



S'exprimer, argumenter et convaincre à tout âge en mathématiques

Thérèse GILBERT, Isabelle BERLANGER et Laure NINOVE

Louvain-la-Neuve, le samedi 30 avril 2022

« *J'aime les maths, parce que c'est logique, il suffit d'appliquer des règles. Et j'aime les règles et les calculs.* » Ce propos est, en substance, celui d'un étudiant de fin de secondaire. C'est le genre d'affirmation que l'on entend souvent de la part d'étudiants ayant bien réussi leur parcours de mathématiques.

Ces mêmes étudiants sont tout à fait déroutés lorsqu'on leur propose un problème ou qu'on leur demande comment ils justifient telle règle, telle formule. Ils semblent avoir appris « comment appliquer », mais ne se sont pas posé la question du « pourquoi » ou, du moins, ils ne s'en souviennent pas. Ils ont sans doute rencontré quelques problèmes et leurs professeurs ont sûrement passé un certain temps à établir les règles et les propriétés qu'ils ont dû appliquer. Mais ce n'était sans doute pas la partie la plus importante, la plus frappante du cours.

Et pourtant, la pensée mathématique se forme surtout à force de réflexion et non d'application de formules. L'argumentation est l'essence des mathématiques.

Dans cet article, nous commençons par exposer les raisons et les motivations les plus naturelles de l'argumentation. Ensuite nous détaillons quelques instruments de pensée grâce auxquels les intuitions utiles à l'argumentation peuvent se forger. Enfin, nous présentons quelques particularités de l'expression mathématique utile à l'argumentation.

Nos propos seront le plus souvent illustrés de situations d'apprentissage qui permettent de travailler l'expression et l'argumentation à divers niveaux de l'enseignement. Nous terminerons par l'analyse d'un problème à la lumière de ce qui précède.

1 Les mathématiques peuvent-elles servir à autre chose qu'à remplir des feuilles ?

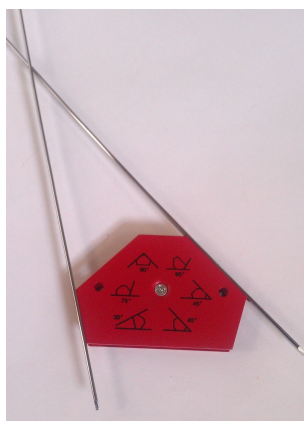
Les élèves se posent-ils des questions au cours de mathématiques ou s'attachent-ils exclusivement à essayer de comprendre (dans le meilleur des cas), de retenir et d'appliquer les connaissances afin de « remplir des feuilles » et de réussir l'examen ? Dans l'esprit de beaucoup – élèves, parents, enseignants ? – les mathématiques sont dogmatiques. On y apprend des règles et des formules *indiscutables*, que l'on retient ou que les professeurs répètent, d'année en année, si on les oublie, et qu'il faut appliquer.

Voici une anecdote qui illustre notre crainte que les mathématiques soient perçues comme une matière qui n'a de validité que dans le cadre scolaire.

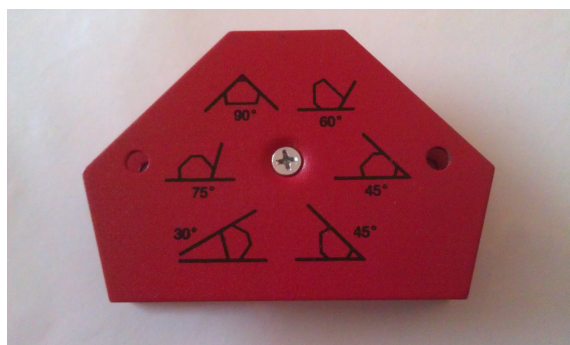
On a soumis un problème à des élèves de 2^e secondaire à propos d'un outil de soudeur, un support magnétique de soudure. Celui-ci sert à fixer entre elles deux pièces métalliques à souder, ces pièces pouvant former un angle de diverses amplitudes.

L'outil de soudeur

On donne les amplitudes des angles intérieurs de cet outil de soudeur, de forme hexagonale, déterminez quelles amplitudes le soudeur peut obtenir avec cet outil.



Après avoir calculé ces amplitudes, les élèves découvrent qu'elles sont indiquées au verso de l'outil.



Ils sont alors stupéfaits de constater que les calculs effectués à l'aide des propriétés vues au cours donnent exactement les amplitudes indiquées ! Les mathématiques seraient-elles « vraies » en dehors du cours de maths ?

Les élèves ont sans doute peu l'occasion d'être convaincus par les mathématiques de l'école, notamment parce qu'ils ont rarement l'occasion d'en douter. Et si l'on faisait entrer le doute au cours de mathématiques ? Si, au lieu de rendre les mathématiques faciles – ce que tout enseignant est tenté de faire ? –, celui-ci fournissait aux élèves des occasions de se poser des questions et de se convaincre de la validité des maths enseignées ?

2 Pourquoi argumenter ?

En mathématiques, on démontre, c'est sûr, même si on le fait peu à l'école. Mais quelles sont les raisons de démontrer ?

Et puis, il n'y a pas que la démonstration qui demande une argumentation. Argumenter, on le fait depuis le plus jeune âge. Dans quelles circonstances, pour quelles raisons, dans quels buts les élèves peuvent-ils argumenter ?



Essais successifs de Nawel.

Au premier essai, on voit une tentative d'addition, de 4 en 4, qui n'aboutit pas.

Au deuxième essai, Nawel écrit la somme des 15 termes 8 (nombre de modules par enfant), mais on ne voit pas comment il a organisé la somme des 8 dans sa tête pour obtenir 120... C'est peut-être juste mais comment savoir ? L'institutrice lui demande une troisième production : comment a-t-il fait pour arriver à 120 ?

Pour Nawel, la sécurité, c'est le calcul avec des dizaines. Chaque collection de 8 a sa couleur, il dessine quatre collections de 8 l'une à côté de l'autre et termine la dizaine avec une cinquième collection de 8 partagée en paquets de 2 qui complètent les autres collections en dizaines, puis recommence ce processus deux fois pour représenter finalement les 15 collections de 8. Les 15×8 sont alors devenus 12×10 !

La situation de départ n'est pas forcément originale. L'intérêt de cette activité réside dans l'exigence de représentation explicative. C'est elle, ici, qui permet de faire évoluer les représentations et la capacité d'argumentation des enfants.

L'idée est donc de proposer des problèmes ou des calculs non évidents mais accessibles et de demander d'exprimer sa pensée, d'expliquer comment on est arrivé à la solution. Cela peut se faire tout au long de la scolarité. Peu à peu d'autres représentations (plus codées, schématiques, graphiques...) et d'autres langages (symbolique, algébrique...) apparaîtront pour améliorer l'efficacité de l'expression et faciliter l'argumentation.

Des problèmes d'anticipation

Parfois trouver une solution demande d'anticiper, comme dans les problèmes de *Robots*, qui seront évoqués dans la section suivante, de programmation avec *Scratch*, de *Turing Tumble*.

Dans le cas de *Turing Tumble*, un « ordinateur à billes », il s'agit de disposer des pièces pour faire tomber les billes dans un certain ordre, ou pour construire un compteur par 1, par 2, ou encore pour opérer sur des nombres.

Turing Tumble



Le domaine de la programmation n'est pas le seul à présenter des situations d'anticipation. Chaque fois que la vérification d'une solution est possible (à la calculatrice, par pliage, dans des problèmes pratiques, etc.), on a la possibilité de demander d'anticiper, de deviner ce qui va se passer avant de vérifier.

De telles situations, présentant un enjeu, et permettant une vérification, donc une autocorrection, sont motivantes et favorisent l'acquisition de compétences d'argumentation.

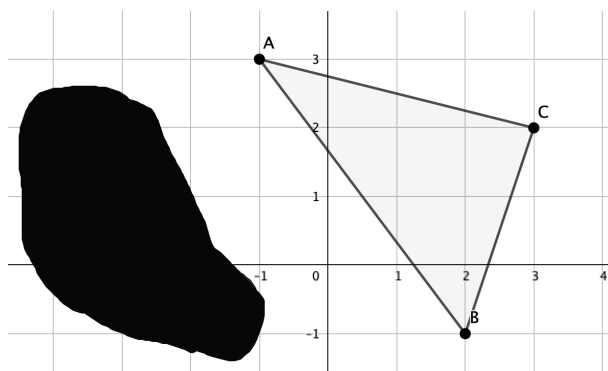
Des situations qui ne permettent pas de constater

Beaucoup de manuels proposent des situations où les élèves doivent juste regarder et constater. Si au lieu de cela, on s'arrange pour que tout ne soit pas visible, l'argumentation devra prendre le relais.

Dans l'activité suivante, on s'est arrangé pour qu'une tache masque certaines parties du quadrillage. On pose aussi des questions sur les points qui sont hors de la feuille.

Effet d'une isométrie sur les coordonnées d'un point

$A'B'C'$ est l'image du triangle ABC par la symétrie orthogonale d'axe y . Quelles sont les coordonnées de A' , B' et C' ?

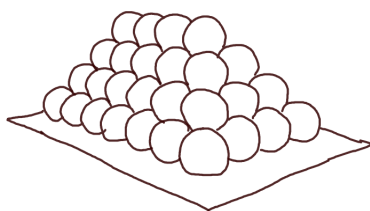


- a) Quelles sont les coordonnées de l'image du point $P(10, 2)$ par cette symétrie ?
- b) Une translation envoie le point C sur le point C^* de coordonnées $(103, 52)$; quelles sont les coordonnées de B^* et A^* , images de B et A par cette même translation ?

Parfois aussi ce qui nous intéresse est caché ou déformé sur un dessin en perspective.

Une pyramide de boulets de canon

Combien de boules ?



En exploitant ces situations où « on ne voit pas tout », on évite les simples « constatez » où, parce qu'on veut simplifier la tâche de l'élève, on lui enlève toute possibilité de réflexion et d'expression de ses idées.

Enfin, on peut proposer des questions où ce sont les élèves qui dessinent ou représentent. Et parfois leurs dessins, leurs représentations, qu'ils soient précis ou non, ne permettent pas de trancher. À nouveau, c'est la réflexion et la discussion qui le permettront.

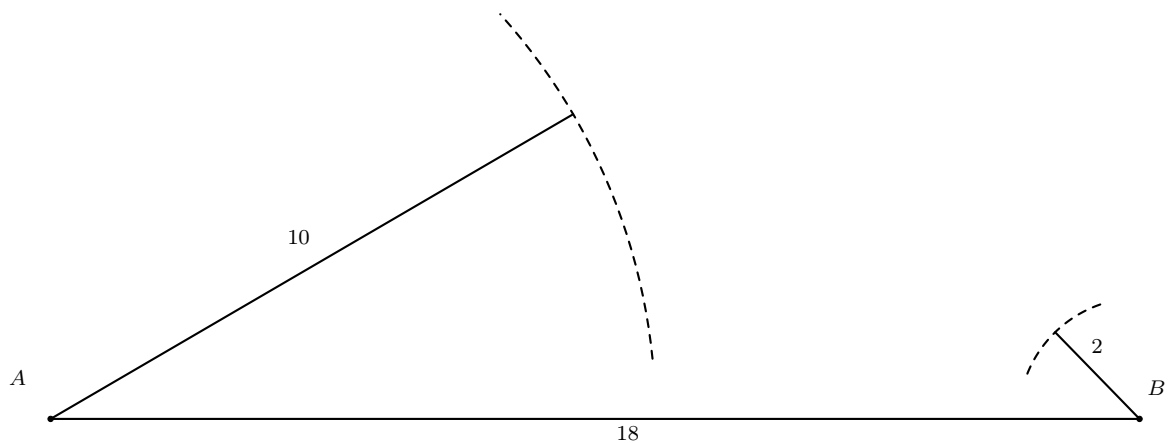
Un triangle un peu plat

Le triangle ABC a un périmètre égal à 30 cm. On donne A et B , distants de 10 cm. Où peut se trouver C ? Trouvez beaucoup d'endroits possibles.

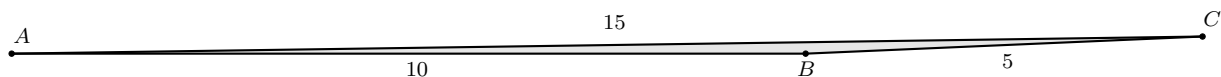
Si le périmètre égale 30 cm et si la base vaut 10 cm, il reste 20 cm pour les deux autres côtés, donc par exemple

- 10 cm et 10 cm,
- 12 cm et 8 cm,
- 15 cm et 5 cm,
- 18 cm et 2 cm,
- ...

