OH, MOI LES MATHS…

Quelqu'aient été vos rapports passés – bons, moins bons ou nettement moins bons – avec les mathématiques, vous lirez avec intérêt dans ce petit ouvrage les questions inventées par des enseignants pour donner du sens à cette discipline, le rôle qu'ils attribuent aux questions ouvertes, aux concepts, au calcul, à leurs recherches et à celles des élèves. Vous apprendrez à quoi servent les mathématiques, à quoi elles peuvent vous servir, ce que les gens en pensent, et aussi pourquoi les mathématiques, qui ont une histoire, la cachent le plus souvent.

Si vous vous intéressez un peu aux maths, lisez ce livre : il vous fera réfléchir. Sinon, lisez-le aussi, et peut-être vous amènera-t-il à vous y intéresser…

Les auteurs :

Ils se sont rencontrés au Groupe d'Enseignement Mathématique, le GEM, qui depuis vingt ans rassemble, à Louvain-la-Neuve, des enseignants de tous niveaux. Pour le Gem, l'apprentissage des mathématiques forme un tout de la prime enfance à l'âge adulte.

Alain Desmarets, instituteur et directeur d'école fondamentale.
Benoît Jadin, professeur d'école normale et d'enseignement secondaire.
Nicolas Rouche, professeur d'université émérite.
Pierre Sartiaux, professeur d'école normale.

Les auteurs remercient les rédactions des périodiques
Échec à l'échec
Forum Pédagogie
Histoire et Enseignement
Mathématique et Pédagogie
pour les autorisations de reproduire,
et parfois d'aménager certains articles.

Ce livre a été initialement édité par les Éditions *Talus d'approche*, entre 1997 et 2005 (ISBN 2-87246-060-8) avant d'être mis en libre accès avec les accords des auteurs et des ayant droits.

Alain Desmarets
Benoît Jadin
Nicolas Rouche
Pierre Sartiaux

OH, MOI LES MATHS…

Avant-propos

Imaginez un éditeur curieux qui se sent concerné par les maths, et que la difficulté n'effraie pas. Imaginez quatre enseignants, touchant de près à l'apprentissage de ces maudites maths, que l'écriture n'effraie pas. Figurez-vous leur rencontre :

« À quoi ça sert les maths ? Est-ce donc à ce point indispensable ? Qu'est-ce qui justifie leur statut d'outil de sélection ? questionne l'éditeur.

– Ce n'est pas si simple et puis on a déjà tellement discuté de ces questions », répondent les pédagogues.

L'éditeur, peu à peu déterminé, avance :

« Et si vous rassembliez vos idées, si vous confrontiez vos écrits pour qu'apparaisse une image collective et compréhensible par le plus grand nombre ? »

Voilà nos quatre mousquetaires de l'équation confrontés à leurs visions différentes du problème. Car enfin, que peuvent en dire ensemble un prof d'unif, un prof d'école normale, un prof du secondaire et un instituteur ? Eh bien, c'est tout l'intérêt du livre que vous tenez entre les mains. Ils ont relu attentivement leurs copies, *les ont nettoyées et surtout confrontées à la diversité de leurs regards avec la volonté d'une lecture concentrique et susceptible d'éclairer l'épineux problème de l'apprentissage des maths, compte tenu des idées qu'on s'en fait.*

Ils vous proposent un recueil destiné non seulement aux enseignants de mathématiques, mais aussi aux non matheux, ceux pour qui cette matière reste indigeste et nourrit de bien mauvais souvenirs, ceux qui n'ont rien à voir avec les maths et que l'acte d'apprendre intéresse. Pour tous, donc. Certains passages peuvent paraître un peu plus arides (il en faut pour tous les palais, non ?) ; une lecture sautillante et indocile est donc fortement conseillée. Méfiez-vous, l'intérêt des textes n'est pas nécessairement proportionnel à leur longueur ! Les auteurs ont préféré garder leurs styles propres plutôt que de se fondre dans une uniformité molle. Commencez ce livre par où vous voudrez et laissez-vous mener par vos intérêts.

D'un chapitre à l'autre, des situations concrètes (à vos crayons !) et d'autres textes, prenant plus de recul, vous sont proposés. Cette variété illustre le plaisir du travail de confrontations sur une même matière. Elle illustre aussi l'absence de réponse linéaire et absolue aux questions de départ de l'éditeur curieux.

Qu'il soit ici remercié pour son goût du risque. Sans lui, les auteurs n'auraient pas pris le temps de s'asseoir autour de leurs feuilles éparpillées pour tenter de répondre aux préoccupations de plus de gens qu'on ne pense, mais surtout, ils n'auraient pas eu l'occasion d'articuler en un ouvrage cohérent des contributions jusque-là éparses.

Que ce pari ouvre la voie à d'autres démarches intradisciplinaires.

PREMIÈRE PARTIE

Questions au lecteur

Dans cette première partie, il vous faudra réfléchir parfois, prendre la peine de réaliser les activités qui vous sont proposées, même si elles paraissent simples. L'effort demandé vous permettra de comprendre les propos du reste de l'ouvrage, pour avoir expérimenté par vous-même ce qui est écrit. Prenez du plaisir à ce que vous faites, vous verrez, c'est utile !

Chapitre premier

Comptez et multipliez

Chacun d'entre nous se souvient d'avoir appris la multiplication écrite en récitant des phrases du genre « *j'écris trois et je reporte un* ». Les activités proposées ci-après montrent le « pourquoi » de cette façon de faire. Êtes-vous prêt ? Alors allons-y…

1. Alleï une fois, en rang

Décrivez avec des mots le dessin de la fig. 1*. Ensuite, donnez ce message à quelqu'un en lui demandant de dessiner ce que vous décrivez. Comparez le dessin et l'original.*

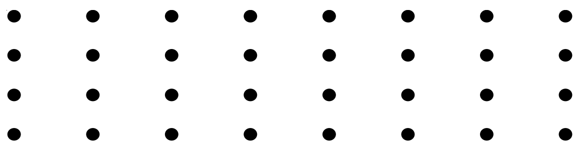


FIG. 1.

Espace blanc de quelques minutes vous
permettant de réaliser l'activité proposée.

Le but de cette première activité est de mettre au point une terminologie et une représentation symbolique qui permettent de transmettre facilement des dessins de collections organisées.

Le langage doit être clair, précis et non équivoque. Une formulation du genre « 4 *rangées de* 8 *points* » est idéale. Voici quelques exemples à propos de diverses collections similaires :

• *Tu dessines un point, puis un point, puis un point, puis encore un point, puis encore un point. Ensuite tu reproduis* 8 *fois la ligne que tu viens de dessiner.* (8 ans.)

• *Dessine* 4 *points espacés d'environ* 1 cm *chacun et tu répètes* 8 *fois.* (Adulte.)

• *Tu dessines* 8 *points en haut,* 4 *points sur le côté et tu remplis.* (9 ans.)

Il est important que le lecteur du message ne voie pas les collections que l'on code pour lui, sinon il connaît déjà la forme et interprète le message reçu en connaissance de cause.

On peut maintenant convenir que les collections rectangulaires de points seront décrites sans ambiguïté par la terminologie « *n* fois *p* ».

Des collections de points peuvent se voir en cachant une grande collection à l'aide d'un « revolver » de papier (feuille dont un rectangle a été découpé en haut à droite), pour ne laisser apparaître que la quantité voulue. C'est ce qu'illustre la fig. 2. En se fixant une règle de déplacement du revolver et en comptant les points ainsi découverts, on voit apparaître une suite de nombres. En descendant de un et en décalant de un vers la gauche à chaque étape, comme sur la fig. 2, on découvre la suite 1, 4, 9, 16. À l'étape suivante, on dénombrerait 25 points. Cette suite est la suite des nombres entiers élevés au carré, c'est-à-dire multipliés par eux-mêmes : $1 \times 1 = 1$, $2 \times 2 = 4$, $3 \times 3 = 9$ et ainsi de suite.

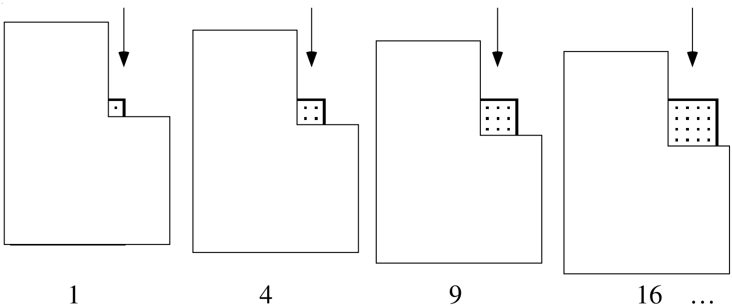


FIG. 2.

En se fixant une autre règle de déplacement du revolver, on obtient ainsi différentes suites, à propos desquelles on peut se demander : *Quand on arrive au bord de la feuille, peut-on prévoir les nombres que l'on aurait si la feuille était plus grande ?* Si vous voulez vous amuser…

Dans l'activité suivante, nous allons réutiliser l'écriture « *n* fois *p* » dans un contexte nouveau.

2. À la tâche

Voici à la fig. 3 *deux collections rectangulaires de points partiellement cachées par une tache.*

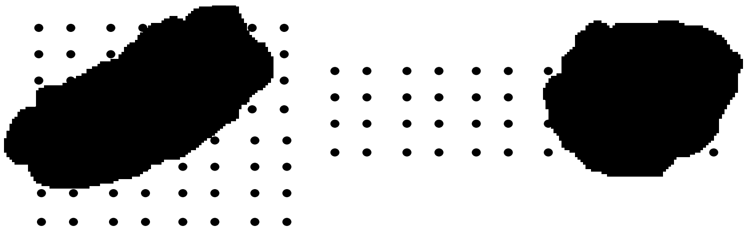


FIG. 3.

Caractérisez les collections rectangulaires tachées à l'aide de l'écriture mise au point après la consigne précédente.

> Vous vous attendez à un petit espace blanc de quelques minutes vous permettant de réaliser l'activité proposée ? Mais si vous avez compris cela, vous imaginerez bien ces petits espaces blancs après chaque activité, non ?

Il s'agit ici d'une étape facultative de réinvestissement des acquis. Les stratégies mises au point diffèrent souvent d'une personne à l'autre. Certains ont même peut-être pensé à regarder au travers de la feuille pour voir s'il n'y avait pas de points visibles derrière les taches ?

Ce que l'on vient de réaliser n'est pas une activité gratuite. C'est un outil que l'on peut utiliser.

3. Du plus petit au suivant

Voici 4 *collections de points à la fig.* 4*. Il s'agit d'une reproduction de quatre grandes affiches. Vous voyez ces collections sans pouvoir les manipuler et pourtant nous vous demandons de les classer par ordre croissant sans calculer. Pour cela vous disposez d'une collection de points comme celle de la fig.* 5 *et d'une paire de ciseaux. Vous faites ce que bon vous semble à l'aide de cette collection pour résoudre la question. Comment procéder ? Il vous est possible de reproduire une grille de points sur une feuille annexe pour travailler à l'aise…*

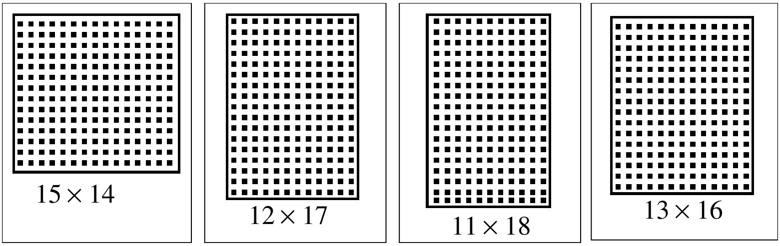


FIG. 4.

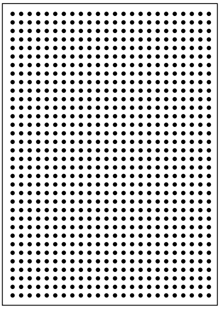


FIG. 5.

Sans savoir combien de points sont dessinés, on peut quand même classer les collections, c'est extraordinaire ! La technique que nous attendons est la reproduction des collections en plus petit, à l'aide de la feuille couverte de points, puis la comparaison par transparence ou superposition des collections, les collections affichées étant visibles mais non accessibles.

Rappelons que le but de cette consigne était d'utiliser des comparaisons de collections. Nous allons progresser pour arriver à une décomposition des nombres, et pressentir la facilité d'utiliser certains gabarits dans le découpage. (Un gabarit est un rectangle aux dimensions de la collection de points, comme illustré à la fig. 6.)

4. Des gabarits pour compter…

Vous disposez d'un ensemble de 4 *gabarits (rectangles de points) dessinés sur une feuille de papier* (6×7, 8×5, 8×7, 10×5)*, le nombre total de points par gabarit est noté en dessous de chaque gabarit. Une collection de points de* 17×19 *est dessinée sur une feuille, comme le montre la fig.* 6*. Il est conseillé éventuellement de reproduire ces documents en plus grand…*

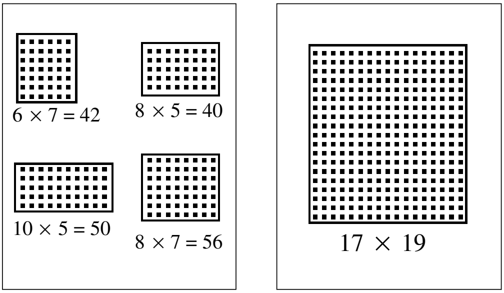


FIG. 6.

Déterminez le nombre de points dans cette collection de 17×19 *en utilisant les gabarits donnés. Faites-le de la façon la plus économique (c'est-à-dire : effectuez le calcul final le plus rapidement possible).*

Remarque : vous n'êtes pas obligé de tout recouvrir, ni d'utiliser tous les gabarits (ce n'est pas un puzzle à construire), un gabarit est quelque chose d'insécable.

Un découpage possible donnerait trois gabarits de 10×5, trois gabarits de 7×6, et deux collections : une de 30 points, l'autre de 17 points comme le montre la fig. 7.

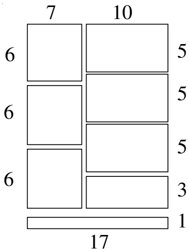


FIG. 7.

La notion d'économie est différente selon les esprits et les âges. Pour certains, l'économie se traduit par l'utilisation du moins de gabarits possible. Pour d'autres, il s'agit (comme précisé dans la consigne) d'effectuer l'opération finale le plus facilement possible. L'utilisation des gabarits multiples de dix est alors choisie. Lorsque la multiplication n'est pas acquise, mais que l'addition l'est, cette méthode est opératoire et peut conduire au résultat. La difficulté du découpage des gabarits (imprécisions dues aux contours empêchant une juxtaposition correcte…) peut amener l'abandon des gabarits découpés au profit du traçage de lignes sur les collections, un contour rectangulaire se substituant au gabarit (étape d'abstraction !).

Cette étape est la première qui vise typiquement l'apprentissage des algorithmes de la multiplication écrite appliquée à notre système de numération. Si cet algorithme représente quelque chose, il n'y aura plus aucune difficulté à pratiquer cette multiplication. Les étapes qui suivent donneront une vision de ce qui est en jeu dans les multiplications écrites et leur disposition.

5. Des gabarits pour recouvrir…

À l'aide des gabarits de la consigne précédente et en utilisant seulement ces gabarits, dessinez une collection de 21×14 *(cette fois, il s'agit de recouvrir la collection à l'aide des gabarits).*

Il s'agit ici de s'arranger pour que les gabarits « tombent juste ». La différence avec la consigne précédente est que dans ce cas, le recouvrement exact est possible. Il faut analyser 21×14 pour choisir les bons gabarits, ceux qui vont recouvrir entièrement, sans dépasser la collection et sans qu'il y ait de point non recouvert. On remarque par exemple, que le gabarit de 8×7 peut se mettre deux fois pour avoir une largeur de 14 points, il reste à « tomber juste » pour avoir une longueur de 21 ! Un peu de manipulation et le tour est joué. Vous avez trouvé ? Non ? Alors, cherchez encore un peu…

6. Des gabarits à inventer…

Quels sont les gabarits les plus utiles pour déterminer facilement le nombre de points de cette collection 21×14 *? Dessinez cette collection de* 21×14 *points en utilisant vos nouveaux gabarits. (Les gabarits sont toujours rectangulaires, aucun côté n'a plus de* 10 *points.)*

Vous avez imaginé un découpage pour déterminer sans difficulté le calcul du nombre de points d'une collection. Les gabarits 10×10 facilitent le calcul. Il en va de même pour les multiples de 10, de préférence aux autres gabarits.

7. Des gabarits à colorier…

À l'aide de quelques crayons de couleurs, décomposez une collection de 28×24 *cases (comme illustrée à la fig.* 8*) en gabarits n'excédant pas* 10×10*. Utilisez le moins de gabarits possibles. Coloriez d'une même couleur les gabarits identiques. Une feuille quadrillée de grand format vous facilitera la tâche.*

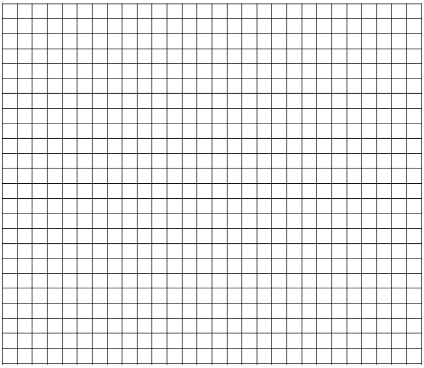


FIG. 8.

Vous avez utilisé la décomposition des nombres en centaines, dizaines, unités pour déterminer des sous-collections dont la somme sera plus aisée à calculer.

