYSINSKA.MARIZA@GMAIL.COM
site : https://wp.gem-math.be/
courriel : contact@gem-math.be

2. Construction d'une fonction exponentielle comme fonction "sous contraintes "

2.1 Première contrainte : On suppose qu'une population de bactéries double toutes les heures.

Comment peut-elle évoluer pendant une heure ?
Notons par $P(n)$ le nombre des bactéries à la n[e] heure. La formule algébrique correspondant au doublement de la population des bactéries toutes les heures serait, selon le nombre des bactéries supposé au moment 0, $P(n) = 1\,000\,000 \cdot 2^n$ ou $P(n) = 10\,000\,000 \cdot 2^n$ ou d'une manière générale $P(n) = P(0) \cdot 2^n$. La contrainte du doublement ne suffit pas pour que le modèle soit exponentiel. En effet, l'approche graphique montre plusieurs modèles possibles, comme en témoignent les figures ci-dessous.

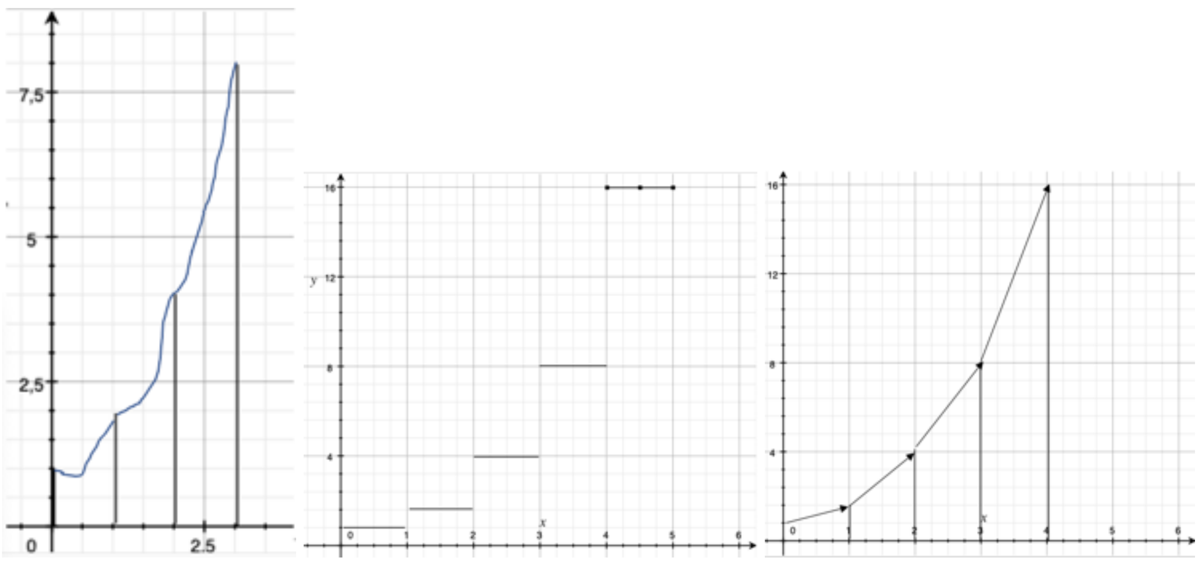


Figure 1

Le premier graphique est à rejeter car il ne vérifie la condition du doublement que toutes les heures entières, à partir de 0 heure.
Il est évident que le deuxième graphique le vérifie, indépendamment du début de l'heure.
Le cas du troisième graphique est moins évident. Comme chaque trapèze associé au segment qui est un élément de la ligne brisée, est obtenu du trapèze qui le précédent par l'étirement du rapport 2, parallèle à l'axe des ordonnées, la contrainte est ainsi vérifiée.
De cette manière, on peut construire une infinité des modèles fonctionnels qui vérifient la contrainte du doublement toutes les heures, indépendamment du début de la première heure.

Construction du modèle exponentiel

MARIZA KRYSINSKA, KRYSINSKA.MARIZA@GMAIL.COM
site : https://wp.gem-math.be/
courriel : contact@gem-math.be

En conclusion, la contrainte du doublement des bactéries toutes les heures ne détermine pas un modèle unique et la formule $P(t) = P(0) \cdot 2^t$ ne représente pas le seul modèle possible.

2.2 Deuxième contrainte : On suppose que la population des bactéries double toutes les heures et en plus que la population des bactéries augmente d'une demi-heure à l'autre dans un même rapport.

Cette contrainte est une généralisation de la première contrainte car « *doubler toutes les heures* » revient à « *augmenter dans le même rapport d'une heure à l'autre* », avec cette différence qu'on ignore dans ce cas la valeur du rapport.