Ah non ! Quand on essaie de dessiner un triangle de côtés 10 cm, 18 cm et 2 cm, on *constate* que ce n'est pas possible.



Et pour le cas précédent ? Certains disent qu'ils n'y arrivent pas, d'autres dessinent ceci.



Un triangle de côtés 5 cm, 10 cm, 15 cm existe-t-il ? On dirait bien, même en étant soigneux, même en mesurant le plus précisément possible. La règle graduée, les instruments de construction montrent ici leurs limites et les réactions « tu as mal dessiné », « tu n'as pas mesuré assez précisément » relèveraient de l'argument d'autorité. Le dessin précédent a été réalisé à l'aide d'un logiciel de géométrie en demandant une précision de mesure d'une décimale. . .

Souvent, les situations proposées pour viser l'inégalité triangulaire mènent à l'élimination immédiate de ce cas, sans offrir la possibilité de douter. Pourtant la seule façon de permettre aux élèves d'être *convaincus* que ce triangle ne peut théoriquement pas exister est sans doute de laisser les élèves ne pas être d'accord, et en discuter pour se convaincre.

Ceci nous amène à une autre raison fondamentale d'argumenter : convaincre les autres ou se convaincre soi-même.

2.2 Argumenter pour convaincre ou se convaincre

Pour obtenir l'accord des autres ou pour réfuter

L'expression d'arguments devient nécessaire si on a une solution intuitive d'un problème, qui est remise en cause par des condisciples, et qu'on n'est pas d'accord, comme dans l'exemple précédent.

Cette occasion de ne pas être d'accord ne se présente que si les élèves peuvent discuter de leurs solutions (échanges en groupe, débats. . .) et qu'il y a une culture du doute, que celui-ci soit valorisé et que l'on profite de toutes les occasions où les élèves doutent.

Voici un exemple d'énoncé pouvant mener à une joute entre groupes d'élèves, chaque groupe pouvant jouer le rôle du titulaire d'une des trois classes et défendre ses élèves.

Quelle classe a le mieux réussi le test ?

On veut comparer les résultats de trois classes à une même interrogation dont on donne tous les résultats.

Quelle classe a le mieux réussi cette évaluation ? Argumentez.

A	B	C
8	2	7
9	3	8
9	6	8
9	7	9
9	9	9
10	12	9
10	12	9
10,5	12	9
10,5	12	9
13	12	15
13	13	15
13	13	15
13	13	15
13	16	16
15		18
19		20
		20
		20

Les réponses à la question dépendent des critères choisis pour comparer les résultats des trois classes. Ceux-ci peuvent varier en fonction des connaissances des élèves. On peut comparer les différentes classes en utilisant des valeurs centrales (moyenne, médiane), des valeurs extrêmes, le pourcentage de réussite, les valeurs de dispersion. . . Et on pourrait bien ne pas être d'accord.

Ce problème peut être donné à divers niveaux d'enseignement. Il peut servir d'application ou d'introduction de certains concepts selon le niveau d'apprentissage des élèves et l'objectif du professeur. Il est très différent de celui, plus classique, où l'on demande de calculer la moyenne et la médiane d'une classe. . . Dans ce cas, les notions statistiques ne sont pas utilisées comme arguments.

Parce qu'on n'est pas sûr soi-même ou qu'on a pris l'habitude de douter

À la situation suivante, vécue dans un des ateliers de formation du 30 avril³, un pliage a donné lieu à un pentagone régulier. Mais est-il bien régulier ? Le rapporteur semble donner des amplitudes à peu près correctes, mais cela suffit-il à nous convaincre ?

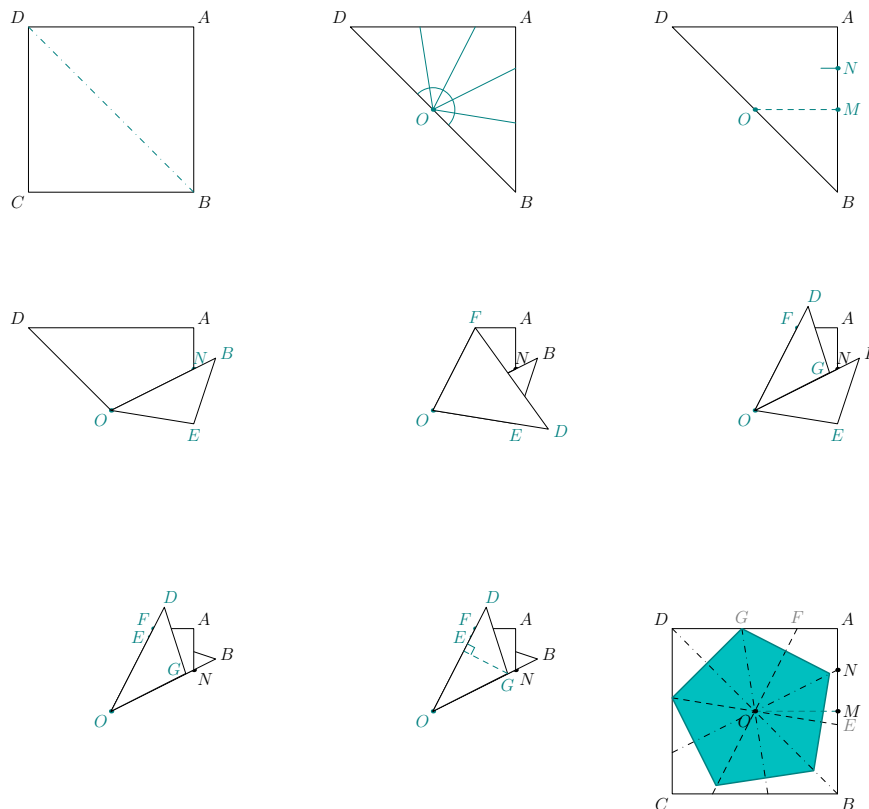
Le pentagone

Le pentagone obtenu par ce pliage est-il régulier ?

1. Commencer par plier la feuille de papier carrée en deux, selon sa diagonale.
2. L'idée sera de partager l'angle plat en cinq.
3. Faire un pli amenant B sur A .
Nommer O l'extrémité de ce pli sur $[BD]$ et M l'extrémité de ce pli sur $[AB]$. Déplier.
Par un pli court amenant A sur M , marquer le point N , milieu de $[AM]$. Déplier.
4. Faire un pli, passant par O , amenant $[OB]$ sur $[ON]$.
Nommer E le point d'intersection de ce pli avec le bord de la feuille.
5. Faire un pli, passant par O , amenant $[OD]$ sur $[OE]$.
Nommer F le point d'intersection de ce pli avec le bord de la feuille.

3. GEM – UCLouvain, *S'exprimer, argumenter et convaincre à tout âge en mathématiques*, Journée de formation, le 30 avril 2022, Louvain-la-Neuve.

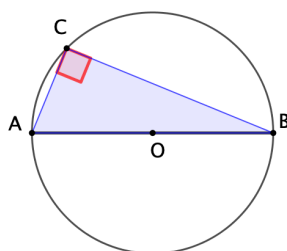
6. Faire un pli, à travers le volet supérieur, passant par O et amenant $[OD$ sur $[OF$.
Nommer G le point d'intersection de ce pli avec le bord de la feuille.
7. Faire un pli, en montagne, selon $[ON]$.
8. Faire un pli, passant par G et perpendiculaire au bord $[OF$.
9. Déplier.



En fait, un raisonnement montrera que le pentagone obtenu n'est pas régulier, ce qui encouragera la vigilance par la suite.

Pour aider les élèves à rentrer dans une culture du doute par rapport à des énoncés d'apparence mathématique, l'enseignant peut laisser les élèves se tromper, voire leur en donner l'occasion. Voici un exemple où l'enseignant propose une activité volontairement provocante pour tester la conviction des élèves.

En 3^e secondaire générale, on a démontré que tout triangle inscrit dans un cercle dont le diamètre est un côté du triangle est rectangle.



La leçon se poursuit ...

Un triangle étrange

Dessinez à présent un triangle inscrit dans un cercle dont le diamètre est un côté du triangle et qui ne soit pas rectangle.

Les élèves se mettent au travail sans penser à priori que ce ne sera pas possible. Les démonstrations n'ont pas suffi à les convaincre.

2.3 Argumenter pour éclairer, parce qu'on veut comprendre les raisons d'une situation

Parfois on remarque une régularité, une propriété mais... à quoi est-elle due ? L'idée est de ne pas se contenter de « ça a l'air de fonctionner » mais de s'intéresser aux raisons des « vérités ». On est alors obligé de travailler le sens des concepts et souvent de tisser des liens entre ceux-ci.

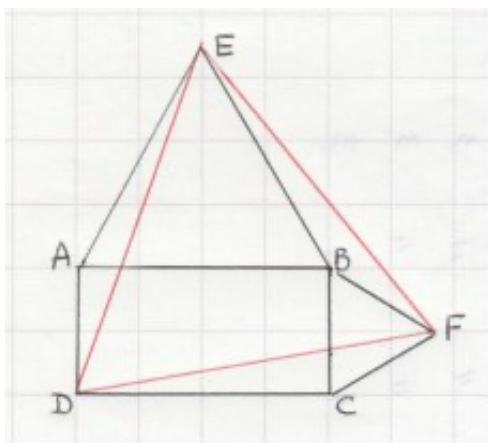
Dans la situation suivante adressée à des élèves de 3^e secondaire, on rencontre une figure qui a l'air d'être régulière sans que l'on s'y attende. Comment expliquer cela ?

Nature d'un triangle

Soit un rectangle $ABCD$. Sur les côtés $[AB]$ et $[BC]$, on construit les triangles équilatéraux ABE et BCF . Quelle est la nature du triangle DEF ?

Source : IREM de Poitiers [8].

Les élèves peuvent envisager plusieurs cas car on ne précise pas que les triangles équilatéraux sont « à l'extérieur » du rectangle. En voici un.



Le triangle est-il équilatéral ? Les raisons possibles ne sautent pas aux yeux : la situation ne présente pas de symétrie flagrante. Si le triangle est équilatéral, il va falloir en chercher les raisons. Ce sera l'occasion de voir comment on peut prouver que deux longueurs sont égales, de voir que les cas d'isométrie peuvent servir à cela...

Voici un autre exemple dans le domaine des nombres. Cette situation a été présentée par Erich Wittmann à Louvain-la-Neuve à la fin du siècle passé. Elle constitue un exemple d'argumentation collective et orale en... 2^e primaire.

Différences particulières

Calcule les différences suivantes et d'autres du même type.

$$82 - 28 =$$

$$53 - 35 =$$

$$65 - 56 =$$

$$72 - 27 =$$

$$84 - 48 =$$

$$85 - 58 =$$

Qu'est-ce que les résultats ont de spécial ?

Source : Erich WITTMANN

On calcule

$$82 - 28 = 54,$$

$$53 - 35 = 18,$$

$$65 - 56 = 9,$$

$$72 - 27 = 45,$$

$$84 - 48 = 36,$$

$$85 - 58 = 27,$$

$$21 - 12 = 9,$$

$$42 - 24 = 18$$

...

Tiens, certains résultats sont les mêmes et toutes les différences sont multiples de 9. Comment cela se fait-il ?

On pourrait être convaincus de la vérité de cette conjecture en calculant systématiquement toutes les différences de ce type (différences d'un nombre de deux chiffres et du nombre obtenu en permutant les deux chiffres) mais, comme l'écrit Bachelard, cité par Barbin [3], « il ne suffit pas d'en constater le résultat pour en saisir le sens ». Cela ne nous éclairerait pas et nous resterions ignorants des raisons de ce phénomène.

Plusieurs méthodes de démonstration sont possibles. Si on est au secondaire, on utilisera sans doute l'outil algébrique. Dans la suite, nous écrirons $\underline{ab}$ pour désigner le nombre qui s'écrit ab dans le système décimal, pour ne pas confondre avec $a \cdot b$. Si un nombre s'écrit $\underline{ab}$, où a et b sont des naturels entre 1 et 9, il est égal à $a \cdot 10 + b$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\underline{ab} - \underline{ba} &= (a \cdot 10 + b) - (b \cdot 10 + a), \\ &= 9a - 9b, \\ &= 9(a - b).\end{aligned}$$

Et $9(a - b)$ est bien un multiple de 9.