Le but ici est clair : arriver à une distributivité de la multiplication sous forme géométrique en utilisant les puissances de 10 ou des multiples de ces puissances pour faciliter le comptage. Il est à noter que l'on passe des points aux cases d'un quadrillage. Le passage s'effectue par facilité et sans perturbation. On obtient ainsi la fig. 9.

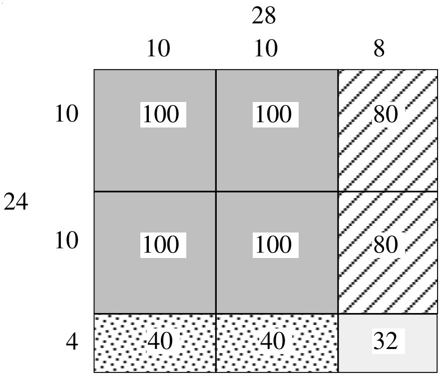


FIG. 9.

8. Finis, les gabarits

Sur une feuille de papier uni, schématisez 32×27 *en traçant le moins de lignes possibles.*

À partir d'une décomposition idéale des nombres, il s'agissait d'arriver à une représentation géométrique de ceux-ci.

À la fig. 10, vous avez le résultat attendu, sans respect des grandeurs.

Le respect de la proportionnalité serait ici un handicap : c'est long. Pour reproduire 32, on peut écrire 10 + 10 + 10 + 2 (ce qui est demandé ici). Certains vont passer à l'étape 32 = 30 + 2 parce que ce sera plus facile. Pour beaucoup, le souci de précision empêche parfois la représentation, l'étape suivante permet de s'en affranchir.

	10	10	10	2	
10	100	100	100	20	320
10	100	100	100	20	320
7	70	70	70	14	224
					864

FIG. 10.

9. Enfin des résultats

Sur une feuille de papier uni, schématisez 382×791 *en traçant le moins de lignes possibles ; utilisez le schéma pour trouver le résultat de cette multiplication.*

Ce que vous réalisez par cette activité n'est rien d'autre que la multiplication canadienne (encore d'application parfois actuellement).

Ici, on arrive à l'abstraction. Seuls certains gabarits subsistent. Même la conservation des aires n'existe plus. On a un carré qui représente 100 (par exemple) et un autre qui représente 2, mais peu importe leur aire. Il s'agit d'une schématisation, mais les manipulations antérieures lui ont donné un sens. Il y a aussi passage des gabarits de 100 (10×10) à des entités plus importantes. C'est ainsi que 700×300 donnera directement 210 000. Cette nouvelle étape permet la multiplication écrite avec de grands nombres sans trop de difficultés. Même les multiplications de nombres décimaux à virgule sont aisées (avez-vous trouvé le truc ?).

×	300	80	2	
700	210 000	56 000	1 400	267 400
90	27 000	7 200	180	34 380
1	300	80	2	382
	237 300	63 280	1 582	$\boxed{302\ 162}$

FIG. 11.

Il est à noter que les sommes partielles ont une ressemblance avec les nombres apparaissant dans notre disposition de la multiplication écrite.

$$\begin{array}{r} 791 \\ \times\ 382 \\ \hline 1\ 582 \\ 63\ 280 \\ 237\ 300 \\ \hline 302\ 162 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 382 \\ \times\ 791 \\ \hline 382 \\ 34\ 380 \\ 267\ 400 \\ \hline 302\ 162 \end{array}$$

FIG. 12.

10. La multiplication spaghetti

Vous êtes historien et un peu mathématicien. Vous venez de découvrir un texte dont on ignore l'origine. Les commentaires écrits vous donnent quelques renseignements. Il s'agit de la multiplication de 426 *par* 354*. La méthode donnant le résultat n'est pas inscrite dans le texte. Par contre le dessin de la fig.* 13*, représentant des baguettes disposées de façon particulière, semble être rattaché à la méthode de multiplication.*

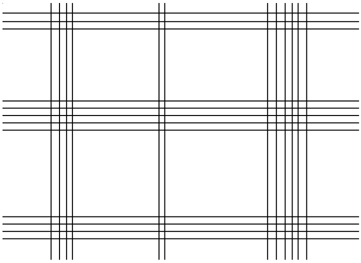


FIG. 13.

Utilisez des spaghettis et essayez de trouver des indices qui permettraient de comprendre la représentation des nombres et cette méthode de multiplication écrite.

Il s'agit déjà d'ouvrir l'esprit à d'autres multiplications et de comprendre la distributivité mise en œuvre dans les différentes multiplications.

Le nombre de baguettes représente les quantités selon notre numération, les 4 baguettes verticales de gauche représentent 400, les deux du milieu 20 et les 6 de droite, 6. La multiplication s'effectue alors facilement en comptant le nombre de croisements et en pratiquant comme les Arabes le faisaient. Pour mieux comprendre, regardez le point suivant qui vous éclairera quant à la réponse.

11. Un peu plus loin dans la multiplication : un peu plus tôt dans le temps, ailleurs dans le monde

Vous avez déjà compris comment fonctionne la multiplication canadienne qui demande davantage d'écriture que notre multiplication écrite (qui est elle inspirée d'une méthode due à Fourier). La multiplication canadienne (activité 9) donne un sens à tous les nombres et n'a rien de mystérieux.

Voici la méthode de multiplication musulmane appliquée au produit 426×354.

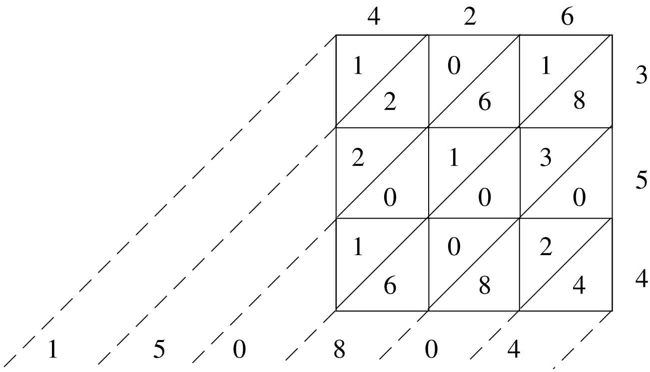


FIG. 14.

La disposition permet également l'utilisation des décimaux à virgule. On trouve un peu plus tard en Europe la disposition de la multiplication dite « per gelosia[1] ». La voici à la fig. 15, toujours appliquée à la multiplication de 426 par 354. Vous constaterez une ressemblance avec la fig. 14… allez vite revoir votre cours d'histoire !

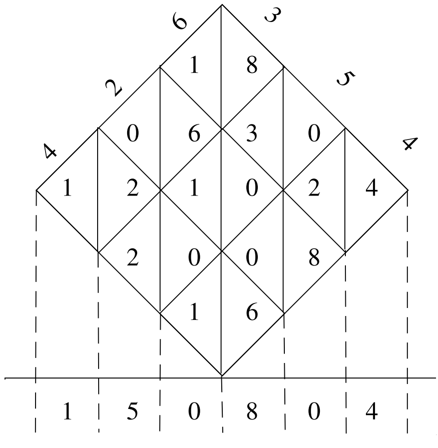


FIG. 15.

Nous laissons à votre perspicacité le soin de découvrir comment ces deux méthodes fonctionnent. Une fois ces méthodes bien comprises, vous ne ferez qu'une bouchée de la multiplication spaghetti, si elle n'est pas encore comprise.

12. Multiplier pour ne pas compter

Si on ne travaille pas sur de grands nombres, pourquoi utiliser l'écriture mutliplicative et la multiplication ? C'est tellement plus facile de dire 2 + 2 + 2. Mais pour dire 21 rangées de 14, l'addition devient embarrassante.

Apprendre à compter est une activité importante lors des deux premières années du primaire. Si l'on décortique un peu la linguistique de la numération, on s'aperçoit que l'on utilise la multiplication dans « quatre-vingts », dans « deux cents », dans « trois mille quatre cents »… Si nous avions une compréhension de la multiplication avant de commencer à compter, la suite des nombres ne serait pas apprise par cœur, mais serait construite à partir de principes permettant de ne retenir qu'un lexique très restreint. D'accord, direz-vous, mais comment apprendre la multiplication sans connaître les nombres ? Si l'on fait 8×4, il faut savoir que cela fait 32… Eh bien non, ce n'est pas nécessaire. Sans savoir compter jusque 32 ni même 36, on peut savoir que 8×4 est plus petit que 6×6. Comment ? C'est ce que vous a montré cet ensemble d'activités.

La démarche qui vous a été proposée ne se centre pas sur les réponses, mais sur le sens même de l'écriture multiplicative. L'écriture multiplicative devient un outil pour appréhender les grands nombres et par là même devient fascinante, donne un pouvoir à celui qui, sans savoir compter, arrive à décrire de grands nombres.

Démarrer la multiplication avec la démarche qui précède permet d'installer des concepts qui lui sont liés et qui sont réinvestissables plus tard : la numération en base 10, la distributivité, le calcul écrit, la représentation géométrique de la multiplication, etc.

Ouvrages de référence :

COLLECTIF, 1987.
COLLETTE, Jean-Paul, 1973.
IFRAH, G., 1985.
IREM de Bordeaux, 1985.
IREM de Dijon, 1981.
LERAY, P., 1980.

Chapitre II

Le jeu de la banquière

On dit que les enfants de Rio non scolarisés sont capables de traduire en n'importe quelle devise toute somme d'argent qu'on leur propose.

Les échanges et les comparaisons sont la base de beaucoup de jeux spontanés dans les cours de récréation et beaucoup d'enfants sont capables d'adapter leurs commerces en fonction des cours fluctuants des billes ou des flippos ou de tout autre objet momentanément fort demandé.

Nous allons vous présenter un jeu vécu dans une classe d'enfants de première et deuxième primaire mélangés. Suivons les découvertes de ces enfants. En jouant, ils auront l'occasion de pratiquer des échanges entre eux, à l'aide de pions de couleurs différentes et de valeurs précisées à l'avance.

Tout d'abord l'institutrice s'assied devant les enfants avec un tas de pions de quatre couleurs et un dé. Elle leur dit qu'elle est la banquière et qu'elle donne autant de pions jaunes qu'il y a de points sur le dé. Quelques enfants, à tour de rôle, lancent le dé et gagnent ainsi autant de jetons jaunes que de points marqués sur le dé. Elle signale aux enfants qu'ils devront jouer ensemble après cette petite introduction et que les pions jaunes pourront être échangés. Elle leur signale tout en l'écrivant au tableau qu'un pion rouge vaut 5 jaunes, qu'un pion vert vaut 5 rouges et qu'un bleu vaut 5 verts. (Ce jeu est proposé dans Ermel, Collectif.)

Avec des jeunes enfants (5-6 ans)

Elle regroupe les plus jeunes, et les plus grands assistent, attentifs et silencieux, aux échanges. Ces plus jeunes sont partagés en deux équipes qui disposent chacune d'un dé.

À tour de rôle, un enfant de chaque équipe lance le dé et demande à la banquière les jetons. Les autres enfants de l'équipe doivent contrôler la demande et intervenir éventuellement pour les échanges à faire.

D'abord quelques jets « pour du beurre ».

Natacha lance le dé pour son groupe et obtient 4.

« Tu as 4 sur ton dé, que peux-tu demander à la banquière ?

– Un jeton rouge ! » répond Natacha.

Les autres réagissent, ils ne sont pas d'accord.

« Regarde au tableau, lui rappela la banquière, que faut-il pour avoir un rouge ?

– 5 jaunes, ah oui ! s'exclame-t-elle, alors tu dois me donner 4 jaunes ! »

La partie commence vraiment et dans les deux équipes les jetons jaunes commencent à s'accumuler. Les enfants sont contents d'en avoir beaucoup. Mais au bout d'un moment le jeu doit s'arrêter car la banquière n'a plus de jetons jaunes ! Et là, ça devient intéressant car la règle des échanges va enfin servir à quelque chose.

« N'oubliez pas qu'on peut faire des échanges, regardez la règle affichée au tableau !

– Eh oui, dit Simon, on a 12 jaunes, on peut avoir des rouges, on peut recevoir 2 rouges à la place des 10 jaunes.

– Et nous on a 3 rouges et 1 jaune », dit un enfant de l'autre équipe.

François observe la situation et s'exclame, déçu :

« Mais ce n'est pas juste, maintenant on a moins de jetons !

– Oui, on en a moins mais ça vaut plus, lui explique Natacha, parce qu'il faut regarder la couleur. C'est la couleur qui a de l'importance ! Celui qui a un bleu, waaa, ça c'est beaucoup ! »

François reste sceptique !

Avec des plus grands (6-7 ans)

Les plus grands, spectateurs jusque-là, prennent la place des plus petits qui vont s'asseoir en amphithéâtre sur les tables. Les joueurs sont partagés cette fois en trois équipes.

Ils ont tout de suite senti la valeur des jetons liée à leur couleur. Il n'y a pas eu de réflexion comme celle de François sur la peur de perdre le gros paquet de jaunes. Au contraire, en avoir beaucoup était le signe qu'on pouvait échanger et les enfants voulaient obtenir bien vite des jetons bleus. Il y a eu du découragement après un certain temps de jeu car on ne gagnait pas assez de jetons avec un dé. Alors, on a mis 2 dés en jeu et la consigne suivante en plus : *Maintenant, on doit annoncer directement les jetons qu'on peut recevoir*.

Une équipe qui avait déjà 2 rouges et 4 jaunes lance les dés et obtient 8. Les enfants de l'équipe discutent avec le lanceur et finissent par dire à la banquière : *Tu ne nous donnes pas les* 8 *jaunes, on t'en donne* 2 *et tu nous rends* 2 *rouges.*

Après une demi-heure de jeu, la banquière constate avec intérêt qu'elle ne doit plus leur donner les pions jaunes pour qu'ils fassent les manipulations nécessaires pour grouper les pions et les échanger. Ce travail se fait mentalement, les enfants ont intégré la règle d'échange dans leur tête et ils deviennent capables de compter sans manipuler.

L'équipe de Simon a devant elle 1 pion vert, 4 rouges et 3 jaunes. Elle obtient 9 avec les dés. Simon prend la parole, sans en parler au reste de son équipe :

« Tu me donnes 1 vert, 1 rouge et 2 jaunes et je te donne nos 3 jaunes et les 4 rouges.

– Êtes-vous tous d'accord dans votre équipe avec la proposition de Simon ? »

Et vous, cher lecteur… ?

Sofia et Tania vérifient en redisposant les pions sur la table, en les recomptant et en reliant avec leurs doigts ceux qu'elles gagnent avec les points sur les dés.

« Oui, on est d'accord ! » concluent-elles.

Après cet échange, la banquière arrête le jeu et elle demande à chaque équipe de comparer sa collection aux autres et de voir quelle équipe a le plus (et pas qui a le plus de jetons), après avoir dessiné au tableau le tas de pions qui se trouve devant chaque équipe.

« C'est l'équipe de Sofia parce qu'elle a 3 verts et 2 jaunes tandis que le groupe de Céline n'a que 3 verts et celui de Naïm n'a qu'un seul vert. Peu importe qui a le plus de jaunes, c'est les verts qui comptent. Et si quelqu'un avait eu un seul bleu, c'était même pas la peine de compter les autres équipes. »

Tout le monde est d'accord avec cette affirmation. La valeur des pièces de différentes couleurs est bien intégrée, plus besoin de tout traduire en pions jaunes, en « unités ». La valeur des pions liée à leur couleur devient une information pertinente qui permet, en un coup d'œil, de voir qu'un tas de pions n'est pas l'autre et ceci indépendamment du nombre de pions.

Avec tous les enfants

On remélange tout le monde en 4 groupes de 4 enfants, petits et grands mélangés. On précise la répartition des tâches dans les groupes : un banquier, deux joueurs, un secrétaire qui note, sur une feuille portant le nom des 2 joueurs, les points tirés successivement par chacun d'eux. Chaque équipe a un tas de pions de couleurs et deux boîtes d'allumettes vides.

• Le 1er joueur lance le dé.

• Le secrétaire note le nombre indiqué par le dé.

• Le banquier donne les jetons.

• Le 1er joueur éventuellement fait des échanges (on est *obligé* d'échanger quand c'est possible).

• Le 2e joueur joue à son tour.

• Et ainsi de suite…

Chaque joueur joue 6 fois et il range ses jetons dans une boîte d'allumettes vide.

Les feuilles des secrétaires seront échangées en fin de partie et une autre équipe devra retrouver, d'après ces feuilles, les jetons gagnés par les joueurs. Ces jetons se trouvent dans la boîte d'allumettes qui servira de vérification après ce travail d'interprétation des feuilles des secrétaires.

Voici un exemple de feuille de secrétaire avec le travail de regroupement qui a été effectué par une autre équipe (fig. 1).

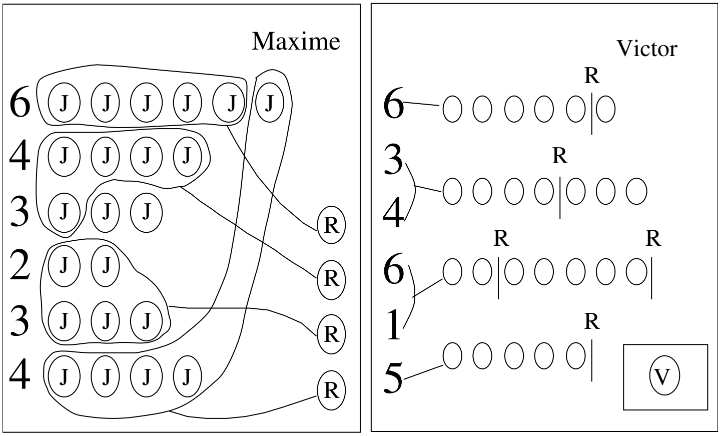


Fig. 1.