Vérifions maintenant si cette contrainte est satisfaite par le 2e et le 3e graphique de la figures 1 :

- la contrainte n'est pas vérifiée par le 2e graphique car le rapport entre la valeur de la fin de la première demi-heure à la valeur du début de l'heure est égal à 1 et le rapport entre la valeur de la fin de l'heure à la valeur de la fin de la première demi-heure est égal à 2 ;
- la contrainte n'est pas vérifiée par le 3e graphique. En effet, le premier rapport vaut $\frac{3}{2}$ et le deuxième vaut $\frac{4}{3}$.

Cette contrainte élimine donc les modèles fonctionnels représentés par les graphiques de la figure 1 et aussi par tous les autres graphiques construits comme figures successives obtenues par étirement du rapport 2 parallèle à l'axe des ordonnées de la figure initiale de base correspondant à l'unité choisie sur l'axe des abscisses.

La nouvelle question se pose alors : sachant que la population des bactéries double toutes les heures et qu'elle augmente dans un même rapport toutes les demi-heures, pouvons-nous calculer ce rapport ?

La contrainte est traduite par l'égalité $\frac{P\left(\frac{1}{2}\right)}{P(0)} = \frac{P(1)}{P\left(\frac{1}{2}\right)} = \alpha$. D'où

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha\, P(0)$$

et

$$P(1) = \alpha P\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha^2\, P(0). \qquad (1)$$

D'autre part, par la contrainte du doublement toutes les heures, on a

$$P(1) = 2P(0) \qquad (2)$$

Ainsi, par (1) et (2), on a

$$2P(0)=\alpha^2 P(0),$$

d'où

$$\alpha^2 = 2$$

et donc

Construction du modèle exponentiel

MARIZA KRYSINSKA, KRYSINSKA.MARIZA@GMAIL.COM
site : https://wp.gem-math.be/
courriel : contact@gem-math.be

$$\alpha = \sqrt{2}.$$

La connaissance de la valeur numérique du rapport α permet dresser le tableau d'évolution de la population des bactéries toutes les demi-heures.

Temps *t*	0	1/2	1	3 /2	2	5/2	3
P(t)	$P(0)$	$P(0)\sqrt{2}$	$P(0)\left(\sqrt{2}\right)^2$	$P(0)\left(\sqrt{2}\right)^3$	$P(0)\left(\sqrt{2}\right)^4$	$P(0)\left(\sqrt{2}\right)^5$	$P(0)\left(\sqrt{2}\right)^6$
En notation exponentielle	$P(0)2^0$	$P(0)2^{1/2}$	$P(0)2^1$	$P(0)2^{3/2}$	$P(0)2^2$	$P(0)2^{5/2}$	$P(0)2^3$

Ce tableau est modélisé par la formule $P(n/2) = P(0)2^{n/2}$.

En conclusion, les deux contraintes : le doublement toutes les heures et le rapport de croissance constant toutes les demi-heure, déterminent un et un seul modèle fonctionnel $P(n/2) = P(0)2^{n/2}$. Il s'agit bien du modèle exponentiel car la variable indépendante se trouve dans l'exposant de la puissance 2.

2.3 Généralisation de la deuxième contrainte : On suppose que la population des bactéries double toutes les heures et qu'elle augmente dans un même rapport sur tous les intervalles de temps égaux.

Comment évolue-t-elle toutes les *n*e d'heure ?
Pour y répondre, il suffit d'établir le rapport dans lequel la population de bactéries augmentes toutes les ne d'heure : il vaut $\sqrt[n]{2}$. Le tableau ci-dessous représente son évolution.

Temps *t*	0	1/*n*	2/*n*	…	*n* /*n*	…	*k* /*n*
P(*t*)	$P(0)$	$P(0)\sqrt[n]{2}$	$P(0)\sqrt[n]{2}^2$	…	$P(0)\sqrt[n]{2}^n = 2P(0)$		$P(0)\sqrt[n]{2}^k$
En notation exponentielle	$P(0)2^0$	$P(0)2^{1/n}$	$P(0)2^{2/n}$	…	$P(0)2^{\frac{n}{n}} = P(0)2$		$P(0)2^{k/n}$

La formule du type exponentiel $\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}\right) = \mathrm{P}(0)2^{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}}$ modélise ce tableau. Elle représente la famille des fonctions exponentielles de base 2.

En conclusion, la condition initiale $P(0)$, la contrainte du doublement toutes les heures et la contrainte $\frac{P(t+\Delta t)}{P(t)} = \frac{P(\Delta t)}{P(0)}$ permettent de déterminer une et une seule fonction définie sur l'ensemble des nombres rationnels. Cette fonction est bien exponentielle car la variable indépendante se trouve dans l »'exposant de la puissance.