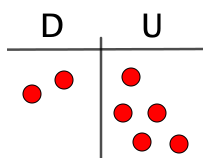
Non seulement ce raisonnement nous montre la raison de cette régularité, mais il nous permet

de calculer rapidement les différences :

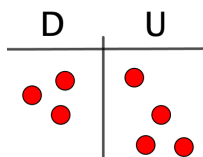
$$\begin{aligned}
 82 - 28 &= 9 \cdot (8 - 2), \\
 &= 9 \cdot 6, \\
 &= 54, \\
 53 - 35 &= 9 \cdot (5 - 3), \\
 &= 9 \cdot 2, \\
 &= 18.
 \end{aligned}$$

Voyons maintenant le raisonnement⁴ des enfants d'une classe de 2^e primaire, selon E. Wittmann. Les enfants ont l'habitude de travailler avec un abaque et des jetons.

Partons du nombre 25 représenté dans l'abaque : deux jetons représentent des dizaines, et cinq jetons représentent des unités.

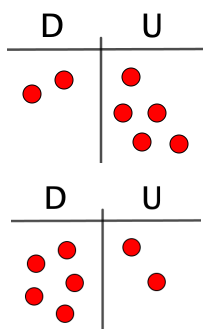


Que se passe-t-il si on déplace un jeton de la colonne des unités vers celle des dizaines ?



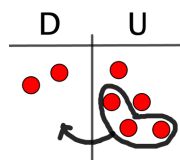
Le nombre représenté a changé : c'est maintenant 34 qui est représenté. Mais quel opérateur a-t-on appliqué en passant ce jeton d'une colonne à l'autre ? Le jeton, qui représentait une unité, représente maintenant une dizaine : on a donc ajouté 9. Si on passait deux jetons de la colonne des unités vers celle des dizaines, cela reviendrait à ajouter deux fois 9.

Maintenant que signifie « $52 - 25 = ?$ ». Cette question revient à demander « que faut-il ajouter à 25 pour obtenir 52 ? ».



Eh bien, pour passer de 25 à 52, il suffit de faire glisser trois jetons de la colonne des unités à celle des dizaines, c'est-à-dire d'ajouter 3 fois 9.

4. Raisonnement en substance, basé sur le souvenir de l'exposé d'E. Wittmann.



Donc $52 - 25 = 3 \times 9$.

Une manière de favoriser la recherche d'arguments éclairants est de proposer aux élèves des situations étonnantes.

2.4 Pour mettre de l'ordre déductif dans ses connaissances

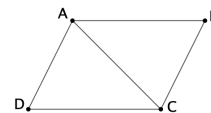
Dans le domaine des démonstrations de propositions mathématiques, en plus des deux raisons d'argumenter citées précédemment, à savoir « convaincre » et « éclairer », nous devons citer celle de mettre de l'ordre déductif dans les connaissances⁵. Une fois cette mise en ordre effectuée, on a quelques axiomes comme point de départ et on démontre peu à peu tout le reste au départ de ces quelques axiomes. Chaque proposition, évidente ou non, est déduite des axiomes et des propositions déjà démontrées.

Au secondaire, on apprend un petit peu à démontrer. En 3^e secondaire, on demande aux élèves de trouver eux-mêmes les arguments d'une démonstration. Et il arrive qu'on leur demande de démontrer des propositions qu'ils connaissent depuis longtemps. L'idée n'est alors pas de se convaincre, ni d'éclairer la proposition, mais bien d'établir de petits îlots déductifs⁶.

Voici deux exemples extraits de manuels.

Démontrer des propositions évidentes

1. Sachant que $ABCD$ est un parallélogramme, démontre que les triangles CDA et ABC sont isométriques.



2. Démontre que, dans un triangle isocèle, la bissectrice de l'angle au sommet est aussi la médiane relative à la base.

Dans ce cas, on demande aux élèves de démontrer pour leur donner l'occasion d'utiliser les propositions vues précédemment (ici les cas d'isométrie des triangles). Cette tâche n'est pas inutile dans la mesure où elle permet de rendre explicites les liens déductifs entre diverses propositions rencontrées. Mais elle ne devrait pas arriver trop tôt dans l'apprentissage de la démonstration.

Si le choix des exercices est justifié par une volonté de faciliter la tâche des élèves, c'est dommage, car la motivation à la démonstration est assez artificielle. Si le but est de leur faire prendre conscience des liens déductifs qui existent entre les propositions, il faut alors que les intentions soient claires et que les propositions que les élèves peuvent utiliser soient clairement identifiées.

3 Sur quels outils l'argumentation peut-elle s'appuyer ?

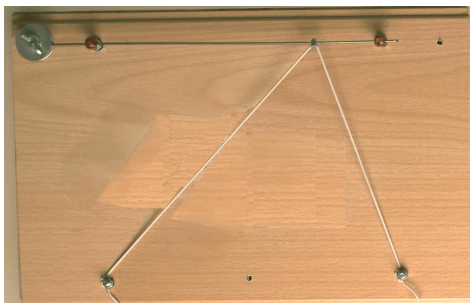
Commençons par la narration d'une activité, vécue avec des étudiants de 1^{er} BAC AESI, mais qui peut également être proposée à la fin du primaire et au début du secondaire.

5. Pour une analyse historique et épistémologique de la démonstration, voir BARBIN [3]

6. Îlot déductif, notion due à CHOQUET [4], par opposition à une théorie axiomatique entière. Voir à ce propos, par exemple GEM [9].

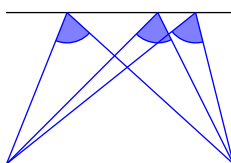
Des familles de triangles représentées à l'aide de divers matériels

On donne aux étudiants (ou aux élèves) divers matériels permettant la construction dynamique de familles de triangles et on leur demande de déterminer les propriétés partagées par tous les triangles obtenus à l'aide d'un même matériel dont celui-ci.



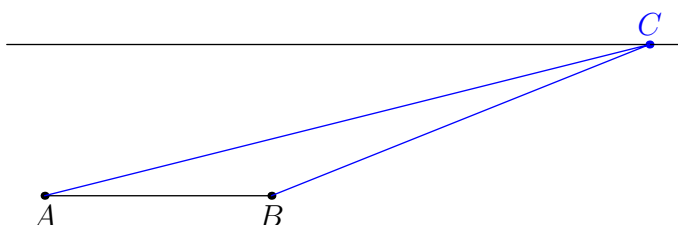
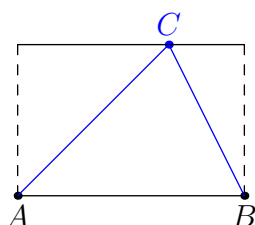
Un groupe d'étudiants manipule ce matériel, qui permet de visualiser une famille de triangles dont la base est fixe mais le troisième sommet est mobile sur une parallèle à cette base. Ces triangles sont ainsi tous de même base et de même hauteur, et donc de même aire.

Les étudiants veulent aller plus loin que cette caractérisation. L'expérimentation provoque le questionnement. Ils *conjecturent* que l'amplitude de l'angle en ce troisième sommet reste constante.



Dans la fenêtre limitée du matériel concret, cela semble être le cas, le résultat leur semble donc *plausible*. Cela leur semble également raisonnable : quand l'amplitude d'un angle à la base augmente, l'autre doit diminuer, et donc, puisque la somme des amplitudes des angles d'un triangle vaut toujours 180° , l'amplitude du troisième angle devrait rester constante, disent-ils.

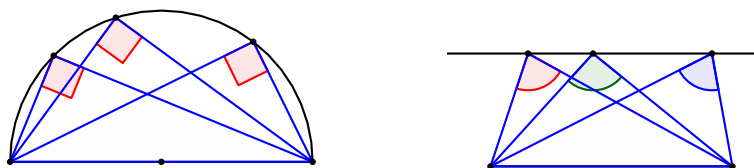
L'enseignant leur propose de continuer leur réflexion sous la forme d'un débat. En évoquant un *mouvement pensé* du troisième sommet en dehors de la fenêtre limitée par le matériel, en se déplaçant très loin sur la parallèle à la base, ils réalisent que ce troisième angle peut devenir très petit, et mettent alors en doute leur conjecture d'origine.



Ainsi, en *sortant du cadre*, en *faisant varier* par un *mouvement pensé*, leur première impression est contredite. Mais cet argument ne semble pas suffisant pour les convaincre que leur conjecture est fausse. Beaucoup pensent que, dans la fenêtre limitée au rectangle, comme sur le matériel concret, l'amplitude de l'angle reste bien constante, même si elle peut varier en dehors de ce cadre.

D'autres font *des liens avec d'autres connaissances*, en rapprochant cette situation à celle, qu'ils connaissent mieux, où le sommet se déplace sur le demi-cercle dont le diamètre est la base

du triangle. Dans ce cas-là, ils savent que l'angle au sommet est toujours droit, donc d'amplitude constante. Il leur semble alors moins plausible que l'amplitude de l'angle reste également constante si le sommet reste sur une droite.



Ils évoquent aussi *des positions particulières* du point mobile, pour lesquels ils peuvent soit mesurer les angles sur une figure, ce qui les convainc peu, soit les calculer à l'aide de la trigonométrie.

On voit, via ce petit exemple, que la faculté d'argumenter en mathématiques repose sur beaucoup de démarches transversales, comme le fait de se poser des questions, de recourir à des exemples ou des contre-exemples, de faire des liens avec d'autres connaissances, de faire varier les données, de vérifier la plausibilité d'un résultat, pour n'en citer que quelques-unes. Ces démarches transversales sont d'ailleurs souvent utiles aussi à la résolution de problèmes, qui fait également appel à l'argumentation.

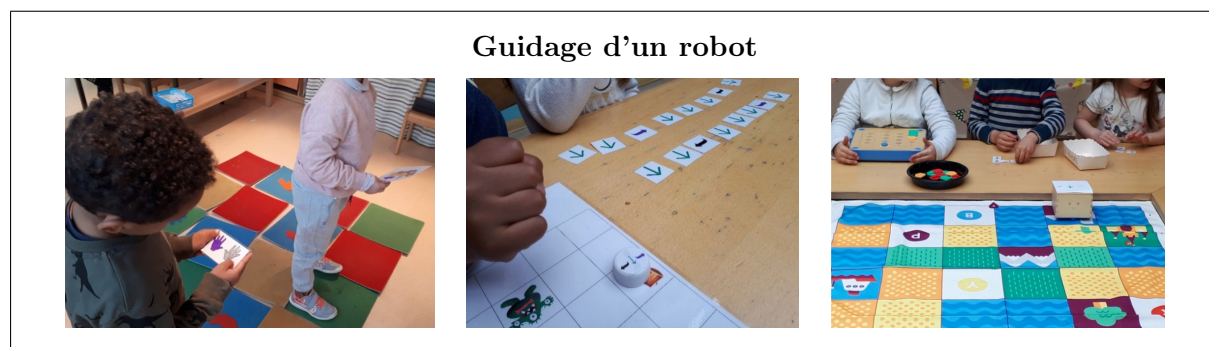
À côté de ces démarches transversales générales, on voit aussi que, dans le cas du problème considéré, l'argumentation des étudiants s'est appuyée sur des démarches plus spécifiques à la géométrie, que nous nommons *outils de pensée*⁷, comme le mouvement pensé du troisième sommet.

Bien entendu, ces démarches et outils sur lesquels l'argumentation peut s'appuyer ne sont pas innés et l'argumentation ne s'apprend pas en un jour. C'est progressivement que l'élève pourra construire une « boîte à outils » qui soutiendra son intuition et sur laquelle il pourra se baser pour construire des raisonnements argumentés.

Nous nous intéressons aux sections suivantes à quelques démarches de ces deux types (démarches transversales générales et outils de pensée plus spécifiques) qui favorisent particulièrement l'argumentation et la résolution de problèmes en géométrie, avant d'aborder le domaine des nombres, puis évoquer très brièvement l'algèbre et l'analyse.

3.1 Des démarches et outils de pensée en géométrie

Nous présentons trois activités, dont deux vécues lors de la journée de formation du 30 avril⁸, qui peuvent contribuer à installer des outils de pensée en géométrie et des démarches transversales, à divers moments de la scolarité.