Les enfants effectuent des regroupements différents et avant qu'ils se mettent au travail, il leur a été demandé de rendre leur dessin lisible par tous *pour qu'on se rende compte en un coup d'œil de ce qui s'est passé dans leur tête*. Ils savent ainsi qu'ils devront expliquer aux autres comment ils ont procédé avant de pouvoir vérifier si le contenu de la boîte d'allumettes correspond à leurs prévisions.

Dans cette classe, après chaque séance de travail, les enfants se retrouvent au salon (endroit de la classe avec des banquettes et des coussins) où ils se rassemblent avec leurs dessins pour expliquer comment ils ont fait. Les enfants échangent, s'écoutent, mettent des mots sur ce qu'ils font. C'est la partie du travail la plus intéressante, car c'est à partir de là que l'enfant peut enrichir ses procédures. Celui qui est en difficulté trouve, parmi les différentes méthodes montrées, l'une ou l'autre qu'il essayera la prochaine fois. Un autre constatera que son truc à lui est correct, mais que ça met beaucoup de temps et il choisira peut-être une procédure plus rapide vue chez quelqu'un d'autre.

Ce sont ces confrontations sans contrainte de réussite qui font progresser les enfants face aux problèmes ouverts auxquels ils sont confrontés. Mais c'est aussi l'attrait de ce qui est momentanément caché qui pousse les enfants à chercher. Chacun sait qu'il y a des jetons dans la boîte d'allumettes et que tantôt, on va vérifier ! C'est cette certitude qui rend le jeu puissant. On le remarque avec des enfants encore plus jeunes (4-5 ans) en leur présentant trois pions jaunes et deux pions rouges que l'on dépose ensuite dans une boîte à cigares. On leur demande, en refermant le couvercle : « Vous avez vu ce que j'ai mis dans la boîte, essayez maintenant de dessiner ce que vous croyez qu'il y a dans cette boîte, on vérifiera après. » Et ils se mettent directement à dessiner. C'est là que réside tout l'intérêt de l'école : on peut prendre le temps d'abstraire, de dessiner ce qu'on a dans la tête, de voir mentalement ce qui n'est pas visible, mais que l'on imagine. C'est, plus tard, ce que l'on fera quand on passera du comptage manuel au comptage mental, quand on trouvera des procédés qui permettent, grâce à l'activité mentale, de ne plus devoir passer par l'activité manuelle. Dessiner permet en une fois de passer des objets à la représentation de ceux-ci. Et faire des maths avec des petits, c'est travailler leurs représentations en les multipliant, en les diversifiant, en les simplifiant.

Ceci dit, si vous aviez été en classe et que vous aviez tiré aux dés un 6 puis un 5, puis un 3, puis un 2, puis un 4, puis encore un 3, combien de jetons et de quelle couleur y aurait-il dans votre boîte d'allumettes ? Dessinez comment vous y arrivez. À vous de jouer. Pas mal, hein…

Si vous trouvez cela futile, jouez-le avec d'autres règles de conversions (1 bleu = 7 verts ; 1 vert = 6 rouges ; 1 rouge = 5 jaunes) et avec deux dés en même temps. Ou bien demandez-leur comment ils s'y prennent pour échanger leurs billes ? À peu de choses près, on risque de se retrouver dans le cas du commerçant anglais d'antan pour lequel la livre sterling était divisée en 20 shillings de 12 pence chacun. Et comment faisaient-ils pour vendre et rendre la monnaie ? Pas si futile que cela, non ?

Ouvrage de référence :

ERMEL, *Apprentisages numériques à l'école élémentaire*, Éd. Sermap – Hatier.

Chapitre III

Voir dans sa tête

La fig. 1 pourrait représenter une vue aérienne d'un complexe d'habitations lorsque le soleil est en haut sur la gauche. Il ne s'agit pas en soi d'une situation mathématique. On peut cependant se poser une série de questions qui font de cette image une source de problèmes dont les réponses peuvent mettre en jeu des représentations et un langage mathématiques. Imaginons donc…

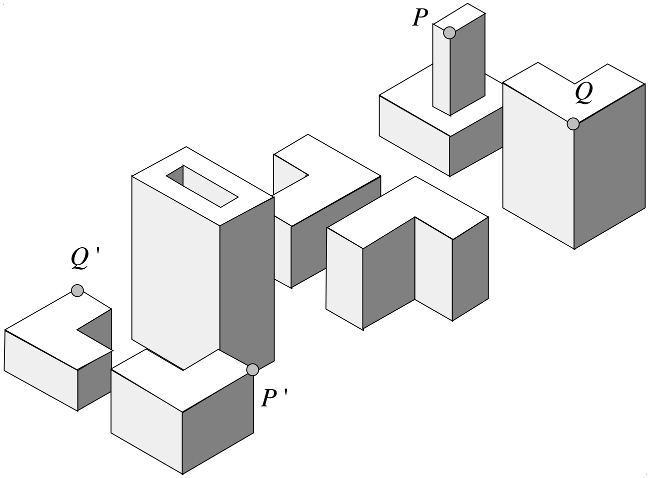


FIG. 1.

1. Juliette et Roméo

Une personne se trouvant au sommet d'une tour, en P, peut-elle voir quelqu'un en P' ?

La même question peut se poser à propos des points Q et Q' situés comme l'indique la fig. 1 *?*

Comment vous y prendriez-vous ? Vous avez une solution ? Très bien, le reste de cette section ne vous apprendra pas grand chose. Dans le cas contraire, voyons ce qu'il est possible de trouver.

Une première idée intuitive se fera pour chacun d'après la représentation. Certains penseront que *P* verra *P*', d'autres se diront que l'immeuble avec une ouverture centrale empêchera les deux personnes de se voir. Essayons…

Cela paraît bien compliqué ! Si on parlait d'autre chose… On pourrait se demander :

Quel est le volume des immeubles représentés sur la situation de la fig. 1 *?*

Il nous faut alors encore imaginer, car les informations de l'image sont insuffisantes. Représentons-nous des appartements cubiques avec de grandes fenêtres carrées sur la totalité des murs extérieurs. De tels immeubles modernes sont généralement utilisés comme bureaux et peuvent se voir dans toutes les grandes villes. Voici à la fig. 2 comment les représenter. En comptant les cubes que l'on imagine derrière les fenêtres *(vous avez compté ? Le résultat devrait être compris entre* 300 *et* 400*, être un multiple de* 3 *et n'est composé qu'à partir de* 2 *chiffres…)*, on peut alors savoir le volume des buildings. Et il n'est nullement besoin de faire de calculs à partir de formules ! On peut également répondre facilement à une nouvelle question :

Quelle est la superficie sur laquelle les buildings sont construits ?

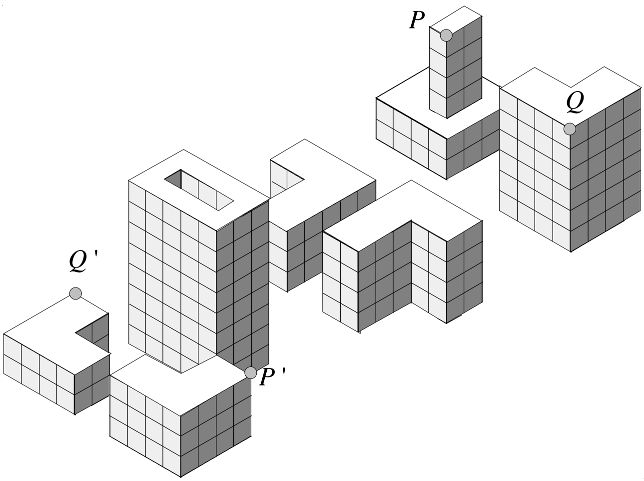


FIG. 2.

Tout comme on imagine des fenêtres aux immeubles, on peut songer à dessiner des dalles carrées décorant le sol. Ce qui donne une représentation comme sur une des fig. 3 ci-dessous.

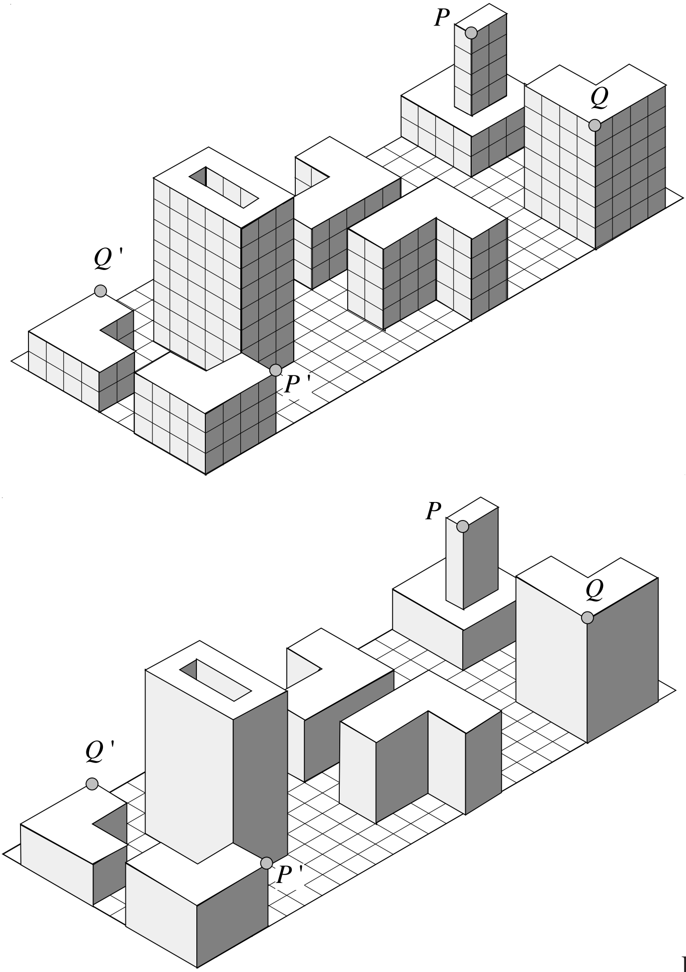


FIG. 3.

Une fois que nous avons un tel système de repérage, il devient un peu plus facile de répondre à la première question que nous avions abandonnée un moment. Ça aide parfois d'aller voir « à côté » d'un problème. Rappelons la première préoccupation : du point *P*, voit-on le point *P*' ?

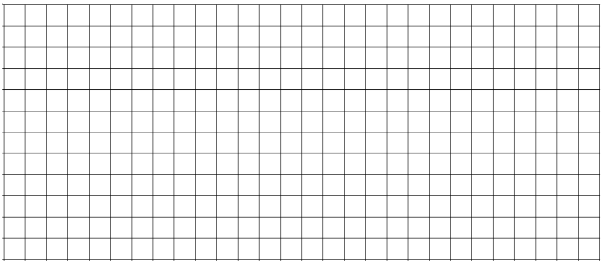


FIG. 4.

Pour y répondre il est utile de changer de point de vue, de transformer la vue aérienne oblique en vue d'en haut, à la verticale des immeubles. Voulez-vous essayer ? La fig. 4 peut vous y aider, le carrelage du sol y est représenté. Vous devez arriver à une représentation telle que celle de la fig. 5 ci-dessous.

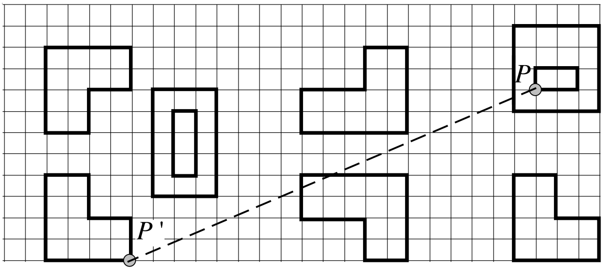


FIG. 5.

En joignant les points *P* et *P*', on constate que la ligne de vue passe par dessus un bloc d'immeubles. Tout va donc dépendre de la hauteur de cet immeuble. Il est donc nécessaire de recourir à une deuxième vue, de face. La grille de la fig. 6 représentant des carreaux vous permet de dessiner le profil des immeubles vus de face. La fig. 7 représente ce que vous devez obtenir.

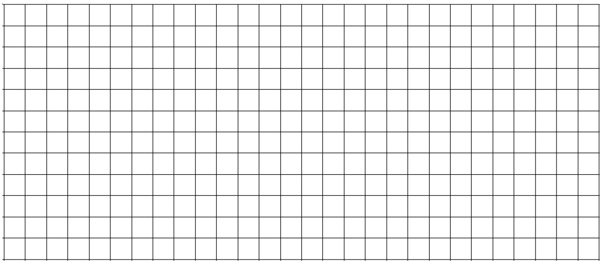


FIG. 6.

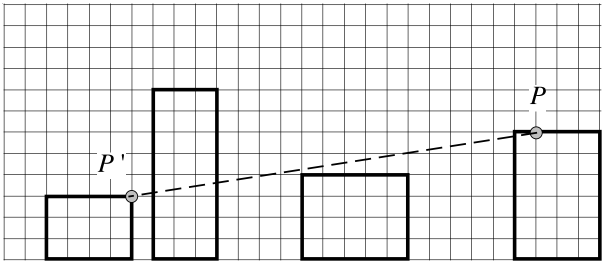


FIG. 7.

On en conclut donc que *P* verra *P*', car la ligne de visée passe en dehors des immeubles, se situant entre eux. Qu'en est-il pour *Q* et *Q*' ? À vous de jouer.

Pour répondre à la question imaginée, nous avons utilisé des grilles permettant de visualiser des objets de l'espace sur une feuille de papier en utilisant une *projection*. Vous pourriez jouer à un petit jeu de devinette en utilisant des cubes en bois ou en plastique, des « lego »…

2. Pas besoin d'être maçon pour construire

Construisez des modules à l'aide de cubes. Les modules doivent être sans « creux cachés », c'est-à-dire que toutes les colonnes (les tours) doivent pouvoir toucher le sol, comme l'illustre la fig. 8*, mais non la fig.* 9*.*

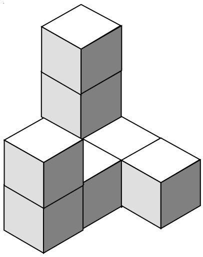


FIG. 8.

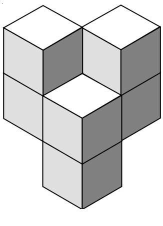


FIG. 9.

Représentez vos constructions sur une trame comme celles des fig. 10 *et* 11. *Démontez votre construction et passez votre dessin et les cubes à quelqu'un. Demandez-lui de reconstruire ce que vous aviez fait à partir de votre représentation. Confrontez les résultats.*

Les fig. 3 et la fig. 12 montrent comment exploiter les trames en utilisant la situation de départ avec les buildings.

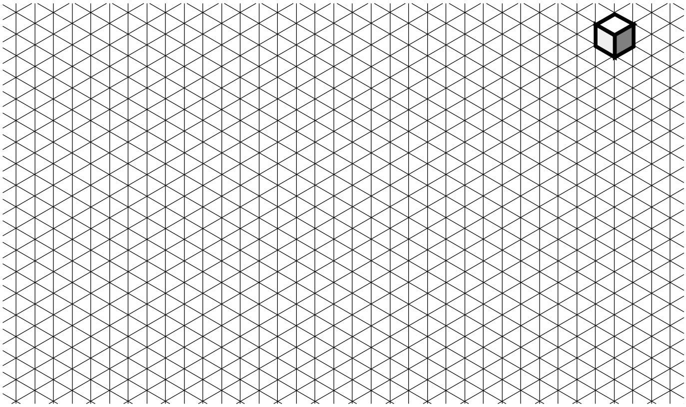


FIG. 10.

En ne gardant que les points d'intersection on obtient la fig. 11.

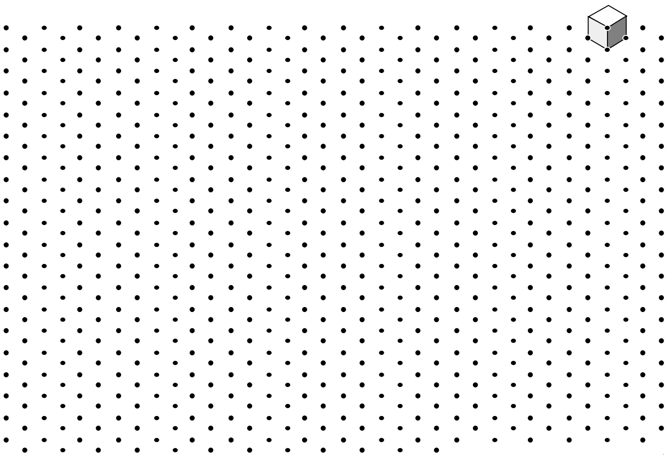


FIG. 11.

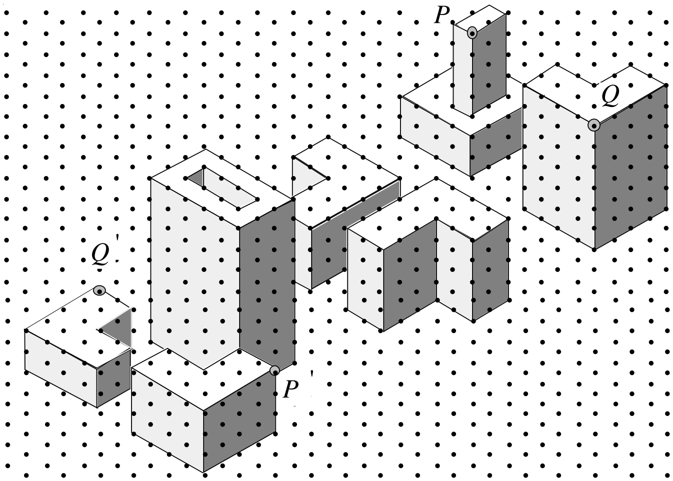


FIG. 12.