Construction du modèle exponentiel

MARIZA KRYSINSKA, KRYSINSKA.MARIZA@GMAIL.COM
site : https://wp.gem-math.be/
courriel : contact@gem-math.be

2.4 La formule reste-elle la même si on change l'unité ?

Considérons toujours la même population de bactérie qui double toutes les 60 minutes et qui augmente dans un même rapport sur les intervalles de temps égaux. Comment évolue-elle d'une minute à l'autre, d'une n^e de minute à l'autre ?
La réponse est montrée dans les tableaux ci-dessous avec l'évolution de la population des bactéries d'abord toutes les minutes, et ensuite toutes les n^e de minute.

Temps *t*	0	1	2	...	60	...	...
P(*t*)	$P(0)$	$P(0)(\sqrt[60]{2})^1$	$P(0)(\sqrt[60]{2})^2$	...	$P(0)(\sqrt[60]{2})^{60} = 2P(0)$		...
En notation exponentielle	$P(0)2^0$	$P(0)(2^{1/60})^1$	$P(0)(2^{1/60})^2$	...	$P(0)(2^{1/60})^{60} = P(0)2$		...

La formule $P(n) = P(0)(2^{1/60})^n$ exprimant nombre des bactéries en fonction du nombre de minutes est le modèle algébrique associé à ce tableau.

Temps *t*	0	$1/n$	$2/n$	...	$n/n = 1$	...	$60\,n/n = 60$	k/n
P(*t*)	$P(0)$	$P(0)\sqrt[n]{\sqrt[60]{2}}$	$P(0)\left(\sqrt[n]{\sqrt[60]{2}}\right)$	...	$P(0)\left(\sqrt[n]{\sqrt[60]{2}}\right)^n = P(0)\sqrt[60]{2}$		$P(0)\left(\sqrt[n]{\sqrt[60]{2}}\right)^{60n} = 2P(0)$	$P(0)\sqrt[n]{2}^k$
En notation exponentielle	$P(0)2^0$	$P(0)(2^{1/60})^{1/n}$	$P(0)(2^{1/60})^{2/}$		$P(0)(2^{1/60})^{n/n} = P(0)2^{1/60}$		$P(0)(2^{1/60})^{n60/n} = P(0)2$	$P(0)(2^{1/60})^{k/n}$

La formule $P\left(\frac{k}{n}\right) = P(0)\left(2^{1/60}\right)^{k/n}$ modélise ce tableau. Elle représente la famille des fonctions exponentielles de base $2^{1/60}$.
En conclusion, le changement de l'unité du temps a pour conséquence le changement de la base des fonctions exponentielles.

2.5 Qu'en est-il des valeurs irrationnelles de t ?

Par exemple comment calculer $2^{\sqrt{2}}$?
La réponse d'un élève qui semble être sensée : aucun intérêt car en pratique le calcul de la population des bactéries en fonction du temps se fait pour des fractions d'une unité du temps. On y reviendra plus loin.
D'autre part, on voit apparaître les difficultés lorsqu'on propose à certains élèves de calculer $2^{\sqrt{2}}$ ou encore 2^{π}. Dans le cas de $2^{\sqrt{2}}$, ces élèves cherchent les opérations arithmétiques pour « chasser » l'irrationalité de l'exposant ; dans le cas de 2^{π}, il arrive que les élèves proposent de multiplier deux par deux, ... π fois ! Ces difficultés montrent la nécessité et l'intérêt de définir la notation exponentielle pour les différents types de nombres : successivement pour entiers positifs, entiers négatifs, rationnels positifs, rationnels négatifs

Construction du modèle exponentiel

MARIZA KRYSINSKA, KRYSINSKA.MARIZA@GMAIL.COM
site : https://wp.gem-math.be/
courriel : contact@gem-math.be

irrationnels, ... Dans beaucoup de manuels scolaires, on passe rapidement à la notation du type 2^tsans le faire.

2.6 Question à l'envers : à quel moment la population de bactéries triple-elle ?

On doit calculer la valeur de *t* telle que $P(0)2^t = 3P(0)$, donc telle que $2^t = 3$. Ce calcul se fait pas à pas, par la construction des intervalles emboités qui contiennent cette valeur de *t* :

$$1 < t < 2 \text{ car } 2 < 3 < 4$$
$$1{,}5 < t < 2 \text{ car } 2^{1{,}5} = 2{,}82 < 3$$
$$1{,}5 < t < 1{,}6 \text{ car } 3 < 2^{1{,}6} = 3{,}03 \ldots$$
$$1{,}58 < t < 1{,}59 \text{ car } 2^{1{,}58} = 2{,}9897 \ldots < 3 < 2^{1{,}59} = 3{,}0105$$
$$\ldots$$

Ce processus ne se terminera jamais car la valeur de *t* telle que $2^t = 3$ est irrationnelle. En effet, si $2^{k/n} = 3$, alors $2^k = 3^n$, ce qui est impossible car un nombre pair n'est jamais égal à un nombre impair.
Remarquons que calculer le temps de triplement revient à calculer le premier logarithme de base 2 noté par $\log_2 3$ et que ce calcul est nécessairement approximatif : $\log_2 3 \approx 1{,}58$.