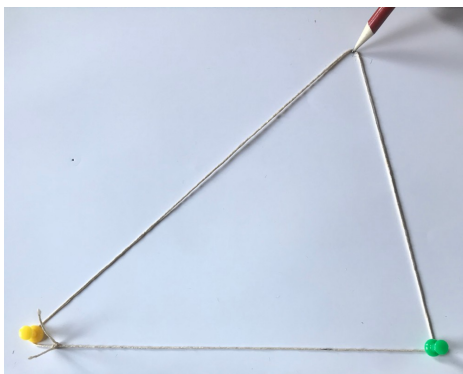
7. Pour une présentation détaillée d'outils de pensée en géométrie, voir GILBERT [10, 11].

8. GEM – UCLouvain, *S'exprimer, argumenter et convaincre à tout âge en mathématiques*, Journée de formation, le 30 avril 2022, Louvain-la-Neuve.

En expérimentant des activités de « guidage d'un robot », ici en troisième maternelle, les enfants vont travailler le mouvement et, par la nécessité d'anticipation, le *mouvement pensé*. De plus, que le robot soit une « tortue de sol », un autre enfant qui exécute des ordres ou un avatar sur un écran d'ordinateur, il va falloir, pour lui donner des ordres, se mettre à sa place, *prendre son point de vue*.

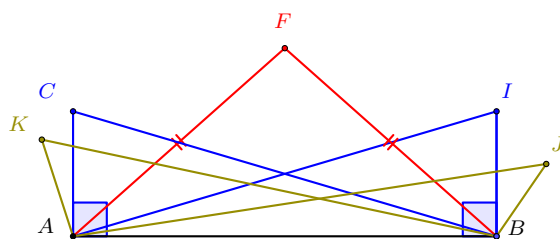
Des familles de triangles à l'aide d'une corde

À l'aide d'une corde fermée tendue, on représente le contour d'un triangle dont deux points sont fixés. Identifiez tous les types de triangles (leur nature) que l'on peut créer en déplaçant le troisième sommet.



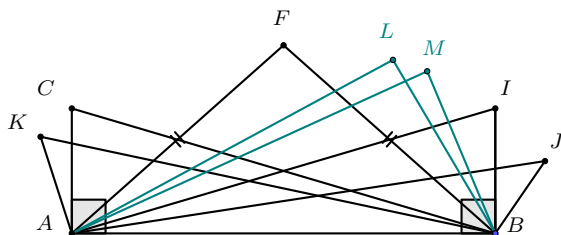
Ici, en fin de primaire ou début du secondaire, on travaille le mouvement, la considération de cas particuliers, notamment de cas « frontières » entre deux familles, de cas extrêmes, la symétrie.

Considérer quelques cas particuliers pour commencer. On identifie assez vite un triangle isocèle, deux triangles rectangles, des triangles obtusangles. Voici cinq triangles, deux obtusangles, deux rectangles, un isocèle dans un cas où la base du triangle prend une bonne partie de la corde.

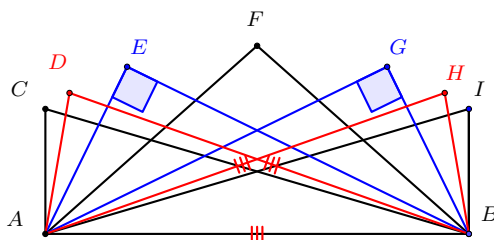


Mais y a-t-il d'autres triangles de cette nature, isocèles, rectangles ou obtusangles ? Et cet ensemble de triangles comporte-t-il des triangles acutangles ?

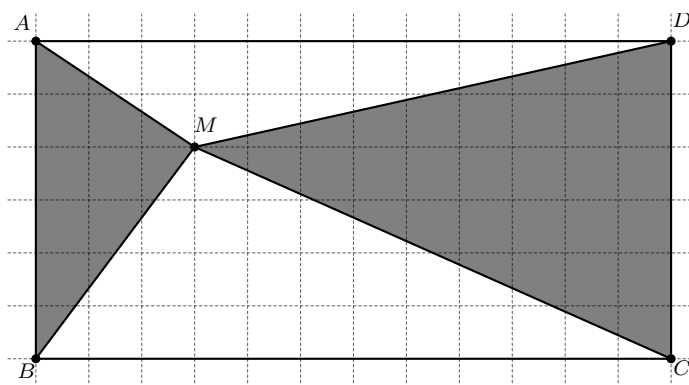
Réaliser des essais. Pour aller plus loin, on peut faire des essais. Sur la figure suivante, les triangles AMB et ALB sont-ils obtusangles ? Les manipulations et le rapporteur ne suffisent plus, cela demande réflexion.



On peut aussi changer de point de vue pour les triangles isocèles, en changeant de base. Dans le cas que nous examinons, on trouve trois triangles isocèles.



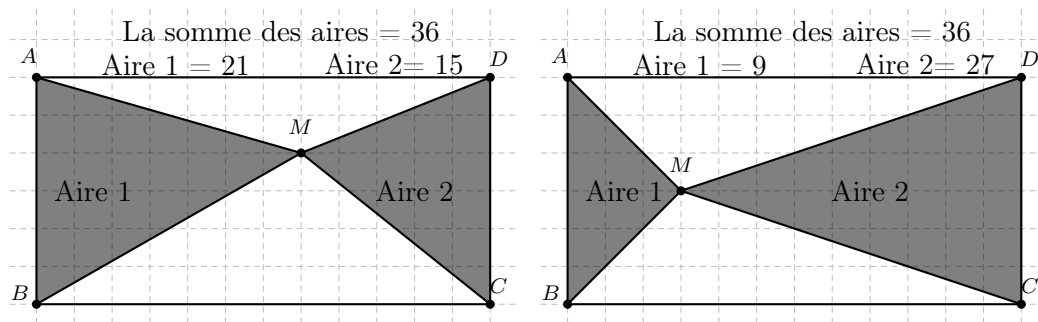
Sur la figure ci-dessous, le point M est à l'intérieur du rectangle. Où faut-il le situer pour que l'aire grisée soit la plus grande possible ?



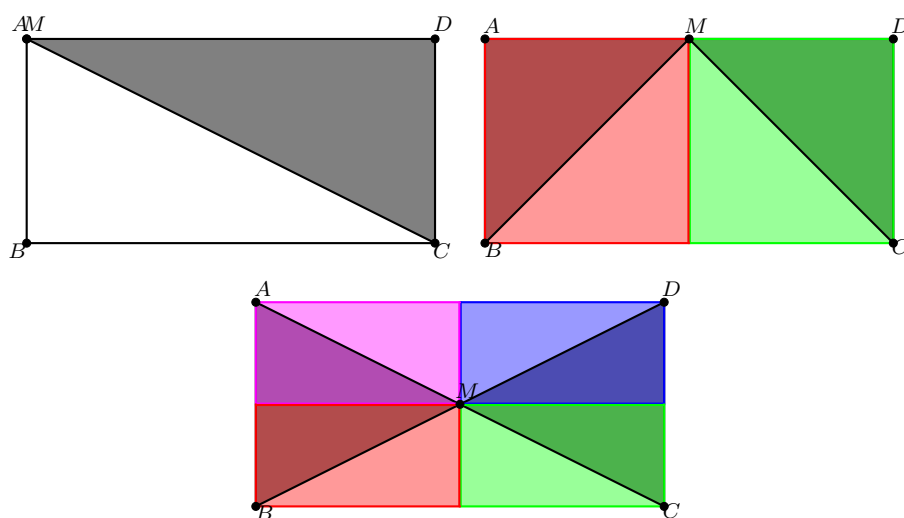
Cette situation, qui peut être proposée à partir de la fin du primaire, peut être résolue de bien des manières, selon les outils de pensée sur lesquels on s'appuie. Une mise en commun des résolutions des élèves peut donc permettre de mettre en évidence ces différents outils pour progressivement « étoffer sa boîte à outils ».

Réaliser des essais et calculs, conjecturer, changer de point de vue. Pour commencer, on peut explorer la situation en calculant les aires des parties grises et leur somme pour quelques positions quelconques de M . Mais ici les triangles n'ont pas de base horizontale. Il vaut mieux considérer les bases verticales et les hauteurs horizontales, plus accessibles, et donc *changer le point de vue* habituel.

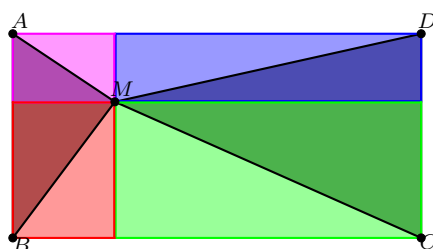
Ces calculs permettent de conjecturer : cette somme serait-elle toujours la même ? Mais il faudrait être sûr (convaincre et se convaincre) et savoir pourquoi (éclairer).



Envisager des cas particuliers, rechercher la symétrie, ajouter des traits de construction, déplacer. Quelques *cas particuliers*, faciles, permettent de renforcer la conviction. Dans chaque cas, on peut calculer ou se passer de calculer, soit en évoquant la *symétrie* (dans le premier cas), soit en *ajoutant des traits de construction* comme ci-dessous et en comparant les parties grisées et non grisées. On peut éventuellement *déplacer* les différents morceaux pour les faire coïncider.



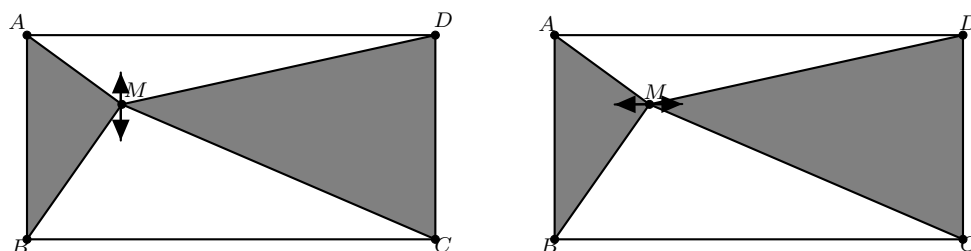
La considération de ces cas particuliers, comportant des éléments de symétrie qui permettent d'y voir clair, peut donner l'idée d'appliquer les arguments à un cas plus quelconque, de généraliser la méthode.



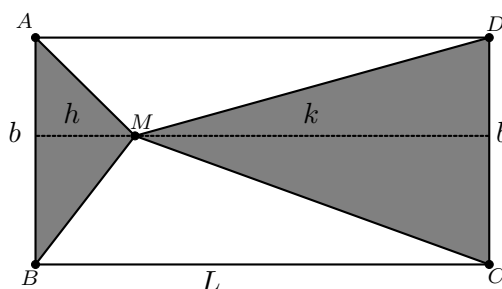
Déformer par le mouvement, changer de point de vue. On peut aussi raisonner autrement. On considère les bases verticales de deux triangles. Elles sont fixes. Si on part d'une position quelconque de M , puis qu'on la modifie sans changer les hauteurs des triangles, c'est-à-dire en bougeant M sur une droite verticale, les aires des parties grisées ne changent pas !

On peut ensuite à nouveau *changer de point de vue* et considérer le complément des parties grisées, à savoir les parties blanches, dont les bases sont horizontales. Si on part d'une position quelconque de M , puis qu'on la modifie sans changer les hauteurs des triangles, c'est-à-dire en bougeant M sur une droite horizontale, les aires des parties blanches ne changent pas !

Tant que l'on reste dans les limites du rectangle, la partie grisée a donc toujours la même aire.



Modéliser par l'algèbre. On peut aussi résoudre le problème « algébriquement ».



Avec les notations du dessin ci-dessus, l'aire grisée égale $\frac{b \cdot h}{2} + \frac{b \cdot k}{2}$, c'est à dire $\frac{b \cdot (h+k)}{2}$. Comme $h+k = L$, finalement l'aire égale $\frac{b \cdot L}{2}$ et ne dépend donc pas de la position de M dans le rectangle.

Ces trois situations ont mis en évidence un certain nombre d'outils de pensée plus spécifiques à la géométrie :

- le changement de point de vue sur les figures, qui permet de percevoir ou d'appliquer des propriétés utiles, ici les formules d'aire ou l'invariance de l'aire,
- le mouvement qui déforme, qui engendre des familles de figures de même aire,
- le mouvement qui déplace,
- l'ajout de traits de construction,
- le découpage,
- le recours aux symétries.

On a aussi abordé quelques démarches plus générales, comme notamment

- la recherche et l'analyse d'exemples et de contre-exemples,
- dont celles de cas particuliers, de cas limites,
- l'algébrisation d'une situation.

Ces deux listes sont bien entendu loin d'être exhaustives.