Un type de codage particulier peut être utilisé afin de rendre compte de la hauteur des tours lorsque la vue est verticale. On note la hauteur des tours sur une projection identique à celle de la fig. 4. Cette façon de faire est illustrée à la fig. 13.

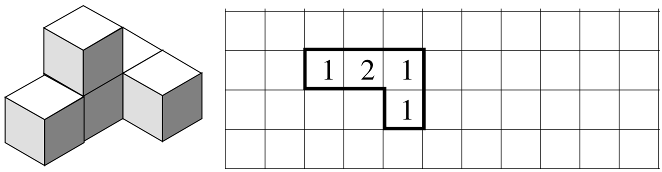


FIG. 13.

3. À coudre ou à la patte…

Pour terminer, voici un message à la fig. 14*. Essayez de l'imaginer avant de le dessiner sur une trame identique à celle de l'activité précédente, et le titre s'éclairera.*

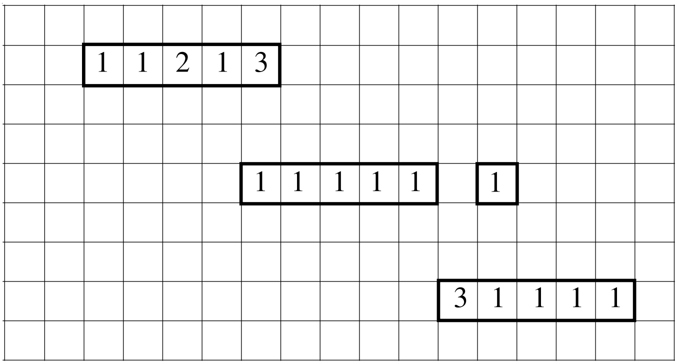


FIG. 14.

Essayez également de coder une de vos constructions en cubes selon le principe de la fig. 13 *et recommencez l'expérience précédente de faire reconstruire le même objet à partir de votre codage.*

Pouvoir ainsi représenter sur une feuille des objets en trois dimensions est une façon de voir dans sa tête, de communiquer des informations…

Chapitre IV

Trafic et graphiques

Sur un graphique, on voit sans calculer, on a une vue d'ensemble que ne permettent pas les longues listes de nombres.

Derrière les graphiques envisagés dans ce chapitre, il y a des trains, des gares, des horaires, tout un trafic quoi.

1. Graphique horaire.

1. 1. *La fig.* 1 *est un fragment de graphique utilisé dans un centre de dispatching des chemins de fer. Observez-le. Interprétez-le. À quoi peut-il servir ?*

1. 2. *Que représentent les segments qui montent de gauche à droite ? Qui descendent de gauche à droite ?*

1. 3. *Comment voir sur le graphique qu'un train va plus vite qu'un autre ? Repérez un train qui va vite. Quelle est sa vitesse moyenne entre deux grandes villes ? Et sa vitesse maximale ?*

1. 4. *Les trains ne peuvent se suivre de trop près. Quelle est la plus courte distance observée, sur le document, entre deux trains qui se suivent ?*

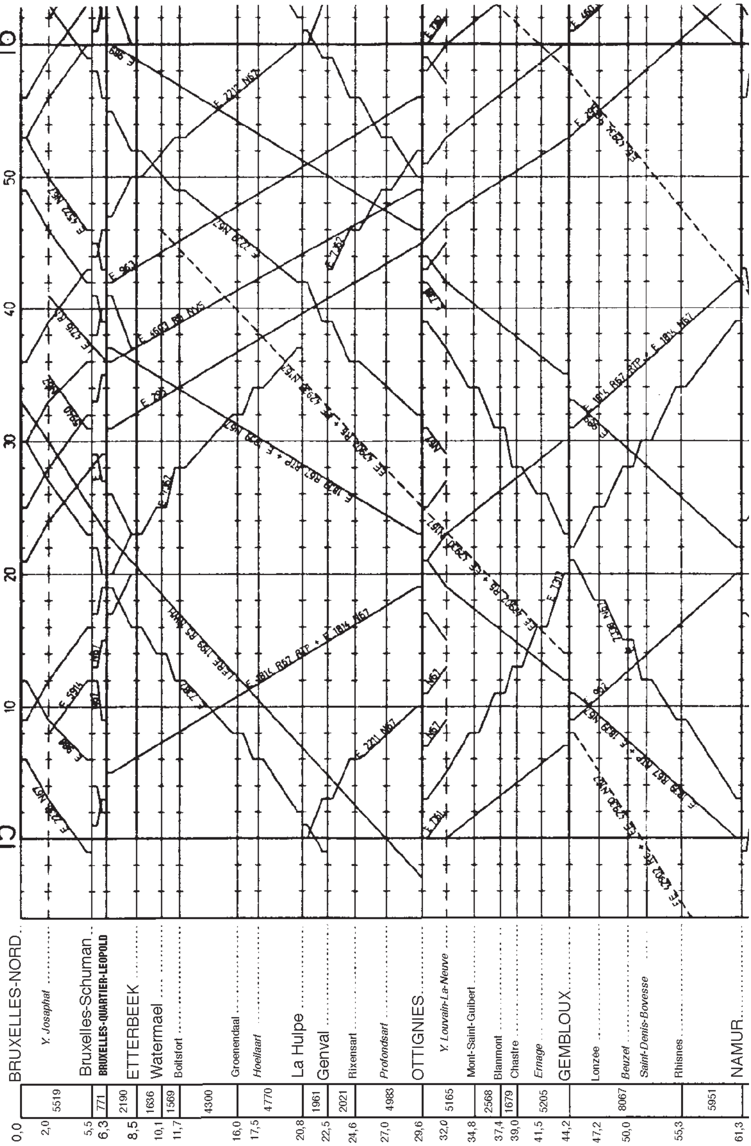

15
16
BRUXELLES-NORD
Y. Josaphat
Bruxelles-Schuman
BRUXELLES-QUARTIER-LEOPOLD
ETTERBEEK
Watermael
Boitsfort
Groenendaal
Hoeilaart
La Hulpe
Genval
Rixensart
Profondsart
OTTIGNIES
Y. Louvain-La-Neuve
Mont-Saint-Guibert
Blanmont
Chastre
Ernage
GEMBLOUX
Lonzée
Beuzet
Saint-Denis-Bovesse
Rhisnes
NAMUR

FIG. 1.

1. 1. *Qu'est-ce que c'est ? On n'y comprend rien.*

• Les heures apparaissent au dessus ❶ (les numéros renvoient à la fig. 2), sur un axe horizontal (quand on parle de « vertical et d'horizontal » sur ce graphique, on se comprend : on s'exprime comme si le graphique était affiché sur un mur vertical).

• Verticalement, à gauche, on a indiqué les distances en kilomètres, à partir de Bruxelles-Nord ❷. Juste à côté, en mètres, on a les distances entre deux gares successives.

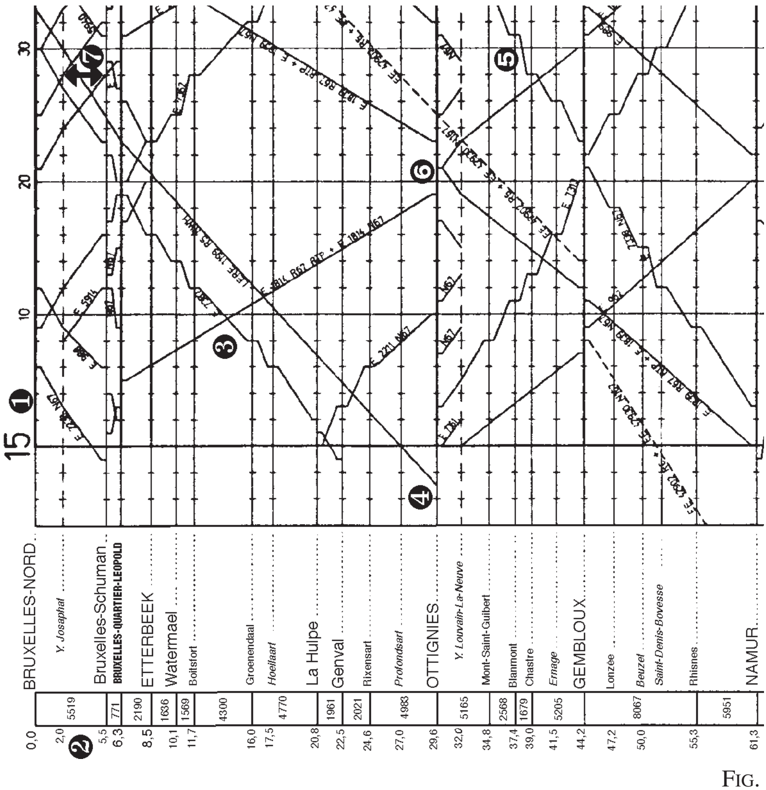


FIG. 2.

1. 2. *Mais alors…*

• Les lignes qui descendent représentent des trains ❸ qui vont de Bruxelles vers Namur et celles qui montent, des trains ❹ qui vont de Namur vers Bruxelles.

• Un petit trait vertical ❺ marque un arrêt. C’est court pour un omnibus, moins d’une minute, juste le temps que les passagers montent ou descendent.

• Un petit trait horizontal ❻ marque également un arrêt. C’est plus logique, le temps s’écoule et le train reste au même endroit.

• Mais alors, un petit trait vertical, ça représente un train qui parcourt une certaine distance en un temps nul. C’est pas possible !

• C’est vrai. Cela ne correspond peut-être pas à la réalité, mais c’est commode pour la lecture de l’heure d’arrivée dans la gare.

• Il y a beaucoup d’autres choses qu’on ne comprend pas sur ce graphique, il y des numéros, des trajectoires en pointillé…

• Eh ! Ho ! Ce ne sont pas des trajectoires. Les lignes du graphique représentent les positions des trains en fonction du temps, c’est un graphique horaire. Tandis que la trajectoire est la même pour tous, c’est la ligne Bruxelles-Namur parcourue dans un sens ou dans l’autre. Les numéros composés de lettres et de chiffres caractérisent les trains. Une indication comme « R5 » signifie que le train ne roule que le vendredi. Par contre « N56 » signifie que le train ne roule pas le samedi et le dimanche. Les pointillés sont associés à des engins de traction se déplaçant sans convoi.

• Le graphique sert à la régulation du trafic ferroviaire sur la ligne en question : contrôle des horaires, gestion des retards, insertion de trains supplémentaires… Mais pourquoi les dispatchers utilisent-ils un graphique et non un indicateur avec le relevé précis des heures ?

• Parce que c’est beaucoup plus facile sur le graphique, on voit mieux, on a une vue d’ensemble.

1. 3. *Et la vitesse ?*

• Pour une distance donnée, plus le temps mis est court et plus le train va vite. Autrement dit plus la ligne se rapproche d’une verticale et plus le train va vite. Le train E1814 ❸ par exemple, est à Bruxelles-Quartier-Léopold à 15 h 05 et à Namur à 15 h 42 (voir fig. 1), c’est-à-dire 37 minutes plus tard. La distance qui sépare les deux gares est de 61,3 – 6,3 = 55 km.

En 37 minutes, il a parcouru 55 km ;

en 1 minute, il aurait parcouru $\frac{55}{37}$ km ;

en 1 heure ou 60 minutes, il aurait parcouru

$$\frac{55}{37} \times 60 \cong 89,2 \ \text{km}$$

Sa vitesse moyenne est donc de 89,2 km/h.

• On peut calculer directement la vitesse en divisant l'espace parcouru par le temps écoulé. Pour le train E1814, c'est entre Bruxelles-Quartier-Léopold et Ottignies qu'il est le plus rapide.

Il parcourt 23,3 km en $\frac{14}{60}$ d'heure, sa vitesse vaut

$$\frac{23,3}{\frac{14}{60}} = 23,3 \times \frac{60}{14} \cong 99,9 \, \text{km/h}$$

• Oui mais ce n'est pas la vitesse maximale. Pour faire le graphique, on a chaque fois supposé que la vitesse était constante entre deux gares. Ce n'est pas réaliste. Après un arrêt, le train démarre lentement, accélère, atteint une certaine vitesse qu'il garde un certain temps avant de décélérer à l'approche de l'arrêt suivant. On devrait plutôt faire un graphique comme celui de la fig. 3. La vitesse maximale est certainement supérieure à 99,9 km/h.

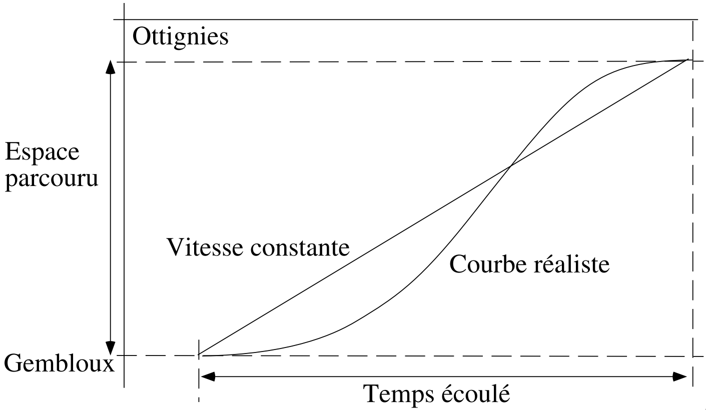


FIG. 3.

Quand on suppose que la vitesse est constante entre deux gares, c'est plus facile. La ligne associée au train est droite, tandis qu'en réalité elle est courbe. En plus, quand le graphique de l'espace parcouru en fonction du temps est une droite (ou un morceau de droite), on voit que la vitesse qui est le rapport de l'espace parcouru sur le temps écoulé est aussi la pente de cette droite.

• Ah oui ! Quand la vitesse est constante, la pente du graphique de l'espace en fonction du temps correspond à cette vitesse.

1. 4. *Si on en venait au problème de la distance entre deux trains ?*

•Attention, on a dit distance. Et les distances s'observent verticalement. Horizontalement, ce sont les temps.

• Prenons deux trains qui semblent se suivre d'assez près, le E295 et le E4603, entre Bruxelles-Nord et Bruxelles-Schuman ❼. Le vendredi, ils roulent tous les deux. À 15 h 28, le premier est à Y. Josaphat et l'autre à Bruxelles-Schuman. La distance est donc de 3,5 km.

2. Attention, un train peut en cacher un autre

Éclaircissez les situations entourées sur la fig. 4.

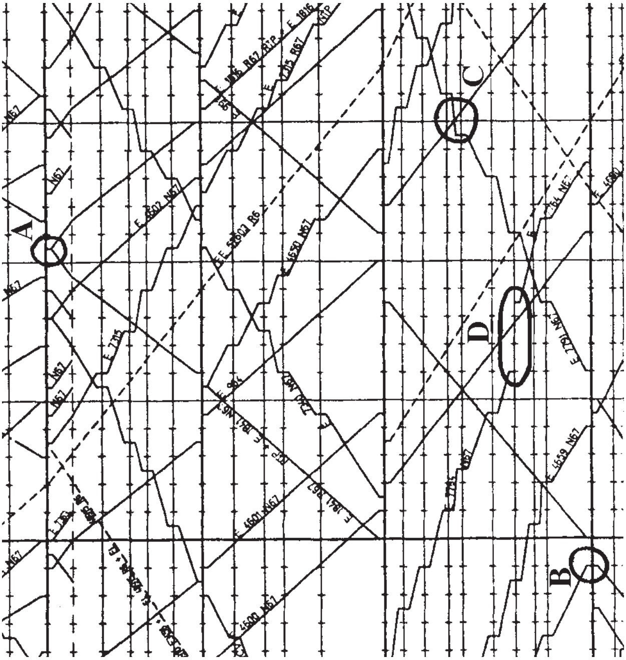


FIG. 4.

A : Ce n’est pas un train qui arrive en gare puis part en sens inverse, mais un train qui arrive en gare alors qu’un autre part dans le sens contraire.

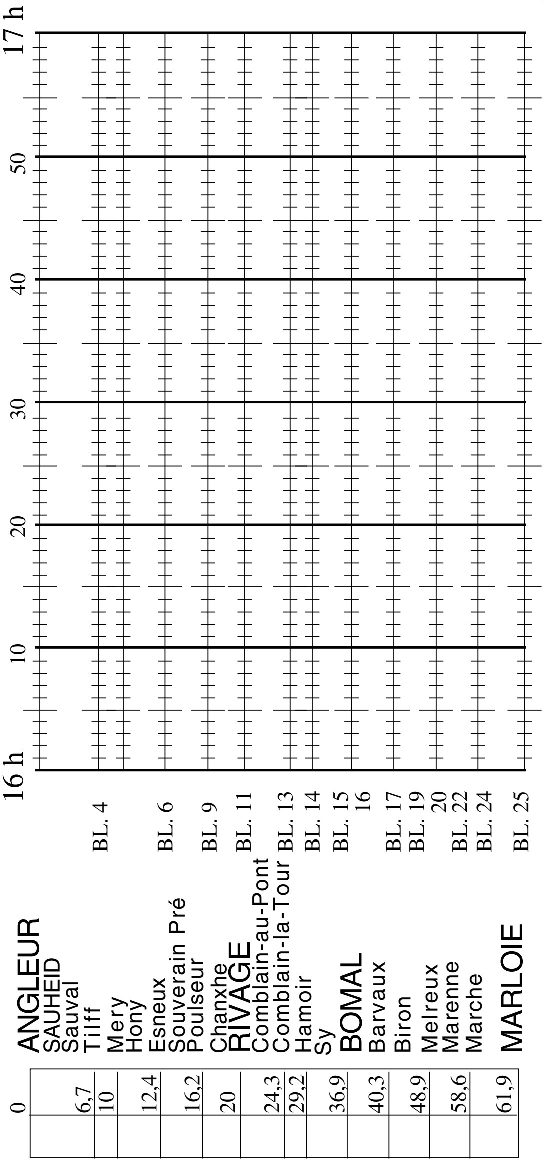
B : Ce n’est pas un train qui arrive en gare puis qui remonte le temps pour aller en sens contraire, mais deux trains qui arrivent ensemble en venant de sens contraires.