L'exemple du temps de triplement montre l'intérêt à définir $P(0)2^t$ pour les valeurs irrationnelles de *t* et il indique le moyen de le faire pour les autres valeurs irrationnelles de t.
Par exemple, pour calculer $P(0)2^{\sqrt{2}}$, on est amené à calculer $2^{\sqrt{2}}$. Pour cela, on considère d'abord la suite d'intervalles qui encadrent $\sqrt{2}$: [1 :2], [1,4 :1,5], [1,41 :1, 42], [1,41 :1, 42], [1,414 :1,415], [1,4142 :1, 4143],... . Les intervalles qui encadrent alors $2^{\sqrt{2}}$ seront les suivants :

$$[2^1, 2^2] = [2{,}4]$$
$$[2^{1{,}4}, 2^{1{,}5}] \approx [2{,}639; 2{,}8284]$$
$$[2^{1{,}41}, 2^{1{,}42}] \approx [2{,}6574; 2{,}6759]$$
$$[2^{1{,}414}, 2^{1{,}415}] \approx [2{,}6647; 2{,}6666]$$
$$\ldots$$

A ce stade des calculs, on connaît $2^{\sqrt{2}}$ par son approximation aux deux premières décimales près : $2^{\sqrt{2}} = 2{,}66 \ldots$

Regardons de plus près les fondements du raisonnement présenté ci-dessus : résumons-les en quelques points :

- l'axiome de complétude : tout nombre qui est encadré par la suite des intervalles emboîtés de longueurs qui tendent vers 0, est l'élément unique de leur intersection ;
- l'hypothèse supplémentaire : étant donné que la fonction représentée par $y = 2^{k/n}$ où k et n sont des nombres entiers est croissante sur l'ensemble des nombres rationnels, on suppose que son prolongement aux nombres irrationnels est croissant ;

Construction du modèle exponentiel

MARIZA KRYSINSKA, KRYSINSKA.MARIZA@GMAIL.COM
site : https://wp.gem-math.be/
courriel : contact@gem-math.be

- la propriété des puissances de rationnels : si la longueur d'une suite d'intervalles tendent vers 0, alors la longueur des intervalles de leurs puissances tend également vers 0. Autrement dit, si les intervalles $[a_n, b_n]$ sont tels que $\lim_{n \to 0} |b_n - a_n| = 0$, alors $[2^{a_n}, 2^{b_n}]$ sont également des intervalles emboités tels que $\lim_{n \to 0} |2^{b_n} - 2^{a_n}| = 0$.

.On peut aussi prouver que le prolongement croissant $y = 2^t$ de $y = 2^{k/n}$ à toutes les valeurs réelles de t est nécessairement un prolongement continu. Cela résulte du théorème selon lequel toute fonction croissante de R vers R_0^+ et surjective est continue.

3. Institutionnalisation

A l'étape de l'institutionnalisation, il s'agit d'établir

> « *une référence pour des utilisations futures, personnelles ou collectives. Exemple : la résolution d'un problème, si elle déclarée typique peut devenir méthode ou théorème. Avant l'institutionnalisation, l'élève ne peut pas se référer à ce problème qu'il sait résoudre : devant un problème semblable, il doit produire à nouveau la démonstration. Au contraire après l'institutionnalisation, il peut utiliser le théorème sans en redonner la démonstration ou la méthode sans la justifier. L'institutionnalisation comporte donc un changement de convention entre les actants, une reconnaissance (justifiée ou non) de la validité et de l'utilité d'une connaissance, et une modification de cette connaissance - qui est « encapsulée » et désignée - et une modification de son fonctionnement.*
> [...]
> *C'est elle qui permet au professeur et à l'élève de **reconnaitre et de légitimer « l'objet de l'enseignement** », même s'ils le voient de façons différentes. Elle peut consister en la reconnaissance par l'enseignant de la valeur d'une production des élèves.*
> *[...]*
> *Elle affirme alors : **(1) que la proposition de l'élève est valide et reconnue comme telle hors du contexte particulier de la situation présente, (2) qu'elle servira dans d'autres occasions, encore non connues, (3) qu'il sera alors plus avantageux de la reconnaitre et de l'utiliser sous sa forme réduite que de l'établir à nouveau (4) qu'elle sera acceptée directement par tous ou au moins par les initiés. »***

(Brousseau, 2010)

La fonction exponentielle de base 2 construite, étape par étape, par la densification des suites géométriques.