3.2 Des démarches et outils de pensée en nombres, algèbre et analyse

Les deux situations que nous présentons ci-dessous permettent notamment de travailler un outil de pensée plus spécifique au domaine des nombres : la *représentation structurée de situations numériques*, que nous avons déjà évoquée plus haut avec l'activité *Les modules de paix*, ou encore celle des *Différences particulières*. Un autre outil de pensée du domaine des nombres que nous aborderons est l'*utilisation d'un exemple générique*.

D'autres démarches, plus transversales, sont à l'oeuvre, comme les *essais-erreurs*, qui peuvent amener à *généraliser* ou la *recherche de régularité*.

Un problème d'âges classique

Ma mère a 48 ans, moi 13. Quand aura-t-elle le double de mon âge ?

Essais-erreurs qui amènent à généraliser. Comment résoudre ce problème ? On peut commencer par se donner des exemples.

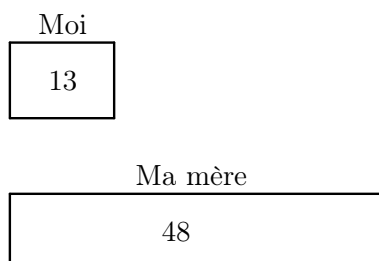
Mon âge	l'âge de ma mère	
13	48	maintenant
24	59	ça ne va pas, c'est trop peu
29	64	encore trop peu
32	67	...
34	69	presque
35	70	ça y est.

Ces exemples peuvent donner l'idée d'une généralisation par l'algèbre.

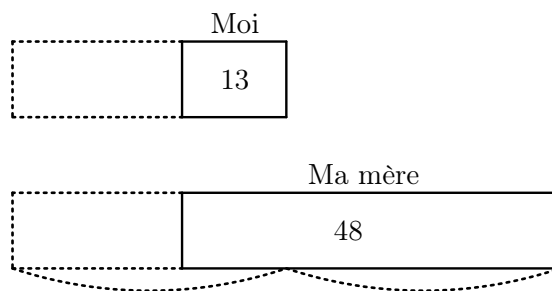
Mon âge	l'âge de ma mère
13	48
$13 + x$	$48 + x$

Il faut que $48 + x$ soit le double de $13 + x$. Il faut donc résoudre l'équation $48 + x = 2 \cdot (13 + x)$

Représentation. On peut aussi dessiner.



Mais il faut ajouter la même chose aux deux âges pour que l'un soit le double de l'autre. Ajouter à droite est plus naturel mais on ne voit pas bien ce qu'il faut ajouter, justement. Si on ajoute à gauche, on voit mieux où s'arrêter.



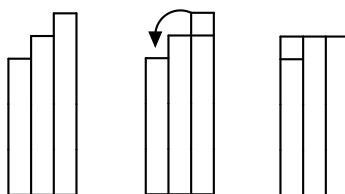
Finalement l'âge de ma mère doit être le double de la différence de nos âges. On pouvait aussi arriver à cette conclusion en partant des essais et erreurs.

Somme de trois nombres consécutifs

*Le nombre 69 est la somme de trois nombres (entiers) consécutifs. Quels sont ces nombres ?
Même question pour 53.*

Essais-erreurs qui amènent à généraliser. On peut toujours résoudre le problème par tâtonnement. Ce tâtonnement, outre qu'il permet de trouver une solution, peut donner l'idée de plusieurs autres méthodes. Notamment la résolution par équation et la mise en évidence de régularités : lorsque je calcule $20 + 21 + 22$, ça donne le triple de 21... Et on peut expliquer cette constatation (l'éclairer) : 20, c'est $21 - 1$, et 22, c'est $21 + 1$. Donc $20 + 21 + 22$, c'est bien trois fois 21. Et ce raisonnement sur ce cas particulier est suffisamment général, donc le nombre du milieu est le tiers de 69, soit 23. Il s'agit de ce qu'on appelle un *exemple générique* : en pensée, on dépouille ces nombres particuliers (22, 23, 24) de toutes leurs particularités jusqu'à se convaincre que le raisonnement sera le même pour tous les nombres.

Représentation. On peut aussi représenter la situation et travailler sur cette représentation.



Cette représentation rend évidente que la somme des trois nombres est un multiple de trois.

Notons que ce type de questions donne aussi l'occasion de conjecturer. Puisque 53 n'est pas la somme de trois entiers consécutifs, quels sont les nombres qui le sont ?

Modéliser par l'algèbre. On pourrait modéliser le problème à l'aide de l'algèbre, en désignant par n le premier nombre :

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 69$$

$$3n + 3 = 69$$

$$3(n + 1) = 69$$

$$n + 1 = 23$$

$$n = 22,$$

ce qui permet de conclure que les trois nombres recherchés sont 22, 23 et 24.

On pourrait aussi exploiter la symétrie de la situation pour faire un choix peut-être plus judicieux de l'inconnue, en désignant par m le nombre du milieu :

$$(m - 1) + m + (m + 1) = 69$$

$$3m - 1 + 1 = 69$$

$$3m = 69$$

$$m = 23.$$

On aboutit bien évidemment à la même conclusion.

3.3 En algèbre et analyse

Pour l'algèbre et l'analyse, que nous ne développons pas ici, évoquons seulement, de manière tout à fait non exhaustive, quelques outils tels que *remplacer des lettres par des nombres*, *représenter graphiquement*, *imaginer un comportement « à la limite »*, *exploiter des symétries du problème*, *faire varier autour d'une valeur*.

4 S'exprimer pour argumenter

Le langage joue un rôle important dans l'argumentation. Même au cours de mathématiques, ce langage est principalement le *langage naturel*. Nous entendons par là le langage courant, du quotidien – dans notre cas le français.

Notons bien qu'il y a déjà un fossé entre le français « de tous les jours » et le français « de l'école ». Récemment, de nombreuses recherches se sont portées sur le français en temps que *langue de scolarisation* (WAUTERS [14]). Ces travaux mettent en évidence les spécificités du langage lié aux apprentissages scolaires et les obstacles auxquels sont confrontés les élèves qui en maîtrisent moins bien les codes. Toutes les disciplines sont concernées par cette question. Mais, ici, nous nous intéressons plus spécifiquement à la place et à l'utilisation du langage naturel en mathématiques. Nous nous penchons d'abord brièvement sur le lien entre langage naturel et langage mathématique et présentons ensuite des activités qui permettent, entre autres, le développement de l'expression.

4.1 Du langage naturel au langage mathématique

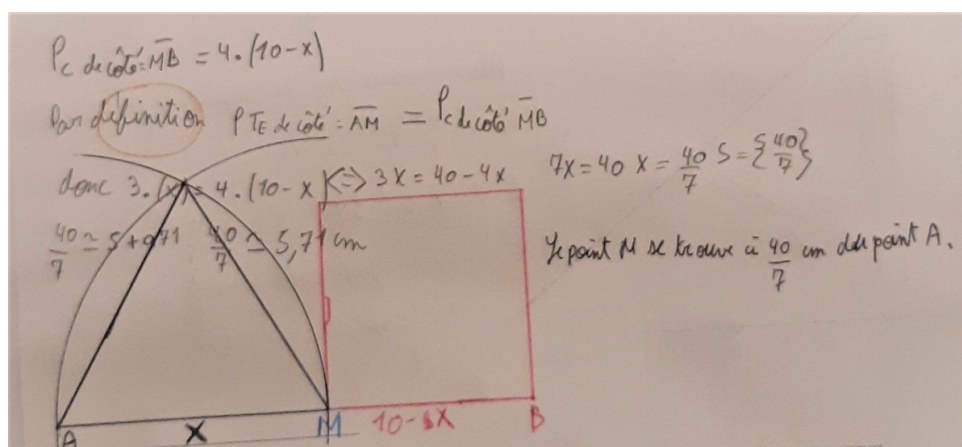
Les occasions d'inviter les élèves à s'exprimer sont nombreuses au cours de mathématiques.

Des consignes qui invitent à l'expression

- « Explique comment tu as fait. »
- « Dessine la situation. »
- « Écris les calculs qui parlent de ça. »
- « Justifie, schéma à l'appui. »
- « Écris un texte avec dessins pour convaincre les autres que tu as raison. »
- « Pourquoi ? Argumentez. »
- « Conjecturez et démontrez. »

En répondant à ce genre de consignes, on se rend compte que le langage naturel ne suffit pas. Pour répondre aux besoins des mathématiques, ce langage va être étendu, adapté, transformé,

jusqu'à former ce que nous nommerons le *langage mathématique*. Voici une production typique d'élève qui illustre ce point.



On retrouve dans le langage mathématique les mots et les structures grammaticales usuels du français, mais de nouveaux ingrédients y sont intégrés :

- un vocabulaire spécifique (« équilatéral », « équation », « racine carrée »...),
- des symboles (0 , $+$, $=$, ∞ , $f(x)$...),
- des images (qui peuvent être des schémas, des graphiques, des figures géométriques, ...).

Tous ces éléments ont leurs propres modes de fonctionnement et usages, parfois adaptés du langage naturel, parfois radicalement nouveaux. Nous en découvrirons quelques-uns dans la suite.

Ce nouveau langage, les élèves doivent apprendre à le manipuler, ils doivent en apprendre les codes. C'est une arme à double tranchant car il apporte aux mathématiques toute sa rigueur et permet d'exprimer sa pensée, mais il pose aussi bien des difficultés à ses utilisateurs, notamment par ses ruptures avec le langage naturel. Nous examinons ci-après une de ces difficultés.

4.2 Une difficulté du langage mathématique : le traitement des implicites

Le langage naturel est riche en informations implicites que nous apprenons à détecter au quotidien, en fonction du contexte. Les implicites sont toutes ces informations « à lire entre les lignes », qui ne seront pas les mêmes selon qu'on se trouve à la maison, avec des amis, ou encore à l'école. Ces sous-entendus vont tout naturellement se glisser dans les activités d'expression et d'argumentation au cours de mathématiques... parfois sans poser de problème, parfois en provoquant des malentendus. Voici un exemple d'implicite au cœur d'une difficulté courante en argumentation.

Imaginons le petit problème suivant.

Diviseurs

Nous savons que, si un nombre divise 15, il divise 30.

Je pense à un nombre (naturel), et je vous dis que ce nombre ne divise pas 15.

Que pouvez-vous en conclure ?

Vous n'êtes probablement pas tombé dans le piège ! Vous savez que ce nombre pourrait malgré tout être un diviseur de 30, comme 2, ou 6. Mais certains élèves auront fort envie de conclure à l'aide du raisonnement suivant.

*« Si un nombre divise 15, il divise 30.
Or le nombre caché ne divise pas 15,
donc le nombre caché ne divise pas 30. »*

Ce raisonnement n'est pas correct, mais il le serait s'il était permis d'interpréter la première proposition de manière plus large, comme un « si et seulement si », en lui adjoignant la condition – sous-entendue pour les élèves –

« Si un nombre ne divise pas 15, alors il ne divise pas 30 » (proposition fausse).

Ce genre d'implicite est très présent dans le langage courant. Par exemple, dire à un enfant

« Si tu finis ton assiette, tu auras un dessert »,

sous-entend fortement

« Si tu ne finis pas ton assiette, tu n'auras pas de dessert »,

de sorte que le raisonnement

*« Si tu finis ton assiette, tu auras un dessert.
Je vois que tu n'as pas fini ton assiette,
donc tu n'auras pas de dessert. »*

ne choque personne. Et pourtant ce raisonnement a exactement la même structure que le précédent.

Dans un contexte quotidien, la condition implicite peut être utilisée mais pas dans un contexte d'argumentation mathématique, sous peine de conclusion erronée.

4.3 Le développement de l'expression en langage mathématique

On l'a vu, les mots et les images sont des outils privilégiés pour exprimer ses arguments en mathématiques. Nous terminerons cette partie dédiée au langage mathématique en présentant des activités qui permettent de développer ces outils.

Formuler sa pensée avec précision

Dans l'activité suivante, on demande aux élèves de formuler eux-mêmes des conjectures. On peut appliquer ce type de consignes à d'autres domaines de l'analyse (limites de fonctions, dérivées...) en fin de secondaire. Cette activité, ici vécue en deuxième année de Bachelier AESI, a été l'occasion d'une petite séquence de reformulation d'un énoncé.

Implications dans le domaine des suites

Formulez des implications « raisonnables » (vraies ou fausses, mais pas fausses au premier coup d'œil) en utilisant certaines des expressions « suite majorée » ou « suite non majorée », « suite croissante », « suite tendant vers l'infini ».