C : Ce n’est pas un croisement de trajectoire, ni une collision frontale mais deux trains qui sont au même endroit au même moment dans des sens contraires sur des voies parallèles.

D : Ce n’est pas un train qui enjambe l’autre, mais un train qui dépasse un autre, à l’arrêt, en gare.

3. De l’indicateur au graphique

Quand il n’y a pas de problèmes sur une ligne, le graphique horaire correspond à l’indicateur. Complétez le graphique de la fig. 5 *correspondant aux deux pages de l’indicateur du tableau* 1*.*



17 h
50
40
30
20
10
16 h
BL. 4
BL. 6
BL. 9
BL. 11
BL. 13
BL. 14
BL. 15
16
BL. 17
BL. 19
20
BL. 22
BL. 24
BL. 25
ANGLEUR
SAUHEID
Sauval
Tilff
Mery
Hony
Esneux
Souverain Pré
Poulseur
Chanxhe
RIVAGE
Comblain-au-Pont
Comblain-la-Tour
Hamoir
Sy
BOMAL
Barvaux
Biron
Melreux
Marenne
Marche
MARLOIE
0
6,7
10
12,4
16,2
20
24,3
29,2
36,9
40,3
48,9
58,6
61,9

FIG. 5.

km		P 4640 Ⓐ	L 7213	P 4441 Ⓐ	IR 139 2	IR 139 3	P 4641 Ⓐ	L 7215	P 4442 Ⓐ	IR 141 2	IR 141 3	L 7217	IR 2295 2	IR 2295 3	L 7219
	Bruxelles- Midi-Zuid			*1518*	*1548*	*1548*			*1703*	*1748*	*1748*		*2048*	*2048*	
	Brussel Nord-Noord			*1529*	*1557*	*1557*			*1715*	*1757*	*1757*		*2057*	*2057*	
	Liège-Palais	1517	*1600*	1635	Ⓐ*1641*	Ⓐ*1641*	1708	*1800*	1822	Ⓐ*1841*	Ⓐ*1841*	*2000*	*2200*	*2200*	*2200*
0	**Liège-Guillemins**	1525	1617	1648	**1705**	**1705**	1717	1817	1830	**1905**	**1905**	2017	**2212**	**2212**	2217
3	Angleur	1530	1622	1653	**1710**	**1710**	1722	1822	1838	**1910**	**1910**	2022	**2217**	**2217**	2222
10	Tilff	1537	1629	1700	|	|	1729	1829	1845	|	|	2029	|	|	2229
14	Hony	1542	1634	1705	|	|	1734	1834	1851	|	|	2034	|	|	2234
15	Esneux	1545	1637	1708	|	|	1737	1837	1854	|	|	2037	|	|	2237
19	Poulseur	1550	1643	1714	**1725**	**1725**	1743	1843	1858	**1925**	**1925**	2043	**2232**	**2232**	2243
23	**Rivage** O	1554	1647	1718	|	|	1747	1847	1902	|	|	2047	|	|	2247
0	**Rivage**	1555	1648				1748	1848				2048			2248
1	Comblain-au-Pont	1557	1650				1750	1850				2050			2250
4	Comblain-la-Tour	1601	1654				1754	1854				2054			2254
9	Hamoir	1606	1659				1759	1859				2059			2259
13	Sy	1610	1703				1803	1903				2103			2303
17	Bomal	1614	1707				1807	1907				2107			2307
20	Barvaux	1621	1714				1814	1914				2114			2314
29	**Melreux-Hotton**	1629	1722				1822	1922				2122			2322
38	Marche-en-Famenne	1639	1731				1831	1931				2131			2331
42	**Marloie** O	1643	1735				1835	1935				2135			2335
	Namur O	*1722*	*1822*				*1922*	*2022*				*2222*			
	Luxembourg O		*1910*				*2010*								
0	**Marloie**	1644	1740				1836	1936				2136			2336
7	**Jemelle** O	1650	1746				1842	1942				2142			2342
0	**Rivage**			1801	|	|			1903	|	|		|	|	
8	**Aywaille**			1810	**1737**	**1737**			1911	**1937**	**1937**		**2244**	**2244**	
11	Remouchamps			|	**1741**	|			|	**1941**	|		**2248**	|	
35	Trois-Ponts			1832	**1758**	**1758**			1933	**1958**	**1958**		**2305**	**2305**	
41	Grand-Halleux			1839	|	|			1940	|	|		|	|	
47	Vielsalm			1845	**1810**	**1810**			1946	**2010**	**2010**		**2317**	**2317**	
54	Bovigny			1852	|	|			1953	|	|		|	|	
58	**Gouvy** O			1856	**1820**	**1820**			1957	**2020**	**2020**		**2327**	**2327**	
	Troisvierges O				**1833**	**1833**				**2031**	**2031**				
	Ettelbrück O				**1916**	**1916**				**2107**	**2107**				
	Luxembourg O				**1951**	**1951**				**2134**	**2134**				

1 Ⓐ du 9.VI au 1.IX.84. Ⓒ du 1.VII au 2.IX.84. Ne circule pas le 15.VIII.84.
2 Circule du 3.VI au 29.IX.84.
3 Circule du 30.IX.84 au 1.VI.85.
4 Accessible aux abonnés sociaux à la semaine

km		INT 1138 ⊕ 6	IR 136 2 7	IR 136 3	IR 136 ⊙ 2 6	L 7241	T 9955 ⊙ ☼	IR 138 2	IR 138 3	L 7243	IR 140 2	IR 140 3	L 7245
	Luxembourg	16 02	18 08	16 08	16 15		17 09	18 08	18 08		20 11	20 11	
	Ettelbrück	16 28	16 32	16 32	16 39			18 32	18 32		20 33	20 33	
	Troisvierges	17 05	17 10	17 10	17 17		18 10	19 10	19 10		21 10	21 10	
0	**Gouvy**	17 17	17 22	17 22	17 29		18 33	19 22	19 22		21 22	21 22	
4	Bovigny	|	|	|	|		|	|	|		|	|	
11	Vielsalm	17 28	17 33	17 33	17 41		18 47	19 33	19 33		21 33	21 33	
17	Grand-Halleux	|	|	|	|		18 54	|	|		|	|	
23	Trois-Ponts	17 41	17 45	17 45	17 52		19 02	19 45	19 45		21 45	21 45	
47	Remouchamps	|	18 01	|	18 08		19 21	20 01	|		22 01	|	
50	Aywaille	18 03	18 06	18 06	18 13		19 25	20 06	20 06		22 06	22 06	
58	**Rivage** O	|	|	|	|		|	|	|		|	|	
0	**Jemelle**					18 00				20 00			22 00
7	**Marloie** O					18 07				20 07			22 07
	Luxembourg												
	Namur					*17 20*				*19 20*			*21 20*
0	**Marloie**					18 08				20 08			22 08
4	Marche-en-Famenne					18 13				20 13			22 13
13	Melreux-Hotton					18 21				20 21			22 21
22	Barvaux					18 30				20 30			22 30
25	Bomal					18 34				20 34			22 34
29	Sy					18 38				20 38			22 38
33	Hamoir					18 43				20 43			22 43
38	Comblain-la-Tour					18 48				20 48			22 48
41	Comblain-au-Pont					18 52				20 52			22 52
42	**Rivage** O					18 54				20 54			22 54
0	**Rivage**	|	|	|	|	18 55	|	|	|	20 55	|	|	22 55
4	Poulseur	|	18 18	18 18	18 24	19 01	19 37	20 18	20 18	21 01	22 18	22 18	23 01
8	Esneux	|	|	|	|	19 06	|	|	|	21 06	|	|	23 06
9	Hony	|	|	|	|	19 08	|	|	|	21 08	|	|	23 08
13	Tilff	|	|	|	|	19 13	|	|	|	21 13	|	|	23 13
20	Angleur	|	18 33	18 33	18 39	19 21	19 52	20 33	20 33	21 21	22 33	22 33	23 21
23	**Liège-Guillemins** O	5 18 32	18 37	18 37	18 43	19 25	8 19 56	20 37	20 37	21 25	22 37	22 37	23 25
	Liège-Palais O	*18 47*	*19 01*	*19 01*	*19 01*	*19 42*	*20 11*	*21 01*	*21 01*	*21 42*	*23 01*	*23 01*	
	Bruxelles- Nord-Noord O	*19 44*	*19 44*	*19 44*	*20 13*		*21 13*	*21 44*	*21 44*				
	Brussel Midi-Zuid O	*19 53*	*19 53*	*19 53*	*20 24*		*21 24*	*21 53*	*21 53*				

TABL. 1 et 2.

1 Voir tableau 31
2 Circule du 3.VI au 29.IX.84.
3 Circule du 30.IX.84 au 1.VI.85.
4 Accessible aux abonnés sociaux à la semaine.
5 Voir tableau 32
6 ⊕ du 9.VI au 1.IX.84. ⊙ du 1.VII au 2.IX.84. Ne circule pas le 15.VIII.84.
7 ⊕ du 9.VI au 1.IX.84; ⚒ du 1.VII au 2.IX.84. Circule le 15.VIII.84.
8 Voir tableaux 32, 16, 14, 15

À la fig. 6, on a représenté les trois seuls trains correspondant à la tranche horaire reprise.

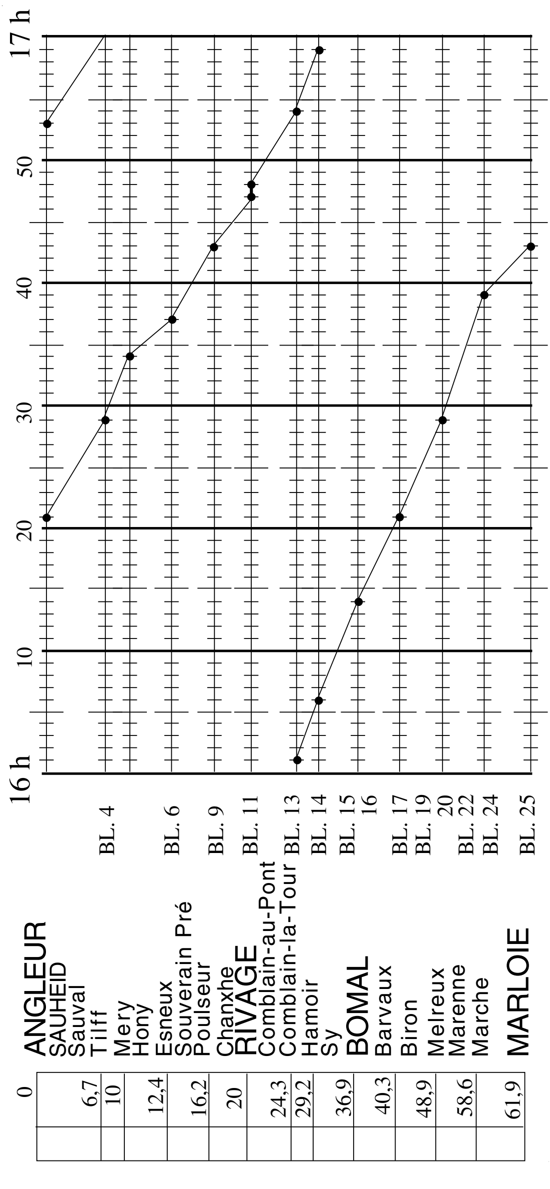

16 h
10
20
30
40
50
17 h
BL. 4
BL. 6
BL. 9
BL. 11
BL. 13
BL. 14
BL. 15
16
BL. 17
BL. 19
20
BL. 22
BL. 24
BL. 25
ANGLEUR
SAUHEID
Sauval
Tilff
Mery
Hony
Esneux
Souverain Pré
Poulseur
Chanxhe
RIVAGE
Comblain-au-Pont
Comblain-la-Tour
Hamoir
Sy
BOMAL
Barvaux
Biron
Melreux
Marenne
Marche
MARLOIE
0
6,7
10
12,4
16,2
20
24,3
29,2
36,9
40,3
48,9
58,6
61,9

FIG. 6.

4. Dans la peau du dispatcher

Une cargaison périssable doit être transportée de Namur à Bruxelles Nord le plus vite possible. La vitesse maximale du convoi est de 80 km/h. Il se trouve à 15 *heures à Namur. Travaillez sur la fig.* 1*, en y insérant convenablement le train.*

Laissons passer deux trains avant de démarrer. À 15 h 06, on y va. On peut dessiner un segment dont la pente correspond à la vitesse maximale de 80 km/h. De Namur à Gembloux, la distance est de 17,1 km ; à la vitesse de 80 km/h, cela prend

$$\frac{17{,}1}{80} \text{ ou à peu près 0,21 heure ou 12,8 minutes.}$$

Aucun trait du graphique caractérisant le train à insérer ne peut avoir une pente supérieure à ce segment. À la fig. 7, on a représenté une solution en veillant, de surcroît, à garder une certaine distance entre les trains.

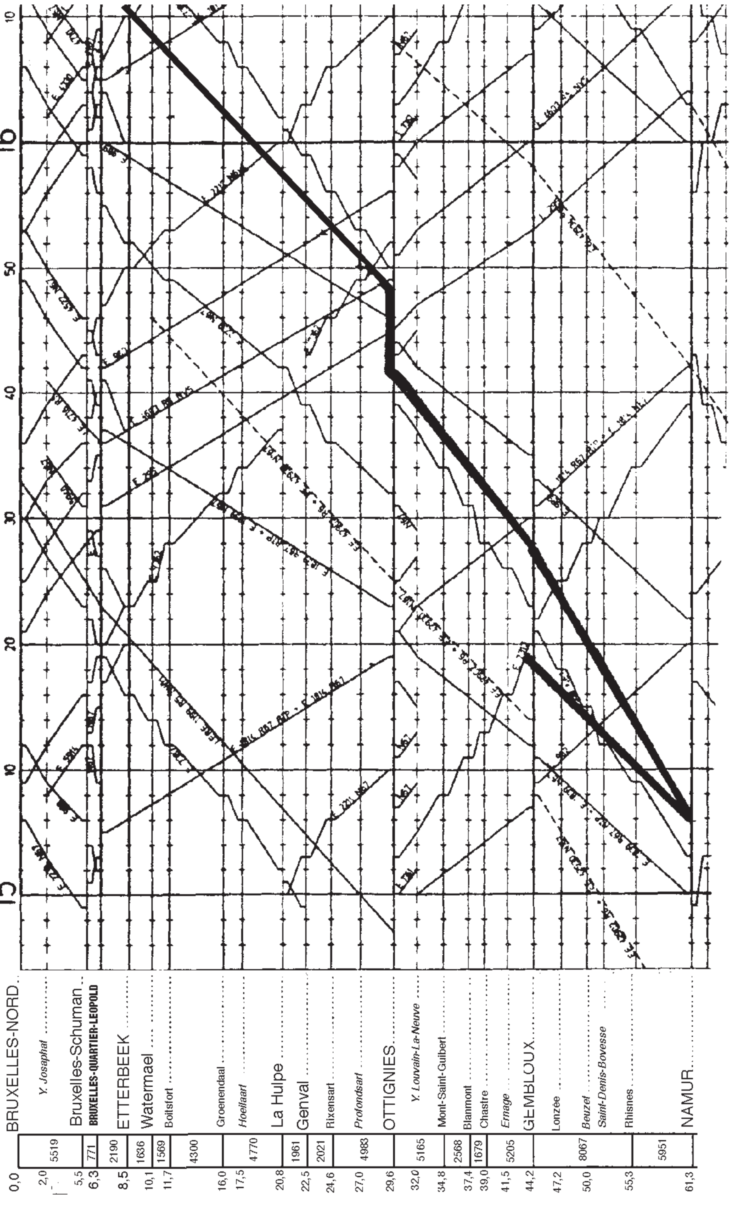

15
16
BRUXELLES-NORD
Y. Josaphat
Bruxelles-Schuman
BRUXELLES-QUARTIER-LEOPOLD
ETTERBEEK
Watermael
Boitsfort
Groenendaal
Hoeilaart
La Hulpe
Genval
Rixensart
Profondsart
OTTIGNIES
Y. Louvain-La-Neuve
Mont-Saint-Guibert
Blanmont
Chastre
Ernage
GEMBLOUX
Lonzée
Beuzet
Saint-Denis-Bovesse
Rhisnes
NAMUR
0,0
2,0
5,5
6,3
8,5
10,1
11,7
16,0
17,5
20,8
22,5
24,6
27,0
29,6
32,0
34,8
37,4
39,0
41,5
44,2
47,2
50,0
55,3
61,3
5519
771
2190
1636
1569
4300
4770
1961
2021
4983
5165
2568
1679
5205
8067
5951

FIG. 7.

5. Pas un, mais des graphiques

À la fig. 1, ce n'est pas un, mais finalement une multitude de graphiques qui apparaissent sur le même dessin. Chaque graphique caractérise un train. Chaque graphique donne une vue globale de tous les passages en gare de ce train, des arrêts. Il permet de déterminer le sens de déplacement et la vitesse. Le dessin entier donne une vue globale de tout le trafic d'une tranche horaire, permet de visualiser les rencontres, les dépassements, de comparer les vitesses, de procéder à des insertions.