Première étape : le doublement de la population de bactéries toutes les heures :

Temps *t*	0	1	2	3	4	…	n
P(t)	$P(0)$	$2P(0)$	$4P(0)$	$8P(0)$	$16P(0)$	…	$P(0)2^n$

Construction du modèle exponentiel

MARIZA KRYSINSKA, KRYSINSKA.MARIZA@GMAIL.COM
site : https://wp.gem-math.be/
courriel : contact@gem-math.be

Deuxième étape : évolution de la population des bactérie toutes les demi-heures :

Temps *t*	0	1/2	1	3 /2	2	5/2	3
P(t)	$P(0)$	$P(0)\sqrt{2}$	$P(0)(\sqrt{2})^2$	$P(0)(\sqrt{2})^3$	$P(0)(\sqrt{2})^4$	$P(0)(\sqrt{2})^5$	$P(0)(\sqrt{2})^6$
En notation exponentielle	$P(0)2^0$	$P(0)2^{1/2}$	$P(0)2^1$	$P(0)2^{3/2}$	$P(0)2^2$	$P(0)2^{5/2}$	$P(0)2^3$

n^e étape : évolution de la population des bactérie toutes les n^e d'heure :

Temps *t*	0	1/*n*	2/*n*	...	*n* /*n* = 1	...	*k* /*n*
P(*t*)	$P(0)$	$P(0)\sqrt[n]{2}$	$P(0)\sqrt[n]{2}^2$	...	$P(0)\sqrt[n]{2}^n = 2P(0)$		$P(0)\sqrt[n]{2}^k$
En notation exponentielle	$P(0)2^0$	$P(0)2^{1/n}$	$P(0)2^{2/n}$	...	$P(0)2^{\frac{n}{n}} = P(0)2$		$P(0)2^{k/n}$

A certains élèves, on peut proposer d'établir la proposition générale exprimée avec les notations générales où le nombre des éléments d'une population à un moment quelconque t est noté par $P(t)$, au moment zéro par $P(0)$ et au moment d'une unité de temps, par $P(1)$.

Proposition
Si une fonction P vérifie la condition $P(t + \Delta t)/P(t) = P(\Delta t)/P(0)$ quelle que soit la valeur réelle de t et de Δt, autrement dit si la fonction P augmente ou si elle diminue dans un même rapport sur les intervalles de temps égaux, alors $P(t)$ est exprimé algébriquement par la formule du type exponentiel

$$P(t) = P(0)\left(\frac{P(1)}{P(0)}\right)^t.$$

Remarquons que cette formule est valable à condition que $P(0) \neq 0$. Dans la section 4, on montrera que $P(0) = 0$ entraine que $P(t)$ s'annule partout. Donc si on suppose que $P(t)$ n'est pas une fonction nulle, $P(0)$ ne s'annule pas.

Le cas général est résumé dans le tableau suivant.
est présenté dans la section 5.2.

t	0	1/*n*	2/*n*	3/*n*	...	*n*/ =1	...	*k*/*n*	...
P(t)	P(0)	$P(0)\left(\frac{P(1)}{P(0)}\right)^{\frac{1}{n}}$	$P(0)\left(\frac{P(1)}{P(0)}\right)^{\frac{2}{n}}$	$P(0)\left(\frac{P(1)}{P(0)}\right)^{\frac{3}{n}}$		$P(0)\frac{P(1)}{P(0)} = P(1)$	...	$P(0)\left(\frac{P(1)}{P(0)}\right)^{\frac{k}{n}}$	

Le prolongement aux valeurs irrationnelles de la variable t est présenté dans la section 5.2.

Construction du modèle exponentiel

MARIZA KRYSINSKA, KRYSINSKA.MARIZA@GMAIL.COM
site : https://wp.gem-math.be/
courriel : contact@gem-math.be

4. Retour aux exemples

Nous disposons maintenant des outils pour résoudre les problèmes proposés au début.

1. *Le physicien Rutherford et ses collègues ont montré que les atomes d'un élément radioactif sont instables et que* ***sur une période de temps donnée il y a une proportion fixe des atomes qui se désintègrent en formant un nouvel élément****. Le Polonium 210 a une demi-vie de 140 jours. Trouvez une formule qui permette de calculer la masse qui reste après t jours d'une masse initiale de 200 mg*

$$N(t) = ?$$

Contrainte : $\frac{N(t+\Delta t)}{N(t)}\, constant$ sur les intervalles de temps d'une même longueur Δt

Modèle : $N(t) = 200a^t$

$$a = ?$$
$$N(140) = ½ \cdot 200 = 100$$
$$200a^{140} = 100$$
$$a^{140} = ½$$
$$a = \sqrt[140]{\frac{1}{2}} = 0{,}9951,$$
$$N(t) = 200(0{,}9951)^t$$