Kelly propose

« Si une suite n'est ni croissante, ni décroissante, alors elle est majorée ou minorée ou ni l'un ni l'autre. »

Avec une structure analogue (un peu simplifiée), mais dans un autre contexte, ce pourrait être

« Si un quadrilatère n'est ni un rectangle, ni un losange, alors c'est un parallélogramme ou pas. »

Réaction des autres étudiants :

- *Tu pourrais expliquer ce que tu veux dire car je ne comprends pas bien ?*
- *En fait, une suite est toujours majorée, minorée ou ni l'un, ni l'autre, donc qu'apporte cette conjecture ?*

Pour s'exprimer en mathématiques, il faut souvent manipuler des connecteurs logiques tels que « Si... alors... », « ou bien... ou bien... », « ni... ni... » au sein de phrases complexes dans lesquelles plusieurs connecteurs sont imbriqués. Bien que toutes ces expressions appartiennent au langage naturel, ce type de formulation ne se rencontre pas si souvent dans les échanges quotidiens.

Les étudiants discutent et conviennent que la conjecture proposée est vraie..., mais n'a pas grand intérêt. Mais on demande aussi à Kelly ce qu'elle voulait dire (parce qu'il y a forcément une idée...). Finalement on en arrive à formuler ceci :

« Parmi les suites ni croissantes, ni décroissantes, il y en a qui sont majorées, il y en a aussi qui sont minorées, et il y en a même qui ne sont ni l'un ni l'autre »,

ce qui donnerait dans l'autre contexte

« Parmi les quadrilatères qui ne sont ni rectangles, ni losanges, certains sont des parallélogrammes et d'autres pas. »

Et ces propositions-là ont un intérêt !

Des représentations qui évoluent

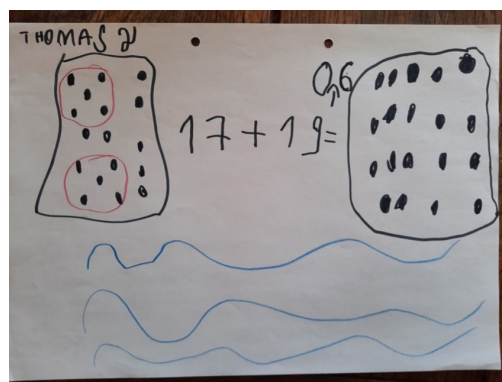
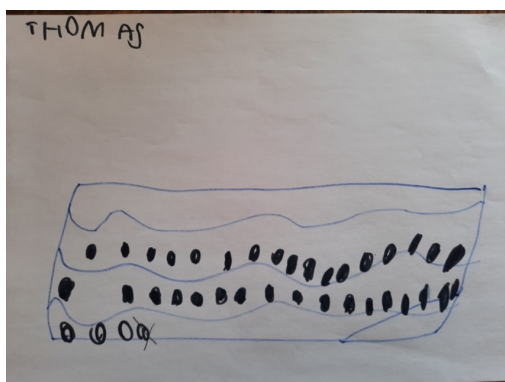
L'expression passe aussi par la *représentation* de situations mathématiques. Dans les sections précédentes, plusieurs activités invitant à « mettre en images » ses idées ont été évoquées. En voici trois autres qui illustrent, à travers quelques productions d'élèves, l'évolution de ces représentations.

La piscine

Les 17 élèves de notre classe et les 19 élèves de la classe d'Aurélie iront à la piscine. Ça fait combien en tout ? Dessine la situation et écris les calculs qui parlent de ça.

Ci-dessous, Thomas, un jeune élève de 2^e année primaire⁹, fait une critique argumentée de son propre travail. Il fait un premier essai mais n'est pas satisfait parce que son dessin ne permet pas de calculer le tout (on devine, à gauche ci-dessous, les élèves en ribambelle dans la piscine). Il procède donc à un deuxième essai mais ce n'est pas encore facile de calculer « Parce que mes 5 ne sont pas arrangés de la même façon tout le temps : une fois comme le dé, une fois en ligne, une fois en colonne... c'est compliqué de voir juste alors ».

9. Classe de Martine de Terwangne.



Essais de Thomas

En second lieu, voici une activité conçue pour des 1^e ou 2^e primaire mais qui a aussi été testée en 5^e et 6^e primaire.

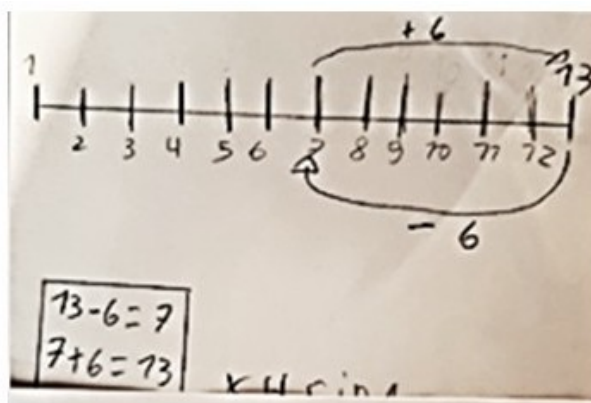
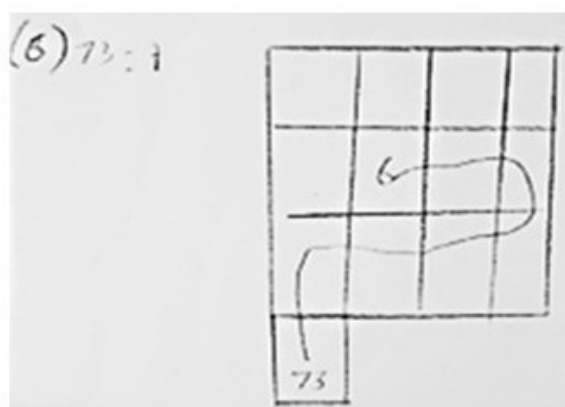
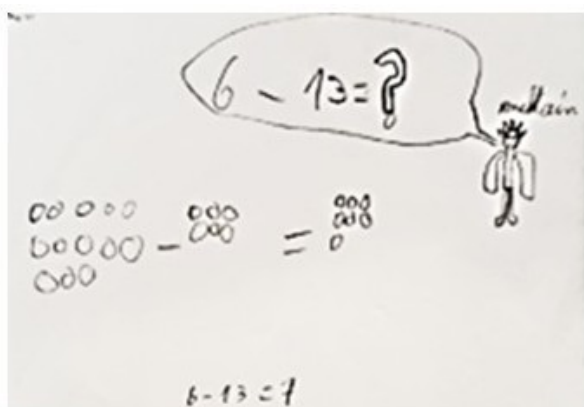
Le jeu de l'oie

Un pion avance de 6 cases. Il arrive sur la case 13. De quelle case est-il parti ?

Dessine la situation.

Écris les calculs qui parlent de ça.

Les trois productions ci-dessous, réalisées par des enfants de fin du primaire¹⁰, montrent la diversité des représentations possibles pour une même situation.



10. Classe de Catherine Simon.

Le premier dessin montre que le problème a été interprété comme la recherche d'un écart entre deux quantités, traduit par une différence. En dessous, les termes de l'opération et son résultat sont représentés sous forme de collections de jetons, avec le dessin pour 13 organisé en lignes de 5. Le calcul correspondant est écrit à l'envers, mais le résultat annoncé dans le bas de la feuille est correct.

Le second est une grille, sans doute en raison du contexte donné, un pion et des cases. L'enfant a représenté le trajet de la 6e à la 13e case. L'énoncé est peut-être mal interprété mais l'ébauche de calcul qui apparaît sur la gauche

$$(6)13 = 7$$

correspond au schéma, et fournit la bonne réponse (7).

Le troisième est une droite graduée avec une visualisation de l'addition et de la soustraction associées à la situation, correctement écrites dans le coin inférieur gauche.

Chaque dessin se détache plus ou moins fortement de la situation concrète de départ et capture d'une manière différente les nombres et opérations mathématiques en jeu (notamment le nombre vu comme cardinal ou comme ordinal).

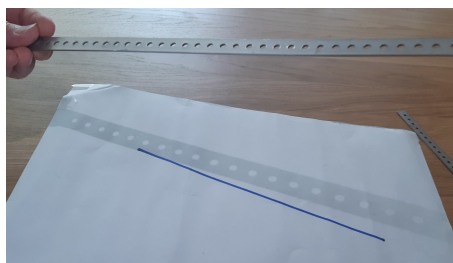
Enfin, la troisième activité proposée a été vécue en formation d'étudiants. Elle est adaptable pour des élèves de 3^e secondaire.

Ombres à la lampe

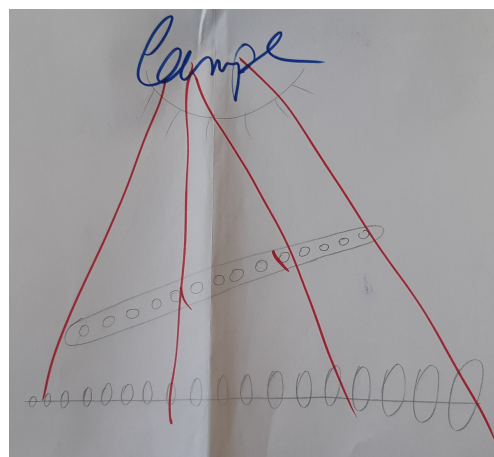
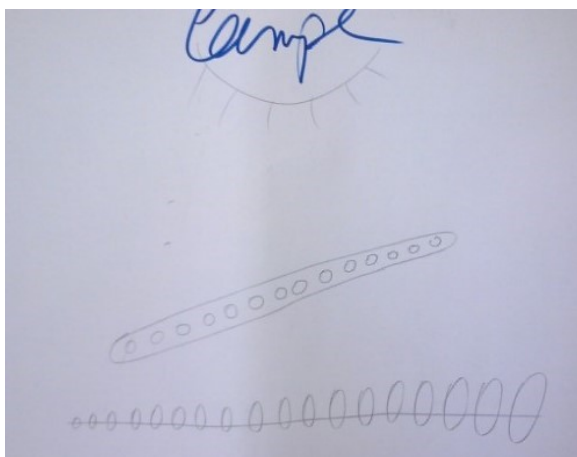
On dispose de lampes (de smartphone) et de barrettes de Meccano.

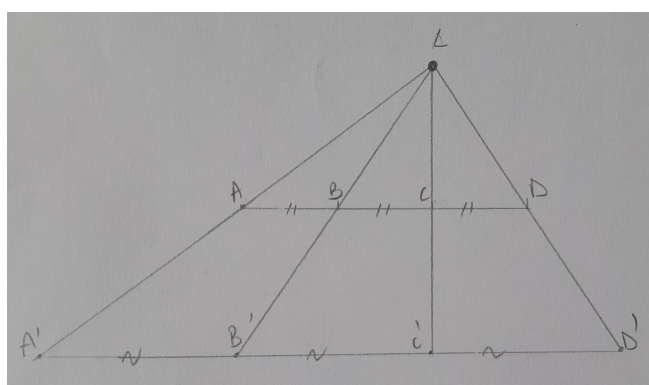
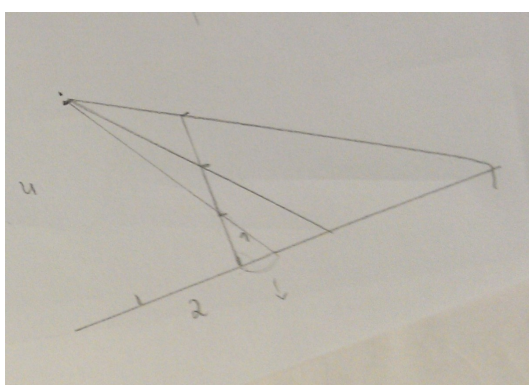
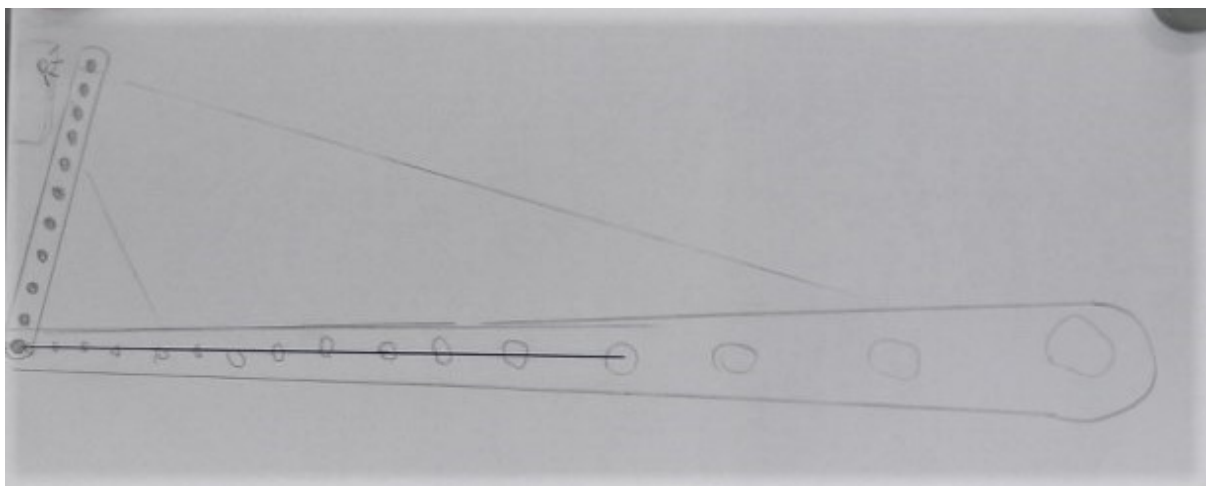
À l'aide de ce matériel, partagez le segment dessiné sur votre feuille en deux parties dont l'une est deux fois plus longue que l'autre.