Derrière les graphiques, il y a des axes ou un repère ; à chaque point du plan du dessin, correspond un temps et une position pouvant s'exprimer l'un et l'autre par des nombres. À chaque point correspond donc un couple de nombres. À un graphique, on peut associer un tableau de couples de nombres liés à certains points du graphique (c'est ce que fait l'indicateur). À un petit tronçon où on suppose que le train roule à vitesse constante, on peut également associer une formule que vérifient les couples de nombres.

Graphique, tableau et formule sont trois moyens utilisés en mathématiques pour caractériser un même concept, celui de fonction. Un concept porteur, à faire rencontrer aux plus jeunes dans des contextes stimulants. Sans oublier que pour « voir dans sa tête », rien de tel qu'un graphique.

PARTIE II

Oh, moi les maths…

Chapitre V

Les idées qu'on se fait des mathématiques

> « Il était jeune, assez bien fait,
> assez gai, quoique mathématicien. »
> FONTENELLE.

On a rassemblé ici, en les entrecoupant de commentaires critiques, un certain nombre de vues, d'opinions, d'idées reçues, de lieux communs sur les mathématiques. Cet inventaire, à coup sûr incomplet, a été conçu comme un outil de travail pour chercher des réponses aux questions suivantes : Si ce sont là les idées qu'on se fait des mathématiques, d'où viennent-elles ? Qu'est-ce qu'elles provoquent ? Et que faut-il faire ?

1. Les frontières des mathématiques au cours des siècles

Pour connaître le domaine qu'a recouvert le terme *mathématiques* au fil des âges, le plus simple est de consulter des dictionnaires. L'évolution depuis le XVII^e siècle est étonnante.

Voici la définition de Furetière (1694) : « Science qui s'attache à connaître les quantités et les proportions. La quantité continue est l'objet de la Géométrie, de la Trigonométrie, des Sphériques, des Sections Coniques, de l'Algèbre spécieuse. La quantité discrète est l'objet de l'Arithmétique, de l'Algèbre commune. Les proportions sont l'objet de la Musique, de l'Architecture, de la Perspective. L'Optique, la Catoptrique, et la Dioptrique sont aussi parties des Mathématiques, parce qu'elles connaissent les causes de la vision directe, de la réflexion, et de la réfraction par ses angles. L'Astronomie et la Gnomonique, parce qu'elles mesurent la hauteur et la grandeur des Astres, les angles et les ombres que font leurs rayons ; et enfin les Mechaniques, parce qu'elles examinent toutes les forces mouvantes par les angles, et les longueurs des leviers, coins, roues, et autres principes des machines. C'est pourquoi on se sert le plus souvent de ce mot au pluriel, parce que toutes ses parties sont enchaînées ensemble. »

Littré (1878), beaucoup plus bref, définit la mathématique comme « Science qui a pour objet les nombres, les figures et les mouvements. »

Pour Robert (1963), les mathématiques sont « l'ensemble des sciences qui ont pour objet la quantité et l'ordre ». Il mentionne aussi les grandeurs mesurables et le mouvement, mais à part, et sous la dénomination curieuse de « mathématiques concrètes ».

On discerne l'évolution d'une définition à l'autre : les mathématiques se constituent de plus en plus comme science autonome abstraite, à l'écart des objets du monde sensible qui ont alimenté leur croissance séculaire.

2. Les mathématiques vues par monsieur-tout-le-monde

Les quelques vues sur les mathématiques rassemblées dans cette section sont partagées par une majorité de gens, dans toutes les couches sociales. Il s'agit principalement de personnes qui ne pratiquent pas les mathématiques, et qui souvent les ont perçues à l'école comme arbitraires et ennuyeuses.

2. 1. « *Les mathématiques, c'est calculer.* »

Pour l'homme de la rue, faire des mathématiques c'est calculer, mâcher, ruminer des nombres et des symboles cabalistiques.

Un mathématicien qui se trompe dans une addition suscite des commentaires ironiques. Il se défend en détrompant ses interlocuteurs : les mathématiques ne se définissent même pas comme la science du quantitatif. Une partie importante des mathématiques est qualitative. Faire des mathématiques, c'est penser et non calculer. La plupart des mathématiciens, mais non tous, considèrent les calculs comme une tâche fastidieuse et développent des trésors d'ingéniosité pour les abréger.

Il est vrai que les mathématiques du XX^{e} siècle sont massivement algébrisées. L'enseignement en est affecté au point que bien souvent les élèves identifient mathématiques et expressions symbolisées. À propos d'une activité qu'on leur propose, ils demandent : « Doit-on la faire en mathématique ? » par opposition à « en français, avec des phrases ». On se méfie des phrases, qui ont une réputation d'obscurité. Dans un manuel de mathématiques destiné à des élèves de douze ans, les auteurs (P. Coenraets et R. Janssens, 1976) disent avoir veillé « à une assimilation aisée de la mathématique par une pédagogie adaptée aux élèves de sixième (actuellement première). De là le souci d'une présentation claire et l'insertion d'un minimum de texte. » Beaucoup de manuels belges et français, surtout de l'époque des « mathématiques modernes », ont proposé de longs morceaux de mathématiques sans phrase. Or par contraste, tous les articles de recherche en mathématiques sont écrits dans la langue commune et entrecoupés de formules. Chaque formule est incorporée à une phrase où elle joue, selon le cas, le rôle de sujet, attribut, complément…

On peut croire aussi que pour se faire comprendre des élèves, le moyen le plus sûr est d'utiliser d'abord la langue qu'ils connaissent le mieux, à savoir la leur, pour recourir ensuite, au fur et à mesure de besoins longuement éprouvés, à la langue des symboles et des signes.

Pour beaucoup de personnes, parce qu'elles n'ont pas pu s'y intéresser d'assez près, les symboles dissimulent la pensée. « C'est de l'algèbre pour moi », disait-on déjà au XVII[e] siècle (FURETIÈRE, 1694), ce qui est synonyme de : « C'est du chinois, ou du grec », deux langues dont l'alphabet n'est pas le nôtre.

2. 2. « *Les mathématiques sont exactes, rigoureuses.* »

Selon l'opinion commune, il n'y a pas de place pour le doute en mathématiques : « C'est oui ou non, blanc ou noir, vrai ou faux. Deux plus deux, ça fera toujours quatre et pas autre chose. »

La rigueur implacable des mathématiques sert de métaphore. L'adjectif mathématique signifie (entre autres) : « Absolument certain, nécessaire, inévitable » (Robert, 1963). On dit de quelqu'un : « Il doit réussir, c'est mathématique. » *(Ibid.)*

Pourtant la rigueur n'existe et ne se pratique que suivant des registres variés. « Il y a des paliers de rigueur », écrit H. Freudenthal (1973). La rigueur a valeur instrumentale : on y recourt, on en augmente la dose, lorsqu'on est en danger de se tromper. La rigueur n'est pas de même niveau dans le travail du logicien et celui de l'analyste. La rigueur absolue est un concept limite. La rigueur n'est pas l'essentiel des mathématiques. L'essentiel, ce sont les idées. Comme a dit quelqu'un, la rigueur c'est l'hygiène du mathématicien.

Il est vrai pourtant que les mathématiques sont une science exacte, et qu'une proposition, dans un cadre axiomatique fixe, est vraie ou fausse dès qu'elle n'est pas absurde ou… indécidable. C'est en tout cas ce qu'on peut raisonnablement penser, car il semble hors de question d'en être absolument sûr. Dans un traité qui, de son propre aveu, « vise à la rigueur parfaite », N. Bourbaki (1958) écrit : « (…) nous croyons que la mathématique est destinée à survivre, et qu'on ne verra jamais les parties essentielles de ce majestueux édifice s'écrouler du fait d'une contradiction soudain manifestée ; mais nous ne prétendons pas que cette opinion repose sur autre chose que sur l'expérience. C'est peu, diront certains. Mais voilà vingt-cinq siècles que les mathématiciens ont l'habitude de corriger leurs erreurs et d'en voir leur science enrichie, non appauvrie ; cela leur donne le droit d'envisager l'avenir avec sérénité. »

2. 3. « *Les mathématiques sont une science achevée.* »

L'idée que les mathématiques sont une science complètement explorée est trop répandue pour qu'on puisse l'omettre dans un inventaire comme celui-ci. Combien de fois n'entend-on demander : « Mais que pouvez-vous bien encore chercher en mathématiques ? On n'arrive pas à l'imaginer. » Pourtant les découvertes succèdent aux découvertes, et les questions nouvelles abondent. Le nombre d'articles et de livres de mathématiques publiés chaque année s'accroît sans cesse. Plus aucun mathématicien ne maîtrise aujourd'hui l'ensemble de sa discipline. Heureusement que la recherche aboutit fréquemment à de nouvelles synthèses qui simplifient des questions jusque-là longues et difficiles.

2. 4. *La bosse des maths*

Les mathématiques sont, dit-on, un don. La bosse des maths n'a pas toujours été un symbole. Dans la théorie phrénologique de Gall au début du XIXe siècle, elle était une authentique protubérance crânienne. Quoiqu'il en soit de la bosse au sens propre, l'idée de l'aptitude innée aux mathématiques n'a jamais disparu. On entend dire : « J'ai toujours été nul en math. Alors il ne faut pas s'étonner que mes enfants ne s'y débrouillent pas bien. » Cette croyance commune est soutenue par des contributions scientifiques controversées. En réalité, comme l'explique clairement Albert Jacquard (1983), il est impossible de dissocier dans l'intelligence les parts de l'inné et de l'acquis, c'est-à-dire la part que l'on reçoit de ses parents à sa naissance, et la part qui résulte de l'environnement où l'on a vécu et de l'éducation que l'on a reçue. Qui plus est, il s'avère même impossible de définir clairement l'intelligence et *a fortiori* de la mesurer. Selon C. P. Benbow et J.-C. Stanley (1980), les garçons seraient en moyenne plus doués que les filles, mais cette affirmation peut être mise en doute de l'aveu même de ces auteurs, ce qui n'a pas empêché la grande presse de la reprendre sans nuance.

Le « don » pour les mathématiques se reconnaît souvent à la rapidité de compréhension, et pas nécessairement à la capacité d'inventer. Les esprits lents, ceux qui mûrissent longuement les problèmes, ou sont plus exigeants que d'autres, partent défavorisés dans la hiérarchie du don. On pose peu de problèmes longs dans l'enseignement : à peu près tous les exercices s'y bouclent en un quart d'heure. Paradoxalement, Einstein, celui dont l'opinion fait le génie mathématique par excellence, était, dit-on, un esprit lent. Sans doute pas très doué au sens banal de ce mot.

Si on laissait à chacun le loisir de réfléchir à son aise, peut-être s'apercevrait-on avec Descartes (1637) que « la puissance de bien juger et distinguer le vrai d'avec le faux, qui est proprement ce qu'on nomme le bon sens ou la raison, est naturellement égale en tous les hommes ». Le slogan « tous capables ! » du Groupe Français d'Éducation Nouvelle dit à peu près la même chose en termes plus concis.

Quoiqu'il en soit, ne pas avoir la bosse des maths, ou plutôt se persuader ou s'entendre dire qu'on ne l'a pas, est d'autant plus écrasant que, pour certains, « les maths servent dans tous les domaines » (*cf*. 3. 2.) et qu'elles touchent déjà, à travers l'arithmétique, l'algèbre élémentaire et la géométrie, au monde le plus quotidien (*cf*. 2. 5.). Avoir la bosse des maths, c'est être intelligent. Ne pas l'avoir…

2. 5. « *Les mathématiques, c'est abstrait et difficile.* »

Les mathématiques ont la réputation d'être une science abstraite et difficile. Or paradoxalement, elles sont plus que les autres sciences en prise directe sur le monde quotidien. Elles commencent à 1, 2, 3, 4… et à l'addition des entiers, au rectangle et au cercle qui peuplent les maisons et les villes. La physique est d'entrée de jeu beaucoup plus abstraite : la vitesse, la force, la pression, la charge électrique sont des concepts autrement plus difficiles, et d'ailleurs apparus bien plus tard dans l'histoire que ceux de l'arithmétique et de la géométrie élémentaires. Les atomes, les molécules et les valences sont en chimie à distance considérable du monde sensible des transformations de matières.

Or s'il est vrai qu'au départ les objets des mathématiques sont simples, ils sont néanmoins tout de suite d'une part élaborés logiquement, et d'autre part manipulés formellement. Élaborés logiquement : par exemple, l'algorithme de la multiplication des nombres naturels se démontre, de même que la valeur de la somme des angles d'un triangle. Manipulés formellement : par exemple, on multiplie les entiers selon les règles, sans éprouver le besoin de retourner à leur démonstration ; l'algèbre la plus élémentaire fonctionne comme une combinatoire aveugle.

Pour ce qui est de la logique en action dans les mathématiques, c'est celle de tout le monde. Donc, tout le monde devrait, semble-t-il, pouvoir y entrer avec un peu d'entraînement. L'un des traités de mathématiques les plus avancés, celui de N. Bourbaki (1958), outre qu'il s'intitule *Éléments de mathématiques*, annonce en avant-propos : « Le traité prend les mathématiques à leur début, et donne des démonstrations complètes. Sa lecture ne suppose donc, en principe, aucune connaissance mathématique particulière, mais seulement une certaine habitude du raisonnement mathématique et un certain pouvoir d'abstraction. »

Les mathématiciens disent et écrivent à tout bout de champ : « il est évident que… », « il est immédiat que… », comme si on ne pouvait pas décemment ne pas voir, comme si tant de choses relevaient d'une logique instantanée. Or l'absence d'un chaînon peut obsurcir le raisonnement le plus bref. Ce qui fait que les évidences mathématiques ne sautent pas toujours aux yeux, et que l'immédiateté annoncée prend parfois du temps. Un jour, le mathématicien Hardy, ayant proclamé une évidence, fut saisi d'un doute, se retira un long moment pour réfléchir, puis revint en disant : « C'est effectivement évident. »

Et de fait, s'il est vrai que démontrer c'est amener à l'évidence, et que par ailleurs il existe des démonstrations longues, c'est que l'évidence coûte parfois cher.

3. Les mathématiques vues à mi-distance

Après avoir parcouru les lieux communs les plus répandus dans la population en général, regardons ce que pensent des mathématiques ceux qui les voient d'un peu plus près ou qui y réfléchissent davantage : élèves, enseignants, auteurs de programmes d'études, ingénieurs, philosophes…

3. 1. « *Les maths, à quoi ça sert ? Vous verrez plus tard.* »

Surtout quand l'enseignement fait la part belle aux routines ou aux exposés magistraux abstraits, les élèves demandent à quoi ça sert tout ça. Question, et inquiétude, qui s'opposent à la conviction que les mathématiques ont « de plus en plus d'applications dans des domaines de plus en plus nombreux ». (*Cf.* 3. 2.)

Or on ne pose pas de question analogue pour les autres sciences, car chacune d'elles a son objet propre : on voit clairement qu'il est utile ou intéressant d'étudier les marées, les langues, les atomes. Évidemment, on peut être contre certains usages de la science, mais c'est une autre question : qu'ils soient bons ou mauvais, on discerne assez bien ces usages.

Quant aux mathématiques, on peut les voir comme n'étudiant aucun objet, mais seulement des relations, des lois (*cf.* 4. 2.). Or le mouvement premier de la pensée connaissante se porte vers les choses, dont elle s'efforce de reconnaître les propriétés et leurs façons de se combiner. C'est se mouvoir à l'envers que d'étudier d'abord les propriétés et de les attribuer ensuite – peut-être – à des choses. Rappelons la boutade de Russell : « En mathématiques, on ne sait pas de quoi on parle, ni si ce qu'on en dit est vrai ! » Dans son ironie, elle décrit la position de ces intellectuels qui savent travailler au-dessus du vide et sont persuadés que cela a un sens. Mais pour beaucoup, les mathématiques sont comme une algèbre sans fond. Ils ont besoin d'un aliment plus substantiel.

En fait, les concepts et les théories servent à résoudre des problèmes. Mais il arrive souvent qu'on enseigne une théorie sans avoir matière à l'utiliser dans des applications dignes de ce nom. On est alors réduit à l'enseigner pour elle-même. Et pour la faire mieux comprendre, on l'entoure d'exemples, ou comme dit P. Hilton (1973), d'illustrations. Une *illustration* est une situation simple qui éclaire la théorie, qui sert à la faire comprendre. Une *application* au contraire est un problème difficile que la théorie sert à comprendre et à résoudre. On ne peut donc pas dire que la théorie sert dans les illustrations. Ce sont les illustrations qui servent à enseigner la théorie, et il arrive qu'elles soient artificielles, hétéroclites. Si on s'arrête là, la théorie paraît dogmatique et futile. Est-ce que la théorie n'accouche que de si petites souris ? Quand une théorie n'est entourée que de modèles dérisoires, son déroulement contraint la pensée, l'immobilise.

Pour que les élèves comprennent à quoi servent les mathématiques, la seule façon serait qu'ils les voient servir sur le champ. C'est-à-dire qu'aucun concept, aucune théorie ne soit construite – ou reconstruite – dans la classe que pour résoudre des problèmes, des difficultés dûment éprouvées. Ce seront au début des questions intrigantes posées dans le champ des évidences familières, puis petit à petit dans le champ des connaissances acquises, que ce soit en mathématiques ou ailleurs.

3. 2. « *Les mathématiques s'appliquent dans tous les domaines.* »

Du moins est-ce ce qu'on lit, entre autres dans certains avant-propos de manuels. Il est vrai que les mathématiques ont toujours eu des liens de consanguinité avec la physique et la technique. Le public les associe spontanément au nom d'Einstein, physicien prestigieux dont les conceptions ont orienté la civilisation technique du XXe siècle. Toutefois, la plupart des mathématiciens, même les plus grands, sont inconnus du public. Les mathématiques sont associées aussi aux technologies nouvelles, certaines redoutables : l'informatique et les ordinateurs liés aux systèmes de communication et de gestion, les recherches spatiales et nucléaires.