2. *Une substance radioactive se décompose à un rythme tel que****, au cours d'un intervalle de temps très petit, la quantité décomposée est proportionnelle à la longueur de l'intervalle et à la quantité présente au début de l'intervalle****. On conserve à Turin un linge portant les marques d'un visage et dont on a cru longtemps qu'il avait été appliqué sur la face du Christ : cet objet est connu sous le nom de « suaire de Turin ». Pour savoir si cette relique est authentique, on en a confié la datation à cinq laboratoires. La radioactivité résiduelle du suaire a été trouvée égale à 92%. Qu'en pensez-vous ? La demi-vie du carbone 14 est de 5730 ans.*

$$N(t) = ?$$

Contrainte : $N(t) - N(t + \Delta t) = k_{\Delta t} \cdot \Delta t \cdot N(t),$

$$\frac{N(t+\Delta t)}{N(t)} = -k_{\Delta t} \cdot \Delta t + 1,$$

Modèle : $N(t) = N(0) \cdot a^t$

$$N(5730) = ½ \cdot N(0) = N(0)a^{5730}$$
$$½ = a^{5730}$$
$$a = 0{,}9999$$
$$N(t) = N(0) \cdot 0{,}9999^t$$

Vérification : $N(5730) = ½ \cdot N(0)$?

Construction du modèle exponentiel

MARIZA KRYSINSKA, KRYSINSKA.MARIZA@GMAIL.COM
site : https://wp.gem-math.be/
courriel : contact@gem-math.be

$$= N(0) \cdot 0{,}9999^{5730} = N(0) \cdot 0{,}5638 \approx ½ \cdot N(0)$$

3. *Des lames de verre identiques d'une épaisseur donnée sont juxtaposée.* ***Chacune d'elle absorbe un pourcentage constant de la lumière. On suppose que toute la lumière qui sort d'une lame est reçue par la suivante.*** *Si les lames ont épaisseur d'un millimètre alors chacune d'elles absorbe 4% et transmet donc 96% de la lumière.*
   a. *Quel est le nombre minimum de lames que la lumière doit traverser pour que 40% au moins de la quantité de la lumière initiale soit absorbée ?*
   b. *On considère maintenant l'ensemble des lames comme un bloc de verre homogène. Si x est un nombre réel positif qui mesure en millimètres la distance parcourue par la lumière dans le bloc de verre, quelle est la quantité de lumière non absorbée par le verre par ce parcours ?*

Soit $L(x)$ la quantité de lumière non absorbée parr le verre d'épaisseur x.
Contrainte : $\left(\frac{L(x)-L(x+\Delta x)}{L(x)}\right) \times 100$ est constant ou $\frac{L(x+\Delta x)}{L(x)}$ est constant pour une même épaisseur Δx.
Modèle : $L(x) = Ca^x$

$$L(0) = 1 \text{ et } L(0) = Ca^0 \text{ d'où C} = 1 \text{ et } L(x) = a^x$$

Pour x en mm, $L(x+1) = L(x) \cdot 0{,}96$

$$a^{x+1} = a^x \cdot 0{,}96$$
$$a = 0{,}96$$
$$L(x) = 0{,}96^x$$

5. Théorie associée au parcours didactique proposé

5.1 Propriétés déduites de la condition $P(t+\Delta t)/P(t) = P(\Delta t)/P(0)$

Les quelques propriétés sont déduites de la contrainte générale : pour toute valeur réelle de t et de Δt, $P(t)$ vérifie la condition $P(t+\Delta t)/P(t) = P(\Delta t)/P(0)$.

Propriété 1 : $P(0) \neq 0$ *ou P est une fonction nulle*.
Preuve : Remplaçons l'égalité $P(t+\Delta t)/P(t) = P(\Delta t)/P(0)$ non valable pour $P(0) = 0$ par l'égalité

$$P(t+\Delta t)P(0) = P(\Delta t)P(t)$$

et considérons le cas particulier lorsque $\Delta t = t$:

$$P(t+t)P(0) = P(t)\,P(t) = (P(t))^2$$

Si $P(0) = 0$, alors $(P(t))^2 = 0$ donc $P(t) = 0$ quelle que soit la valeur de t, donc la fonction P est nulle. Ainsi, lorsque la fonction P est non nulle, on a $P(0) \neq 0$.

Propriété 2 : *Le rapport $\frac{P(1)}{P(0)}$ est positif.*

Construction du modèle exponentiel

MARIZA KRYSINSKA, KRYSINSKA.MARIZA@GMAIL.COM
site : https://wp.gem-math.be/
courriel : contact@gem-math.be

En effet, pour $\Delta t = \frac{1}{2}$ et $t = \frac{1}{2}$, on obtient

$$P\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)P(0) = (P(1/2))^2.$$

De cette égalité il résulte que $P(1)P(0)$ positif, donc $P(1)$ et P(0) sont du même signe, d'où leur rapport $\frac{P(1)}{P(0)}$ est positif.