Après avoir expérimenté, réalisez, pour chacun des cas, qu'il fonctionne ou non, un schéma représentant la situation.



Voici un échantillon des schémas produits.





Ici aussi, certaines représentations restent davantage attachées au matériel concret. Les deux derniers schémas parviennent davantage à isoler les caractéristiques pertinentes pour l'analyse mathématique de la situation et n'utilisent que des objets mathématiques (points et droites), un grand pas dans l'abstraction.

La dernière représentation est en outre codée, elle est prête pour servir de base à la démonstration des propriétés conjecturées par expérimentation. Elle atteint ainsi pleinement le statut de *figure géométrique*. Un dessin ou un schéma, on les observe, on les mesure ; une figure, on la decode, on « lit » ses propriétés, c'est sur elle que porte l'argumentation.

Ainsi, tout au long de la scolarité, l'expression progresse vers l'abstraction. Les dessins, de plus en plus structurés, deviennent calcul, droite graduée, figure géométrique. . . , autant d'objets mathématiques au service de l'argumentation.

5 Un problème analysé à la lumière de ce qui précède

5.1 Vers une activité de débat

Le problème que nous allons examiner a été élaboré au Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM) et a été inspiré par une situation d'évaluation des *Outils d'Évaluation pour les Humanités générales et Technologiques, Mathématiques, Démontrer en géométrie, Prisme droit*, 2e degré, 3e année, SeGEC.

Outil d'évaluation sur le théorème de Pythagore

Dans le prisme droit représenté ci-dessous, Q est un point fixé sur une arête. En le reliant aux sommets A et F , on obtient un triangle.

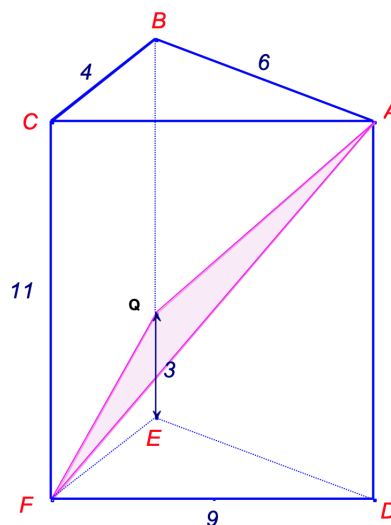
Différentes mesures sont données sur la figure.

On te demande de démontrer (prouver) que le triangle AQF N'EST PAS un triangle rectangle.

Tu commenceras ta démonstration en indiquant ce qui t'est donné et ce que tu dois prouver.

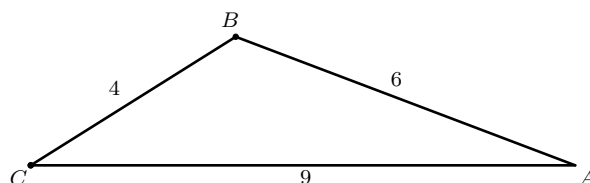
Tu justifieras tes réponses en citant et mentionnant les théorèmes et/ou les propriétés que tu utilises (dans ta démonstration.)

Tu veilleras également à faire apparaître la structure de ta démarche.



Il s'agit d'une (belle) question d'application du théorème de Pythagore. L'élève doit choisir le bon outil, la bonne propriété pour résoudre le problème. Cependant étant donné la formulation de la consigne, on ne lui demande pas de se prononcer sur la véracité de ce qui est énoncé, de se représenter la situation au point d'être persuadé. Rappelons que c'est une question d'évaluation.

Si, dans le contexte du cours (et non de l'évaluation), on lui demandait la nature du triangle, peut-être s'apercevrait-il que la base du prisme est un triangle obtusangle et cela l'aiderait-il à se convaincre.

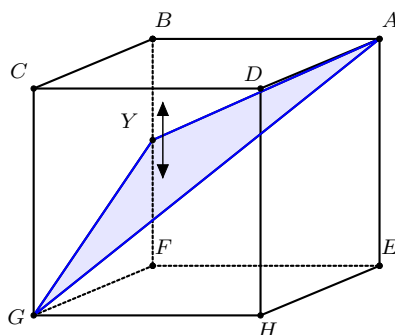


Nous avons modifié (peu à peu et finalement assez radicalement) la question pour en faire une activité de débat, hors contexte d'évaluation. Dans un premier temps, nous avons conçu cette version, qui a été expérimentée dans l'enseignement secondaire supérieur.

Le triangle dans le cube - version 1

La figure ci-dessous représente un cube. Le point Y appartient à $[BF]$.

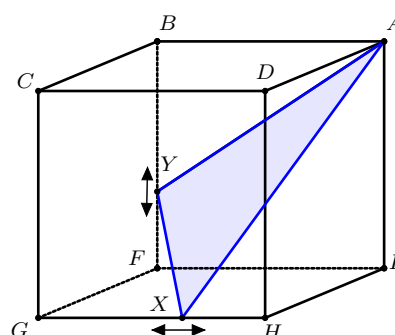
Conjecturez à propos de la nature du triangle AYG .



Puis nous avons encore élargi le problème, pour une version expérimentée en formation (continue ou initiale) d'enseignants.

Le triangle dans le cube - version 2

La figure ci-dessous représente un cube. Le point X est situé sur l'arête $[GH]$ et le point Y sur $[BF]$. Conjecturez à propos de la nature du triangle AXY .



5.2 Pourquoi argumenter ?

La question a été soumise plusieurs fois sous forme de débat, au secondaire supérieur (version 1), dans l'enseignement supérieur pédagogique et à un public d'enseignants (version 2),

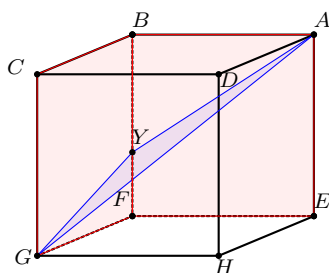
L'objectif principal du débat est de permettre à chacun de se faire une opinion sur une question mathématique et de tenter de la défendre. Au moment du débat, l'enseignant « se retire » et laisse principalement l'initiative et le contrôle des arguments à la classe.

Les conjectures ne sont pas évidentes et les participants sont obligés d'argumenter car le dessin ne permet pas de mesurer l'angle dans l'espace : *il ne suffit pas de constater !*

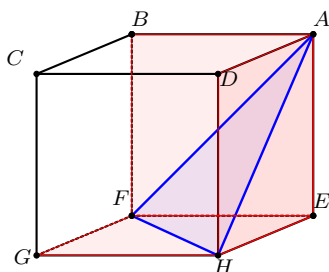
La situation a donné lieu à de nombreuses conjectures. En voici une qui est apparue à chaque expérimentation : « le triangle AYG est rectangle »¹¹. Mais cette conjecture ne convainc pas

11. D'autres conjectures, sur lesquelles nous ne nous arrêterons pas ici, s'intéressent par exemple aux conditions pour que le triangle soit isocèle.

tout le monde. Le *débat* commence. Certains défendent la conjecture *pour convaincre les autres*, en donnant l'argument suivant : « les deux segments $[AY]$ et $[YG]$ appartiennent à des plans perpendiculaires, donc ils sont perpendiculaires ».



Certains contestent cet argument (même s'ils sont d'accord avec la conjecture de départ) en évoquant une autre situation : « les côtés du triangle AFH sont dans des plans deux à deux perpendiculaires et pourtant ce triangle est équilatéral, car tous ses côtés sont des diagonales des faces du cube ». Ils trouvent *un contreexemple pour invalider une proposition*.

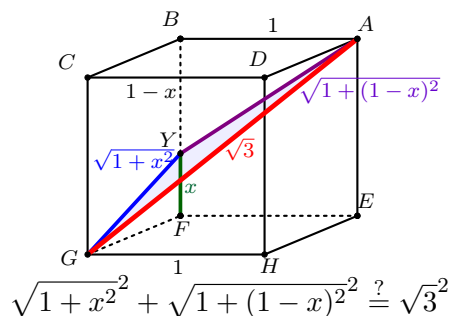
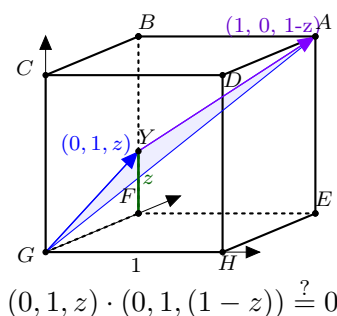


On a donc l'occasion de *se tromper* en conjecturant, ce qui éveillera la vigilance par la suite : on ne peut pas décider que quelque chose est vrai seulement sur base de notre intuition.

5.3 Sur quels outils l'argumentation peut-elle s'appuyer ?

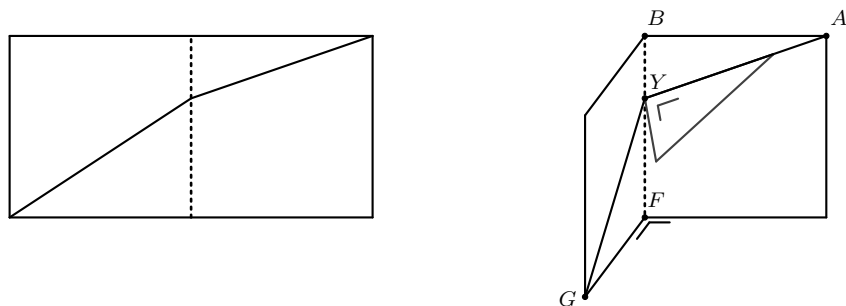
Voyons quelques façons de progresser vers une solution.

1. *Faire des liens avec d'autres connaissances.* On peut appliquer des connaissances dans le domaine du calcul vectoriel (produit scalaire) ou le théorème de Pythagore pour déterminer par calcul (algébrique) si l'angle en Y est droit ou non. Dans les deux cas, il faudra *algébriser*.



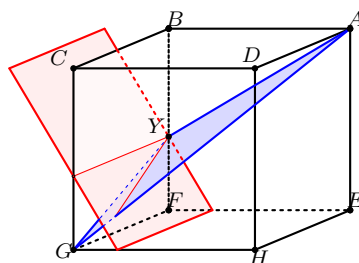
2. On peut aussi penser à *représenter, bricoler, expérimenter*. Des élèves de 5^e secondaire ont travaillé avec le tableau, qu'ils font pivoter, et une équerre, qu'ils tentent de placer... Mais ce n'est pas évident de trancher. On ne voit pas bien. Tant mieux, il faudra encore argumenter.

Des élèves découpent un double carré, tracent une ligne brisée puis plient comme ci-dessous, puis essaient de placer leur équerre entre les deux côtés tracés mais ça n'a pas l'air d'aller bien. On doute.



Cette méthode, que l'on pourrait penser « hors argumentation » a tout son sens car elle permet de s'appropriier le problème, de bien le visualiser. Le réflexe de « construire en vrai », d'expérimenter est assez peu répandu. De plus, elle peut non seulement donner une idée de la réponse mais inspirer la piste d'argumentation suivante.