Les mathématiques s'implantent peu à peu dans certains secteurs de la biologie, de l'économie, de la linguistique. On dit qu'elles se mettent à servir dans les disciplines qui en paraissaient jusque récemment les plus éloignées : l'anthropologie, la sociologie… Mais n'a-t-on pas gonflé démesurément l'exemple souvent rappelé de Levi-Strauss appliquant quelques éléments de mathématiques à l'étude des structures de la parenté ? Certains parlent de mathématiques en psychanalyse, mais n'est-ce pas plutôt pour en faire un usage métaphorique que pour les appliquer au sens usuel de ce mot ? Il est vrai toutefois qu'il existe un lien entre le courant structuraliste en sciences humaines et les mathématiques du XX^e siècle : pour le dire en peu de mots, c'est le parti d'étudier les relations entre les choses plutôt que les choses elles-mêmes (voir 4. 2.).

Les autres sciences posent des problèmes aux mathématiques. Les mesures de longueurs, d'aires et de volumes, et les problèmes de représentation des objets ont été le terreau sur lequel ont poussé la géométrie et une partie de l'analyse (l'analyse, aussi appelée calcul différentiel et intégral, est la partie des mathématiques où on s'occupe d'infiniment petits et de limites). Le reste de l'analyse est né dans la mécanique aux XVII^e et XVIII^e siècles. La trigonométrie est sortie de l'astronomie de position dans l'Antiquité. On pourrait multiplier et détailler les exemples. De nos jours comme par le passé, les autres sciences alimentent les mathématiques : qu'on songe aux questions posées par la théorie des automates, la recherche opérationnelle, la théorie du contrôle, la cryptographie, etc.

3. 3. « *Les mathématiques sont un outil.* »

C'est ce que disent beaucoup de physiciens et d'ingénieurs, certains ajoutant qu'elles ne sont qu'un outil. Paradoxalement, cette conception est bien différente de celle des mathématiques *instrumentales* (*cf.* 4. 3.). Ce que veulent dire les physiciens et ingénieurs, c'est que « les mathématiques fournissent des procédés de calcul pour débrouiller des problèmes situés en dehors d'elles-mêmes. » Ramener les mathématiques à cela, c'est leur ôter l'essentiel. Car « les théories mathématiques ont toutes été élaborées comme moyen de pensée (et non seulement de calcul) sur des chantiers de problèmes situés en dehors ou en bordure d'elles-mêmes, mais aussi à l'intérieur des mathématiques. » (*Cf.* GEM, 1985.)

3. 4. « *Les mathématiques sont une activité déductive.* »

On croit souvent que les mathématiques procèdent uniquement par déductions. Ce n'est pas vrai. L'exposé d'une théorie mathématique est, pour l'essentiel, déductif. Mais l'activité mathématique n'est pas une activité principalement déductive, même pas une activité purement rationnelle, même pas une activité ordonnée. Chercher la solution d'un problème, c'est tendre vers la production d'un discours rationnel, déductif, à travers l'obscurité et le désordre des choses irrésolues.

M. Kline (1977) écrit dans l'avant-propos d'un manuel de calcul différentiel et intégral : « …amener les étudiants à maîtriser une organisation déductive polie ne leur apprend pas comment penser ou faire des mathématiques, car penser ou faire ne sont pas des processus déductifs. (…) L'approche rigoureuse est trompeuse. Parce qu'un cours d'introduction au calcul différentiel et intégral constitue le premier contact de l'étudiant avec les mathématiques supérieures, il en retire l'impression que les mathématiques vraies sont déductives et que les bons mathématiciens pensent déductivement. »

Mais c'est le destin de chaque grande théorie mathématique d'aboutir, au terme d'une construction controversée et tumultueuse, à la forme impeccablement déductive des traités. La plupart des affirmations y sont de la forme « si… alors… » et le *si* renvoie à la boutade de Russell (déjà rappelée ci-dessus) : le conditionnel exprime l'incertitude. « On ne sait pas si ce qu'on dit est vrai. »

« Toute théorie mathématique, en dehors de son contenu propre, possède un rôle instrumental à l'égard d'autres théories et fournit la clé de problèmes posés dans d'autres secteurs des mathématiques. » C'est ce qu'exprime aussi Bourbaki (1948) quand il écrit : « …chaque structure apporte avec elle son langage propre, tout chargé de résonances intuitives particulières, issues des théories d'où l'a dégagée l'analyse axiomatique (…) ; et pour le chercheur qui brusquement découvre cette structure dans les phénomènes qu'il étudie, c'est comme une modulation subite orientant d'un seul coup dans une direction inattendue le courant intuitif de sa pensée, et éclairant d'un jour nouveau le paysage mathématique où il se meut. »

3. 5. « *Les mathématiques forment l'esprit.* »

C'est ce qu'affirment souvent les auteurs de programmes scolaires. Et i1 est vrai qu'en pratiquant les mathématiques on apprend à raisonner juste, ne serait-ce qu'en… mathématiques ou dans les sciences qui s'appuient sur cette discipline. On apprend à éviter les principales fautes classiques de raisonnement. On apprend à structurer sa pensée.

Certains pensent plus radicalement qu'apprendre à raisonner en mathématiques, ce serait apprendre a raisonner tout court, car il n'y aurait pas trente-six façons de raisonner.

Pourtant les notions quotidiennes n'ont ni la même portée, ni le même usage que les concepts mathématiques. Voyons d'abord du côté des notions que représentent les mots de la langue commune. « Il n'y a rien de plus », écrit P. Valéry (1931), « il ne peut rien y avoir de plus dans un sens de mot que ce que chaque esprit a reçu des autres, en mille occasions diverses et désordonnées, à quoi s'ajoutent les emplois qu'il en a faits lui-même, tous les tâtonnements d'une pensée naissante qui cherche son expression. »

Les concepts mathématiques possèdent eux aussi une telle épaisseur de sens, accumulée dans tous les contextes où on les a vu opérer. Néanmoins, chacun est doté en outre d'un sens univoque, étroitement défini, et qui en réglemente l'usage. Ce dernier est celui que nous avons ailleurs (GEM, 1982) proposé d'appeler le *sens lexical*, celui que donne un dictionnaire des termes mathématiques, pour l'opposer à l'autre, le *sens contextuel*.

Or le raisonnement mathématique est commandé par le sens lexical, même si les idées mathématiques s'appuient essentiellement sur le sens contextuel. Rien de tel en dehors des mathématiques et plus largement des disciplines formalisables. Pourtant on y raisonne et argumente sans cesse, bien que les concepts n'y soient pas soumis à des règles d'usage univoques. On y argumente bien ou mal, à travers des difficultés de précision, d'information, à travers aussi des questions de valeur et des influences affectives. Néanmoins, une opinion bien argumentée vaut mieux qu'une autre qui l'est mal ou ne l'est pas du tout. Faut-il, avec Pascal, opposer l'esprit de finesse à l'esprit de géométrie ? Et si on le fait, on verra bien à l'exemple de plus d'un mathématicien dépourvu d'esprit de finesse, que savoir raisonner en mathématiques n'implique pas nécessairement que l'on raisonne ou argumente bien ailleurs.

3. 6. « *Les mathématiques, science prééminente.* »

Les mathématiques sont tenues par certains pour une science prééminente, étant donné sans doute la certitude de leurs résultats (*cf.* 2. 2.) et l'universalité de leurs applications (*cf.* 3. 2.). Dans la classification des sciences proposée par Auguste Comte, elles viennent en tête parce qu'elles sont la science la plus générale et la plus simple. Une tradition veut que les mathématiques soient la reine des sciences.

Cette réputation est très ancienne. Elle s'enracine déjà dans l'étymologie du terme *mathématique*, issu du grec μαθημα (mathéma) qui veut dire, d'après Littré, l'instruction, la science par excellence. Le même Littré donne la locution *le mathématicien éternel* comme signifiant Dieu. Il cite Forcadel qui, au XVIe siècle, écrit dans sa dédicace au Roy d'une édition d'Euclide : « Sire, entre les autres sciences dignes des plus grands princes et monarques du monde, je croy qu'il n'y a celui qui ne soit de ceste opinion que les mathématiques doivent marcher devant toutes les autres. » Quant à Furetière, à la fin du XVIIe siècle, il écrit curieusement : « Les mathématiques tiennent le premier lieu entre les sciences, parce que ce sont les seules qui sont fondées sur des démonstrations infaillibles. Bottinus a dit fort à propos, que les mathématiques sont des sciences triomphantes, et non militaires, parce qu'on n'y dispute point. Quelques-uns ont donné ce nom à la magie, parce que par le moyen des mathématiques on fait des choses si surprenantes, que le peuple croit qu'il y a de la magie. »

4. Les mathématiques vues de plus près

4. 1. « *Les mathématiques sont arbitraires.* »

Les mathématiques d'aujourd'hui ont, pour l'essentiel, la forme axiomatique. Cela signifie que chaque théorie est tirée par le moyen de la déduction de quelques propositions de départ nommées axiomes. Or on peut sans commettre d'erreur, choisir un système d'axiomes tout à fait quelconque et en tirer une théorie. Les axiomes ne doivent satisfaire qu'à l'unique condition d'être non contradictoires. L'absence de contradiction suffit à rendre possible la construction d'une théorie. Néanmoins, les mathématiciens n'étudient pas n'importe quels systèmes d'axiomes : ils ne s'intéressent qu'à ceux avec l'aide desquels ils ont l'espoir de résoudre des problèmes qu'ils se posent. Ceux-ci peuvent appartenir aux mathématiques elles-mêmes ou au champ de leurs applications. Les mathématiciens disent – non sans mépris – de ceux d'entre eux qui par exception se mettent à étudier des axiomatiques gratuites, qu'ils pratiquent des « soft mathematics », des mathématiques molles.

4. 2. « *Les mathématiques n'étudient aucune chose, elles n'étudient que des relations.* »

D. Hilbert, créateur principal du concept moderne de système axiomatique[1], a dit en parlant de sa reconstruction de la géométrie euclidienne : « On doit pouvoir, dans cette théorie, remplacer point, droite et plan par table, chaise et canette de bière sans que son sens en soit affecté. » Dans cette optique, seule compte la structure, et les termes primitifs de la théorie ne renvoient à rien. C'est ce qui a fait dire à B. Russell : « Les mathématiques sont une science où on ne sait pas de quoi on parle », et il ajoutait « et où on ne sait pas si ce qu'on en dit est vrai. » (Sur ce dernier point, *cf*. le n° 2. 5.)

Vues sous cet angle, les mathématiques sont bien distinctes des autres sciences, dont il est clair que chacune s'occupe de choses bien réelles : les phénomènes électriques, les molécules, les crises économiques… Mais d'un autre côté, les mathématiciens s'occupent aussi de choses qui, dans leur esprit et dans leurs livres, ont beaucoup de relief. C'est le même Hilbert qui a écrit, avec D. Cohn-Vossen (1932), un ouvrage intitulé *la Géométrie et l'Imagination*, truffé de dessins d'objets divers : surfaces, réseaux, polyèdres…

4. 3. *D'où viennent les mathématiques ?*

D'où viennent les idées mathématiques ? Comment prennent-elles naissance ? Sur ce point, les opinions et les croyances sont diverses et contradictoires. Les considérations ci-dessous sont inspirées par B. Charlot (1978), qui a emprunté à J.-T. Desanti les locutions « mathématiques du ciel » et « mathématiques de la Terre ».

Dans la conception des *mathématiques du ciel*, les idées mathématiques préexistent au sujet pensant. Le chercheur ne les construit pas lui-même, il les découvre dans un monde d'idées pures, sorte de paradis platonicien où elles vivent d'une existence intemporelle. « Ainsi… », écrit J. Ladrière (1966), « se révèle peu à peu la figure de ce monde invisible, souverain, et éclatant comme un ciel constellé, que les grands mathématiciens du XVII^e siècle avaient nommé d'un nom majestueux et inoubliable : la *mathesis universalis*. »

Certains considèrent par ailleurs que les idées mathématiques ont pour origine l'ordre que révèlent les phénomènes naturels. Les mathématiques s'obtiendraient par idéalisation des lois qui régissent le monde matériel. C'est la conception des *mathématiques de la Terre* qui, comme celles du ciel, préexistent au sujet pensant. Dans les deux cas, la recherche consiste à découvrir les concepts et les théorèmes, non à les inventer.

B. Charlot (1978) oppose les mathématiques du ciel et les mathématiques de la Terre aux mathématiques instrumentales, celles que le sujet pensant élabore par nécessité pour résoudre des problèmes. L'adjectif *instrumental* ne doit pas être pris en un sens trop littéral, car il risquerait de donner à croire que toute théorie est dépourvue d'intérêt propre, et n'a de valeur que par ce qu'elle permet de faire en dehors d'elle-même. Cela reviendrait à penser que les colonnes qui supportent la voûte d'un édifice n'ont d'intérêt que pour cette fonction qu'elles assurent, alors qu'elles sont, unies au reste de la structure, l'édifice même. On dit aussi que les mathématiques vues de cette façon sont *constructivistes*, adjectif sans doute moins ambigu : ce sont des mathématiques construites par l'homme.

Les mathématiciens eux-mêmes se partagent ces opinions. Certains croient fermement au paradis des idées pures, d'autres aux mathématiques de la Terre. Par contre, lorsqu'il a écrit : « Les nombres sont de libres créations de l'esprit humain », Dedekind exprimait un point de vue constructiviste. Kronecker a dit par ailleurs : « Dieu a fait les nombres naturels ; tout le reste est l'œuvre de l'homme. »

Ouvrages de référence :

Benbow, C. P., Stanley, J.-C., (1980), 1262-1264.
Bourbaki, N., 1958.
Bourbaki, N., 1948.
Charlot, B., (1978), 5-9.
Coenraets, P., Janssens, R., 1976.
Descartes, R., 1637.
Freudenthal, H., 1973.
Furetière, A., 1694.
Galilei, G., 1623.
Groupe d'Enseignement Mathématique, (1985), 10-27.
Hadamard, J., 1975.
Hilbert, D., Cohn-Vossen, S., 1952, (éd. originale 1932).
Hilton, P. J., 1973.
Jacquard, A., 1982.
Kline, M., 1977.
Ladrière, J., (1966), 215-241.
Littré, E., 1878.
Robert, P., 1963.
Rouche, N., *et al.*, 1982.
Valéry, P., 1931.

Chapitre VI

S'il n'y avait plus de problèmes, avec quoi salerait-on ?

Lundi 21 septembre. Demain je ne vais pas à l'école, j'irai chercher un certificat. Dès que je peux, je quitte l'enseignement. Plein le dos de me battre chaque début d'année pour convaincre les élèves et les parents du bien-fondé de mes pratiques pédagogiques.

La rentrée effective, c'était le 8 septembre. J'étais particulièrement gonflé cette année, et heureux de reprendre. J'avais de façon assez exceptionnelle bien travaillé les trois semaines précédentes et même le discours de rentrée du directeur, agressif à mon égard, n'avait pas réussi à altérer mon enthousiasme.

La première semaine s'était bien passée. Dans chaque classe, et comme chaque année, j'ai commencé à faire travailler les élèves dès la deuxième heure de cours. Ils ont reçu un premier problème, un second… Et ont été plongés rapidement en situation de recherche. Après un travail individuel et en groupe de 50 minutes, je fais généralement une synthèse. J'ai été particulièrement attentif à ce que les synthèses soient claires et j'ai demandé fréquemment si tout était bien compris de tous. Pas de problèmes. En bref, tout roulait comme prévu.

La deuxième semaine

Tout se passe bien… Jusqu'au jeudi où trois élèves sont manquants, un garçon et deux filles. Le premier est malade, paraît-il. Après une demi-heure, un élève me dit qu'on ne reverra probablement plus les deux filles, qu'elles abandonnent le cours de math 6 (6 heures/semaine). Coup de massue, ce n'est pas la première année que pareille chose arrive. Je vis toujours ces départs comme un échec.

À la récréation je cherche le directeur pour avoir des explications, je ne le trouve pas. J'aperçois une des deux filles, je l'accroche. Elle me dit qu'elle abandonne le cours de math 6, qu'elle aimait ce qu'on faisait en classe, qu'elle a néanmoins peur de ne pas suivre, qu'elle regrette de ne pas m'avoir prévenu mais que tout est arrangé depuis le mardi, jour où elle est allée trouver le directeur qui l'a, me dit-elle, encouragée à « passer en math 4 (4 heures/semaines) ». Je fulmine.

Après la récréation, heure de fourche. Je rencontre la deuxième élève qui m'exprime les mêmes craintes concernant sa réussite en math 6. Je l'incite à ne pas prendre de décision rapide, à réfléchir son choix et j'essaie de la convaincre de l'intérêt du cours, tout en lui garantissant mon aide en cas de besoin. Je suis toujours en rage et le directeur n'est toujours pas là.