Propriété 3 : ***La fonction vérifiant la propriété $P(t+\Delta t)/P(t) = P(\Delta t)/P(0)$ est entièrement déterminée pour des valeurs de t rationnelles par les valeurs de $P(0)$ et de $P(1)$.***

Appliquons la condition $P(t+\Delta t)/P(t) = P(\Delta t)/P(0)$ pour $\Delta t = \frac{1}{n}$ et t egal successivement 0, $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$, ..., $\frac{n}{n}, \frac{k}{n}$. Cela donne

$$P\left(\frac{1}{n}\right)/P(0) = P\left(\frac{2}{n}\right)/P\left(\frac{1}{n}\right) = P\left(\frac{3}{n}\right)/P\left(\frac{2}{n}\right) = P\left(\frac{n}{n}\right)/P\left(\frac{n-1}{n}\right) = \alpha.$$

D'où

$$P\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha\, P(0),$$
$$P\left(\frac{2}{n}\right) = \alpha P\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha^2\, P(0),$$
$$P\left(\frac{3}{n}\right) = \alpha P\left(\frac{2}{n}\right) = \alpha^3\, P(0),$$

...

$$P(1) = P\left(\frac{n}{n}\right) = \alpha P\left(\frac{n-1}{n}\right) = \alpha^n\, P(0),$$

Et ainsi,

$$\alpha^n = \frac{P(1)}{P(0)}.$$

Étant donné que le rapport $\frac{P(1)}{P(0)}$ est positif (Propriété 2), il est possible de calculer $\alpha = \sqrt[n]{\frac{P(1)}{P(0)}} = \left(\frac{P(1)}{P(0)}\right)^{\frac{1}{n}}$ et d'utiliser la formule $P(\frac{k}{n}) = P(0)\left(\frac{P(1)}{P(0)}\right)^{\frac{k}{n}}$.

Le rapport $\frac{P(1)}{P(0)}$ s'appelle la base de l 'exponentielle et il est souvent noté a. D'où

$$P(\frac{k}{n}) = P(0)a^{\frac{k}{n}}.$$

Propriété 4 : ***La fonction P est soit nulle, soit elle ne s'annule jamais.***

Supposons que $P(t_0) = 0$. Remplaçons t par $(t - t_0)$ et Δt par t_0. Alors on obtient

$$P(t - t_0 + t_0)P(0) = P(t_0)\, P(t - t_0) = 0.$$

D'où $P(t) = P(t - t_0 + t_0) = 0$ quelle que soit la valeur de *t*.

Construction du modèle exponentiel

MARIZA KRYSINSKA, KRYSINSKA.MARIZA@GMAIL.COM
site : https://wp.gem-math.be/
courriel : contact@gem-math.be

5.2 Extension aux nombres irrationnels

Nous avons déjà déduit de la première condition les valeurs de la fonction pour des valeurs rationnelles, de la variable *t et son caractère exponentiel.* L'extension aux irrationnels sera incontournable pour prouver le théorème suivant.

*Il existe une fonction unique $y = P(t)$ définie sur **R** et satisfaisant aux conditions suivantes :*

- $P(t+\Delta t)/P(t) = P(\Delta t)/P(0)$ *quelle que soit la valeur de t et de Δt ;*
- *strictement croissante sur **R** lorsque $a > 1$ ou strictement décroissante lorsque $a < 1$;*
- *de formule algébrique du type exponentiel $P(t) = P(0)a^t$, quelle que soit la valeur de t.*

Remarquons d'abord que la fonction donnée par $P\left(\frac{k}{n}\right) = P(0)a^{\frac{k}{n}}$ est strictement croissante sur des nombres rationnels dans le cas de $a > 1$ et strictement décroissante dans le cas de $0 < a < 1$. On montrera ci-dessous que la formule $P\left(\frac{k}{n}\right) = P(0)a^{\frac{k}{n}}$ peut être prolongée à tous les nombres réels d'une manière univoque lorsqu'on impose la conservation de son caractère monotone. L'approche qu'on a choisi pour construire ce prolongement est une théorisation de la méthode présentée dans la section 2.6 concernant le calcul du temps de triplement de la population des bactéries. Cette approche consiste à déterminer la valeur d'une fonction exponentielle comme un nombre réel déterminé par une suite d'intervalles emboités de longueur tendant vers 0. Elle s'appuie sur deux axiomes de continuité de l'ensembles des nombres réels :

- le **principe d'Archimède** selon lequel, pour tout entier *n* positif et pour toute valeur réelle positive de la variable *t*, il existe un entier *m* tel que $m \leq nt < m+1$ *;*
- **l'axiome de complétude** qui garantit que toute suite des intervalles emboités fermés d'extrémisé rationnelles et des longueurs qui tendent vers 0 contient un nombre réel unique.