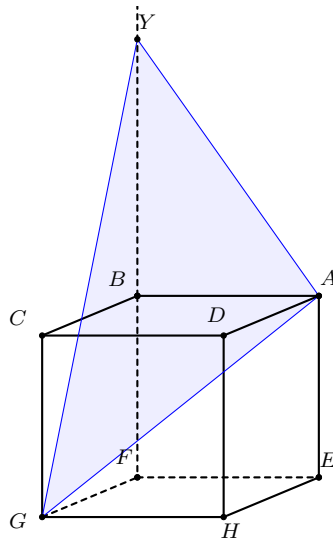
3. *Isoler par la pensée* une partie de la situation. On peut fixer un côté de l'angle en Y , par exemple $[AY]$, puis, en faisant abstraction de G (et même du reste du cube), on peut se représenter toutes les droites perpendiculaires à AY qui passent par Y . En faisant tourner une telle droite autour de AY , on engendre, par un *mouvement pensé* le plan perpendiculaire à AY passant par Y . Or ce plan ne semble pas comprendre G . L'angle $\widehat{AYG}$ n'est donc pas droit. Et comme A et G se trouvent de part et d'autre de ce plan, l'angle est obtus.



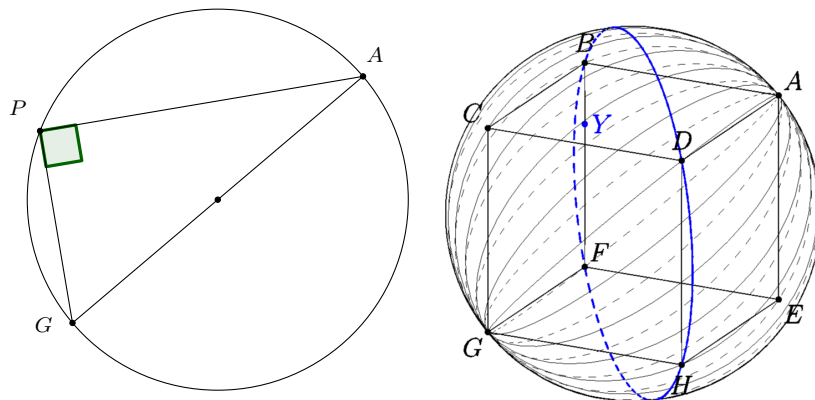
L'idée de considérer le plan orthogonal peut aussi être inspirée par le *mouvement* de rotation, pensé ou réel, de l'équerre autour de AY .

4. *Le mouvement pensé, la considération de cas extrêmes et la sortie du cadre*. Voici une autre façon d'utiliser le mouvement pensé, avec déformation cette fois. Quand on sort du cadre du cube, que l'on tire Y vers le haut sur la demi-droite $[FB]$, on a l'intuition que l'on pourra rendre l'angle en Y aussi petit que l'on veut. Idem si l'on tire Y vers le bas sur la demi-droite $[BF]$. En B et en F , l'angle est droit. On a alors l'intuition, à vérifier, que l'angle en Y , quand celui-ci se trouve entre B et F , est obtus.

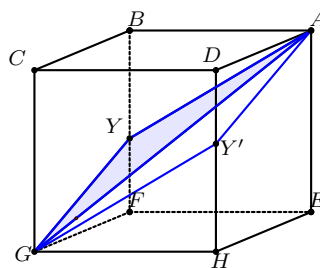
Ici le fait de faire varier, de considérer des cas extrêmes, « hors champ », permet de se défaire de l'idée fausse suivante : l'angle en Y reste constant lorsque Y se déplace sur la droite FB .



5. La troisième approche revient à identifier tous les points P tels que l'angle $\widehat{AYP}$ est droit. Pour cela, on peut *changer de point de vue* et, au lieu de fixer $[AY]$, fixer plutôt $[AG]$ et se demander où sont tous les points P tels que l'angle $\widehat{APG}$ est droit. On peut alors se souvenir que tout triangle rectangle est « inscrit dans un demi-cercle », demi-cercle que l'on peut faire *tourner mentalement* autour de l'axe AG pour obtenir une sphère comprenant tous les sommets du cube... mais pas Y , si celui-ci n'est pas un sommet du cube.



6. Enfin, on pourrait aussi *compléter le triangle* AYG en un parallélogramme, qui est une section plane du cube et se demander si celui-ci est un rectangle...



5.4 S'exprimer pour argumenter

Lors du débat, on apprend à s'exprimer, à écouter, à argumenter « pour convaincre », à s'opposer à une opinion tout en respectant ses interlocuteurs... On observe aussi, lors des débats, une plus

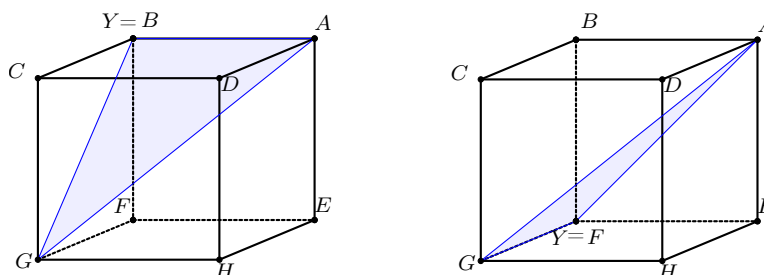
grande liberté d'expression : les élèves osent dire ce qu'ils pensent, et qui est parfois révélateur de profondes incompréhensions.

Le débat donne l'occasion de vraiment communiquer : « qu'entends-tu par cette conjecture ? Peux-tu préciser ? » Voici un exemple d'une *difficulté de compréhension* et d'effort pour préciser sa pensée.

Des étudiants avancent des arguments pour montrer que la conjecture (« le triangle AYG est rectangle ») est fausse, mais...

— David : « ça dépend ! »

Il pense aux deux cas particuliers illustrés aux figures suivantes.



— Sonia : « la conjecture n'est pas bien formulée, il manque des mots ! »

On clarifie : « Le triangle AXY est *toujours* rectangle ». David admet alors que l'énoncé est faux, mais il insiste sur le fait qu'on a quand même un triangle rectangle lorsque $Y = B$ ou F .

— Une étudiante : « on pourrait écrire un énoncé correct avec un *il existe* plutôt qu'un *pour tout* » : il existe des choix de Y pour lesquels le triangle est rectangle.

5.5 Les mathématiques peuvent-elles servir à autre chose qu'à remplir des feuilles ?

Quel est l'intérêt d'inciter les élèves à douter, à argumenter, à débattre en classe ?

Tous les cours doivent participer, dès qu'ils le peuvent, au développement de la pensée argumentative et critique, mais le cours de mathématique y participe-t-il s'il consiste à faire mémoriser des règles et des formules et à les faire appliquer, sans plus ?

Outre l'habitude de se positionner, de penser les maths, outre l'acquisition de compétences d'expression, d'écoute, de respect, le débat contribue à développer une habitude de se remettre en question, d'être critique face à sa propre pensée.

La pratique du débat a aussi une incidence sur le reste du cours : les élèves remettent plus facilement en question les propos avancés par leurs condisciples et par l'enseignant, cherchent plus à comprendre.

Après avoir mené ce débat au secondaire, Daniel Zimmer¹² demande aux élèves de répondre anonymement à quelques questions dont « Qu'as-tu appris lors de cette activité de débat ? »

Voici quelques réponses¹³.

- « Que c'est possible de débattre en math et qu'on devrait faire ça plus souvent ».
- « Que les maths ne sont pas que de la restitution mais aussi de la réflexion ».

12. Doctorant à l'UCLouvain.

13. Nous les reproduisons telles quelles, orthographe comprise.

- « Que c'est quand même assez dure de réussir à convaincre d'autres personnes par rapport à une idée et surtout c'est assez dure de la justifier d'un point de vue mathématique ».
- « On peut croire et être persuadé d'avoir raison alors que non ».
- « Qu'on peut rapidement admettre quelque chose d'éroné comme vrai, être influencer par ce que la majorité pense ».
- « Ne pas avoir peur de se tromper » ;

Et enfin

- « Elle était chouette et montrait que les mathématiques pouvait servir à autre choses que remplir des feuilles ».

Références

- [1] ARSAC, G., CHAPIRON, G., COLONNA, A., GERMAIN, G., GUICHARD, Y. et MANTE, M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Lyon : Presses universitaires de Lyon.
- [2] BALACHEFF, N. (2019), *Contrôle, preuve et démonstration, trois régimes de la validation*. In : Pilet J., Vendeira C. (eds.) Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2018 (pp. 423-456), Paris : ARDM et IREM de Paris - Université de Paris Diderot.
- [3] BARBIN, E. (1987-1988), *La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques*. Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, fascicule 5 « Didactique des mathématiques », pp. 1-34.
- [4] CHOQUET G., (1964), *L'enseignement de la géométrie*. Paris : Hermann.
- [5] COLONNA, A. et LEGOUPIL, B. (2010), *Apports et intérêts de l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour la démarche d'investigation*, atelier présenté au Colloque Inter-IREM Collège d'Orléans, le 14 juin 2010.
- [6] EDUSCOL (2016), *Ressources pour le collège, Raisonnement et démonstration*, Direction générale de l'enseignement scolaire (France), <http://eduscol.education.fr>.
- [7] ERMEL (1999), *Vrai ? Faux ? ... On en débat !*, Paris : Institut National de Recherche Pédagogique.
- [8] GAUD, D., MINET, N., et l'équipe "lycée" de l'IREM de Poitiers (2009), *Parcours d'étude et de recherche en géométrie pour la classe de seconde*. Petit x n° 79, pp. 49-71.
- [9] Groupe d'Enseignement Mathématique (1985), *Une géométrie pour tous les jours*, Dossier n° 2, 3^e édition, Louvain-La-Neuve.
- [10] GILBERT, Th. (2000), *Quelques instruments de pensée en géométrie*. Math-École n° 193, pp. 10-25.
- [11] GILBERT, Th. (2010), *Instruments de la pensée géométrique*, GEM, <http://wp.gem-math.be/2010/08/09/instruments-de-la-pensee-geometrique/>.
- [12] LEGRAND, M., LECORRE, T., LEROUX, L. et PARREAU, A. (2011). *Le principe du « Débat Scientifique » dans un enseignement* : Pré-tirage du tome 1. Grenoble : Université Joseph Fourier, IREM de Grenoble.
- [13] LEROUX, L. et LECORRE, T. (2007), *Le « débat scientifique » en classe. Comment donner à l'élève une responsabilité scientifique réelle en cours de mathématiques ?*. APMEP - PLOT n° 19, pp. 2-15.
- [14] WAUTERS, N. (2020), *Langage et réussite scolaire, Pratiques d'enseignement et français de scolarisation*. Bruxelles : Couleur Livres, Changements pour l'Égalité.

Table des matières

1 Les mathématiques peuvent-elles servir à autre chose qu'à remplir des feuilles ?	1
2 Pourquoi argumenter ?	2
2.1 Argumenter pour trouver une solution	3
2.2 Argumenter pour convaincre ou se convaincre	7
2.3 Argumenter pour éclairer, parce qu'on veut comprendre les raisons d'une situation	10
2.4 Pour mettre de l'ordre déductif dans ses connaissances	13
3 Sur quels outils l'argumentation peut-elle s'appuyer ?	13
3.1 Des démarches et outils de pensée en géométrie	15
3.2 Des démarches et outils de pensée en nombres, algèbre et analyse	20
3.3 En algèbre et analyse	22
4 S'exprimer pour argumenter	22
4.1 Du langage naturel au langage mathématique	22
4.2 Une difficulté du langage mathématique : le traitement des implicites	23
4.3 Le développement de l'expression en langage mathématique	24
5 Un problème analysé à la lumière de ce qui précède	28
5.1 Vers une activité de débat	28
5.2 Pourquoi argumenter ?	30
5.3 Sur quels outils l'argumentation peut-elle s'appuyer ?	31
5.4 S'exprimer pour argumenter	33
5.5 Les mathématiques peuvent-elles servir à autre chose qu'à remplir des feuilles ? .	34



Ce texte a été préparé avec l'aide de Benoît Jadin et de nombreux membres du GEM, qu'ils en soient chaleureusement remerciés. Thérèse Gilbert et Isabelle Berlander sont formatrices d'enseignants à la Haute École Galilée, Laure Ninove à la Haute École Vinci et à l'UCLouvain. Elles sont toutes trois membres du GEM.

Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM)

UCLouvain – MATH

Chemin du Cyclotron 2, bte L7.01.02

1348 Louvain-la-Neuve

<https://wp.gem-math.be/>

contact@gem-math.be