A présent, nous allons définir les valeurs de cette fonction pour toutes les valeurs réelles de la variable indépendante t.

Construisons d'abord la suite des intervalles fermés, emboîtés $\left[\frac{m_k}{2^k}, \frac{m_k+1}{2^k}\right]$ associés à une valeur de *t* :

- par le principe d'Archimède, pour tout nombre réel de la forme $2^k t$, il existe un nombre entier positif m_k tel que $m_k \leq 2^k t < m_k + 1$, donc tel que $\frac{m_k}{2^k} \leq t < \frac{m_k+1}{2^k}$:
- de la double inégalité $m_k \leq 2^k t < m_k + 1$, on obtient $2m_k \leq 2^{k+1} t < 2(m_k+1)$;
- de nouveau, par le principe d'Archimède, il existe un nombre entier m_{k+1} vérifiant les inégalités suivantes : $2m_k \leq m_{k+1} < 2^{k+1}t$ et $2^{k+1}t < m_{k+1} + 1 < 2(m_k+1)$. Par exemple, on peut choisir $m_{k+1} = 2m_k$ si $2m_k + 1 > 2^k t$ ou $m_{k+1} = 2m_k + 1$ si $2m_k + 1 < 2^k t$. On en déduit que les intervalles ainsi construits sont emboîtés :

$$\frac{m_k}{2^k} \leq \frac{m_{k+1}}{2^{k+1}} \leq t < \frac{m_{k+1}+1}{2^{k+1}} < \frac{m_k+1}{2^k} \ ;$$

Construction du modèle exponentiel

MARIZA KRYSINSKA, KRYSINSKA.MARIZA@GMAIL.COM
site : https://wp.gem-math.be/
courriel : contact@gem-math.be

- de plus, les longueurs de ces intervalles égales à $\frac{1}{2^k}$ tendent vers 0, lorsque k tend vers l'infini (par le lemme ci-dessous).

De cette manière, à toute valeur positive de t, on associe la suite des intervalles emboités tels que $\frac{m_k}{2^k} \leq t < \frac{m_k+1}{2^k}$ dont cette valeur est l'élément commun unique.

Supposons ensuite que $a > 1$. Dans ce cas les valeurs de $a^{\frac{m}{n}}$ sont croissantes lorsque les valeurs de $\frac{m}{n}$ sont croissantes. Considérons alors les intervalles de la forme

$$\left[P\left(\frac{m_k}{2^k}\right), P\left(\frac{m_k+1}{2^k}\right)\right] = \left[P(0)a^{\frac{m_k}{2^k}}, P(0)a^{\frac{m_k+1}{2^k}}\right]$$

Ces intervalles sont donc emboîtés. De plus, leurs longueurs égales à $P(0)a^{\frac{1}{2^k}}\left(\mathrm{a}^{\frac{m_k}{2^k}} - 1\right)$ tendent vers 0, ce qui est justifié par le lemme présenté et prouvé ci-dessous.

Ainsi, l'axiome d'intervalles emboîtés garantie que cette suite d'intervalles contient un et un seul nombre en commun. Décidons que ce nombre est la valeur de $P(t)$ correspondant à la valeur de t associée à la suite des intervalles $\left[\frac{m_k}{2^k}, \frac{m_k+1}{2^k}\right]$ et notons-la par $P(0)a^t$.

Ce raisonnement peut être facilement adapté aux cas de $0 < a < 1$ et de $t < 0$.

Lemme : $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$

Supposons d'abord que $a > 1$. Alors la suite $a^{\frac{1}{n}}$ est décroissante et bornée car $a > a^{\frac{1}{n}} > 1$: on en déduit qu'elle est convergente. Pour calculer sa limite, posons $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \varepsilon_n$, d'où $a = (1+\varepsilon_n)^n$. Étant donné que $(1+\varepsilon_n)^n > 1 + n\varepsilon_n$, on obtient que $0 < \varepsilon_n < \frac{a-1}{n}$, d'où $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ et donc $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Supposons ensuite que $a < 1$. Alors $\frac{1}{a} > 1$. Étant donné que $a^{\frac{1}{n}} = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} = 1$$

Reference bibliographique

Brousseau G., 2010, Glossaire http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Grand'Henry-Krysinska M., Schneider M., Genèse du modèle exponentiel, *Petit x* n° 105, 2017,

Construction du modèle exponentiel

MARIZA KRYSINSKA, KRYSINSKA.MARIZA@GMAIL.COM
site : https://wp.gem-math.be/
courriel : contact@gem-math.be

Henrotay P., Krysinska M, Rossel H., Schneider M., *Des fonctions taillées sur mesure :construire les fonctions sinusoïdales, exponentielles et logarithmes pour modéliser des problèmes variés,* Presses Universitaires de Liège, *2015*