Nouvelle heure de cours. Sans goût, je m'assieds, les élèves travaillent. On sonne. Je descends rapidement. Le directeur est rentré. Il me reçoit. Je me calme, exprime mon étonnement relatif à sa décision et regrette de ne pas avoir été informé. Il me répond que les deux élèves étaient déjà en difficulté l'année précédente et qu'il est plutôt rare qu'un prof se plaigne de voir partir des élèves faibles. Puis il enchaîne en disant qu'il peut encore me faire les reproches qu'il m'a déjà faits antérieurement. À savoir, qu'il peut être d'accord avec moi sur le fond de ma pratique pédagogique, mais pas sur la forme : « Tu brusques les élèves à la rentrée en allant trop vite. Ils n'ont pas le temps de s'adapter à une façon de faire tout à fait neuve pour eux. S'ils avaient l'occasion depuis la première… Si cela ne dure qu'une année, ce que tu fais ne sert à rien. J'ai encore d'autres demandes d'élèves qui veulent quitter. » J'essaie de lui expliquer que j'ai pris des précautions pour être attentif à chacun, que je ne vais pas faire autre chose que des maths au début, que faire des maths c'est résoudre des problèmes, que pour résoudre des problèmes il faut chercher, que chercher n'est simple et automatique pour personne, que la recherche comporte toujours des hésitations et des doutes, que l'inquiétude des élèves est normale, qu'ils doivent jouer le jeu pour comprendre que ça en vaut la chandelle, que… Je sors du bureau, amer.

Le deuxième coup

Qu'est-ce que je peux faire ? Les élèves ne peuvent tout de même pas juger après une semaine. Pour apprendre les « fonctions du premier degré », comment peuvent-ils préférer un cours de math durant lequel une matière théorique défile au tableau, suivie d'exercices répétitifs, à un cours où ils sont tantôt dans la position d’un dispatcher qui règle le trafic ferroviaire, tantôt dans la peau de quelqu’un qui doit synchroniser les feux d’une avenue, tantôt… Préfèrent-ils faire des factorisations durant quinze jours en guise de révision ? Pourquoi choisir la sécurité, même si elle est ennuyeuse ? La sécurité est-elle bien là où ils croient ? Pourquoi ces jeunes ne m’ont-ils pas parlé de leurs difficultés, pourquoi ont-ils préféré en parler d’abord au directeur, pourquoi, lui, ne m’en a-t-il pas parlé ? Voulait-il me saborder ?

Le vendredi, en classe, j’exprime ma façon de voir le cours de math, je demande aux élèves de me faire confiance et je les rassure quant à la réussite en fin d’année. De façon un peu provocante, j’ajoute que s’ils le veulent, ils pourront même apprendre quelque chose.

Après le week-end, vient le lundi de la troisième semaine. À la fin du cours, une troisième élève m’annonce son intention… d’abandonner. Elle n’aime pas les maths. Ce sont ses parents qui l’ont contrainte l’année précédente.

Le soir, c’est le deuxième grand coup, celui de grâce. La mère d’une quatrième élève me téléphone. « Monsieur, je vous téléphone au sujet de ma fille. Elle est découragée. Elle revient tous les jours en disant qu’elle n’a rien compris. Est-elle capable de suivre en math 6 ? C’est étonnant, l’année passée elle aimait bien le cours de math et elle avait de « beaux points ». Je ne comprends pas. Surtout qu’elle est du genre perfectionniste. » – « Madame, un vent de panique a soufflé dans la classe, je suis confronté à l’irrationalité… »

Plus aucune rage en moi, je suis abattu. Et je m’endors comme si c’était la dernière fois. Mais le réveil est dur. Je n’ai pas envie de partir. Qu’irais-je faire à l’école ? Mais que ferais-je si je restais à la maison ?

À l’école, une jeune collègue me réconforte, le monde à l’envers. Je découvre sur une table un fascicule de 30 pages destiné aux élèves de troisième. Il est entièrement rempli de symboles, sans texte ni commentaire. De quoi faire tomber dans les pommes un Indien d’Amazonie centrale qui découvrirait cela pour la première fois. Il n’y a, à peu près, qu’une consigne de deux à quatre mots par page. Est-ce ça qu’on appelle mathématiques, alors que cela n’a absolument aucun sens et ne servira jamais puisqu’ils ne résoudront jamais des problèmes ? Est-ce moi l'anormal de la bande, celui qui fait faire des choses peu naturelles ? Alors que les élèves qui résolvent ces exercices au formalisme et au symbolisme exacerbés, le font de façon répétitive en s'inquiétant seulement des opérations permises et des opérations sacrilèges, comme si faire des mathématiques c'était entrer en religion. La sonnerie fonctionne, je monte en classe. Je vais tout reprendre à zéro. Je persisterai.

Le bon problème

J'ai persisté et je persiste. Comment ? Pourquoi ?

Au départ, il y a un problème, des questions. Sans cela il n'y a pas de recherche, pas de sciences, pas de mathématiques. En classe, je ne conçois pas de faire l'économie de ces moments de tâtonnement, de progression lente des élèves durant lesquels l'erreur est acceptée et même reconnue comme un passage important de la démarche.

La tâche la plus délicate pour l'enseignant est la recherche du bon problème, celui qui « parle » aux élèves, est suffisamment proche de leur langage, leurs connaissances, leurs intérêts. Celui qui accroche le plus grand nombre par son caractère « réel », insolite, provoquant ou paradoxal.

Le bon problème est relativement ouvert de façon à ne pas confiner les élèves sur des chemins trop bien tracés par le professeur et leur laisser un peu d'initiative au niveau des méthodes de résolution et de l'approche choisie. Mais pas trop ouvert pour ne pas les décourager par une tâche lourde qu'ils ne savent par quel bout aborder.

Les problèmes ne sont pas des illustrations d'une théorie sèche que l'enseignant a présentée en décortiquant les difficultés et en expliquant de façon logico-déductive les différentes étapes ; ils sont les berceaux des concepts naissants et le bercail des solutions et théories grandissant comme sœurs.

Les concepts naissent dans chaque esprit après une longue maturation par la recherche et non transplantés d'un manuel à un jeune receveur peu réceptif parce que peu concerné, ignorant des finalités, trop brutalement plongé dans une forme de pensée qui n'est pas la sienne. Par réinvestissements successifs dans de nouveaux problèmes, les outils mathématiques ainsi construits peuvent s'abstraire du contexte initial et atteindre le niveau formel des traités de mathématiques. Si l'élaboration des concepts se fait en réponse à des situations problématiques, on donne sens aux théories, on fait acquérir des outils mathématiques plus utilisables. On rend peut-être l'élève capable de mener une recherche, de questionner, se questionner, de produire et de réussir parce qu'il a pris conscience de ses capacités de production.

Le temps, le programme, les élèves faibles…

Où trouver le temps, avec tout le programme à voir ? Si on veut laisser travailler les élèves, ce n'est pas possible. Et ceux qui ne trouvent pas, puis ceux qui vont trop vite ? Et le bruit dans la classe ? C'est bon avec des petites classes et de bons élèves !

Un des premiers obstacles rencontrés en classe, c'est le malaise des élèves, qui se traduit par le découragement ou le rejet, devant un travail à faire eux-mêmes sans avoir reçu les trucs, une réflexion à mener sans pouvoir suivre des recettes. L'élève a pris l'habitude d'attendre, d'exécuter ou de consommer, au cours de math et aux cours de sciences. Il est convaincu de son incapacité à produire un discours, une réflexion tant qu'il n'a pas un certain nombre de connaissances sur le sujet abordé. Heureusement que les nouveau-nés n'attendent pas des modes opératoires pour explorer avant de commencer à le faire, ils seraient morts dans l'œuf. Cette passivité intellectuelle créée par l'école chez les adolescents est renforcée chez les plus faibles par un sentiment d'incapacité congénitale.

Quiconque fait un peu, beaucoup de recherche, à quelque niveau que ce soit, dans quelque science que ce soit, sait que les piétinements sont fréquents, que les erreurs sont des passages presque obligés, que les réponses se font parfois attendre et qu'elles sont incomplètes ou sources de nouvelles questions. Pas simple de mener une recherche, surtout en milieu scolaire où elle est inhabituelle, programmée à des heures fixes entre deux cours suivis semi-passivement et pour une durée de cinquante minutes.

L'élève vit mal le doute, est insécurisé lorsqu'il reste un jour, voire une semaine ou un mois avec des questions non résolues, alors que plane sur lui la peur d'une évaluation qui sanctionnerait négativement son doute, son questionnement, sa recherche. C'est paradoxal de provoquer l'insécurité quand on veut rendre confiance, mais ils sont trop habitués à être jugés pour tout ce qu'ils font et à baser toute leur vie scolaire sur la note au bulletin.

Le temps, le programme, l'inspecteur, le directeur, les collègues, la continuité dans l'établissement sont des mots souvent bien utiles aux enseignants qui veulent justifier leur immobilisme. Ce qui est plus vrai, c'est que des choix sont à faire. Il est clair qu'une approche en profondeur de certains concepts réduit le temps consacré au drill calculatoire. Mais il s'avère que si le drill est quelquefois rentable à court terme, il est pratiquement sans effet à moyen terme. Chaque année dans les classes du professionnel, on refait les mêmes exercices de pourcentages. Réduire la science au calcul et à l'application des formules, c'est tromper sur l'image que l'on donne des sciences en général, des mathématiques en particulier.

Faire des mathématiques

Extrait du programme de mathématiques de première année secondaire (1980) : « Il ne suffit pas d'énoncer en langage précis des définitions et des propriétés, de les illustrer par l'un ou l'autre exemple, et de les appliquer dans des exercices ad hoc. Il importe que la prise de conscience des notions et des propriétés résulte d'une véritable activité de l'élève. »

Finies les classes de math « cinémas » où la matière défile en blanc soulignée de rouge, sur le tableau noir. Obsolètes les belles structures abstraites et puissantes qui séduisent ceux qui ont la « bosse » et restent absconses, inutiles, ennuyeuses pour les moins « doués » qui doivent quand même avaler l'amère pilule.

Finies les classes de math « musées » où les élèves découvrent les œuvres bien polies des grands en essayant, à l'aide du guide professeur, de comprendre le message de l'œuvre ! Tous ne trouvaient pas la même motivation que l'artiste.

Faire des maths, c'est quoi ? Faire des maths, écrit B. Charlot, c'est « les faire, au sens propre du terme, les construire, les fabriquer, les produire, que ce soit dans l'histoire de la pensée humaine ou dans l'apprentissage individuel. Il ne s'agit pas, bien sûr, de faire réinventer par les élèves des mathématiques qui existent déjà mais de les engager dans un processus de production mathématique où leur activité ait le même sens que celle des mathématiciens qui ont effectivement forgé des concepts mathématiques nouveaux. » Priver l'élève d'un

« faire », d'une activité, c'est engendrer des connaissances formelles mal enracinées et impuissantes à servir dans la résolution de vraies questions.

Dans des contextes quotidiens, économiques, physiques, ou purement mathématiques, les concepts mathématiques s'élaborent tandis qu'ils œuvrent dans la résolution des problèmes. Un exemple en classe de cinquième secondaire : plutôt que définir la dérivée mathématiquement comme limite d'un taux d'accroissement puis essayer de l'interpréter géométriquement et physiquement, nous résolvons des problèmes de pente liés aux courbes de niveaux d'une carte géographique, de coût marginal en économie, de vitesse en physique. Ainsi on fait émerger lentement la notion de dérivée pour ne lui donner que finalement sa forme mathématique abstraite.

Une réelle difficulté réside dans la gestion d'une classe en recherche, en ébullition intellectuelle, en questionnements directement liés à la résolution d'un problème ou relatifs à la méthodologie utilisée. Beaucoup de professeurs ne se sentent pas formés pour tenter l'expérience. À ce niveau, le travail en équipe, entre collègues, est bénéfique. Être en recherche soi-même, partager avec d'autres et essayer, d'abord ponctuellement, de proposer de petites activités évaluées ensuite avec le groupe, c'est le meilleur moyen de transformer ses pratiques. L'enseignant est directif au niveau de l'organisation du travail, mais très tolérant quant aux réponses données. On peut encourager l'élève à produire, à formuler des conjectures, des preuves, des solutions, sans succomber à la tentation de donner la solution, de se prononcer sur le raisonnement de l'élève, mais le relancer avec des questions et le pousser à s'assurer lui-même de la validité de son raisonnement.

Il faut prendre le temps avec toute la classe de faire le point et fixer certains acquis en s'accordant sur le langage, de façon régulière afin de les ramener tous à des repères communs qui seront à la base de recherches nouvelles.

Les problèmes constituent le sel de la science. Ils motivent l'apprentissage, ils provoquent l'activité mentale, sont le terreau où poussent les concepts et les théories, apprennent aux apprentis à apprendre, permettent le contrôle permanent du savoir-faire et de la faculté à réinvestir. S'il n'y avait plus de problèmes…

Chapitre VII

Mises en boîtes

Comment les enfants se représentent-ils les objets qui les entourent ? Et comment faire pour que ces représentations évoluent ? Vous avez certainement déjà observé ces dessins d'enfant où les autos sont dessinées de profil, couchées sur une route qui, elle, est dessinée vue du dessus, ou ces maisons avec ces portes à plat sur le toit.

La séquence d'apprentissage qui va vous être relatée raconte une expérience menée dans 3 classes du degré inférieur (en tout une cinquantaine d'enfants de 6 à 8 ans, de première et deuxième primaire) d'une même école.

Le défi de départ qui a été proposé aux enfants était un pari. Les enfants devaient, à l'aide de messages graphiques (texte et/ou dessins), communiquer un plan qui devait être lisible, donc interprétable, par d'autres enfants. Imaginez une boîte à chaussures dans laquelle se trouvent cinq récipients (une boîte d'allumettes vide, un couvercle de pot de choco, un pot de confiture vide, une boîte à conserve vide et une assiette à dessert) ainsi que six objets : un clou, une punaise, une allumette, un marqueur, un élastique et une pièce de un franc.

Chaque classe dispose de ce matériel. Le plan qui sera rédigé et envoyé par les dessinateurs doit indiquer la position des objets dans la boîte à chaussures et doit donc permettre aux autres groupes de disposer les objets de la même manière. Le pari était que les enfants, grâce à ce jeu de messages, étant à tour de rôle « écrivain-dessinateur » et « lecteur-entrepreneur », parviendraient à être suffisamment précis pour se faire comprendre.

C'est la classe de Michel, le premier titulaire, qui se lance. Les autres titulaires s'appellent Lucette et Bernadette. Il met les enfants au travail en donnant la consigne suivante : *Les boîtes et les objets qui sont devant vous se trouvent aussi dans la classe voisine chez Lucette. Chez vous ils sont rangés d'une certaine façon et chez eux ils sont en désordre. Le jeu que je vous propose consiste à envoyer des messages aux enfants de la classe de Lucette pour qu'ils puissent à leur tour ranger leurs boîtes et leurs objets de la même manière qu'ici.*

Premiers essais

Pendant cinq minutes chaque enfant travaille seul à l'élaboration de son message. Sur ce premier jet Michel leur propose de s'arrêter quelques instants pour se demander chez qui on comprend le mieux. Dix enfants croient au travail de Déborah qui a utilisé des couleurs pour son dessin. Trois enfants pensent que la démarche de Christel qui donne des explications dans un texte continu est plus sûre. Michaël fait cavalier seul, son dessin en noir et blanc lui semble clair. On continue. Quatre groupes se remettent au travail. Deux groupes de cinq selon la piste « Déborah », un groupe de trois selon « Christel » et Michaël selon « Michaël ». Après un quart d'heure, un message apparaît, rapidement suivi par trois autres. On les envoie chez Lucette au fur et à mesure de leur achèvement (vous trouverez plus loin dans le paragraphe intitulé « Chez Lucette » le récit de ce qui s'y est passé). Les enfants de chez Michel attendent, impatients, les premières réactions. Elles ne tardent pas, les émissaires de chez Lucette invitent les dessinateurs de chez Michel à venir en classe pour répondre à leurs questions. Lorsque les classes se rencontrent, il apparaît que les messages sont contradictoires sur quatre points que les enfants de la classe de Lucette ont relevés avec précision. *S'il vous plaît un seul message* sera la conclusion de cette première séquence.

Le lendemain

La classe de Michel décide de ne plus former qu'un seul groupe de seize parce que l'on veut produire un seul message. On décide aussi de choisir la piste « Déborah » qui convient à la majorité. On dessine d'abord ensemble un brouillon sur le tableau, un secrétaire dessine à la demande du groupe.

On procède par étapes. Face au tableau blanc « Veleda » le débat est passionnant, les enfants ayant bien conscience de la nécessité d'être précis dans leur écriture. Plusieurs notions sont très présentes à leur esprit et sont verbalisées avec leurs mots : gauche/droite, dedans/dehors, les formes (longueur/largeur/base) des boîtes et des objets, les distances qui les séparent, les représentations vues du haut/de face, etc.

Après une demi-heure d'intenses palabres en langue mathématique, on envoie le message définitif chez Lucette. À la seconde confrontation, il reste une incompréhension : les enfants de chez Lucette ont cru comprendre que les deux boîtes étaient couchées alors que sur notre modèle, elles étaient debout. Réaction immédiate des émetteurs du message : *Vous avez mal lu, vous n'avez pas compris*. Mais on a bien dû admettre qu'en fait elles avaient encore été dessinées couchées !

Quatre jours plus tard, le groupe de Michel reçoit à son tour un message de la classe de Bernadette, dont vous lirez plus loin les conditions d'écriture (au paragraphe intitulé « Chez Bernadette »). Les enfants le lisent dans les moindres détails. Leur expérience précédente leur a appris à ne plus rien laisser au hasard. Ils réussissent à placer correctement boîtes et objets. Notons qu'ils ont fait attention à certains détails auxquels les enfants de la classe de Bernadette n'avaient pas voulu donner sens : *Nous, la punaise, on l'a dessinée pour que vous compreniez qu'elle était dans la boîte à conserve. C'est par hasard si la pointe est dirigée vers la droite. Vous allez chercher trop loin !* dirent les enfants de Bernadette après avoir vu la boîte apportée par les enfants de chez Michel.

Chez Lucette

Mais revenons un peu en arrière au moment où les enfants de chez Lucette reçoivent le premier message venant de la classe de

Michel. C'est un dessin accompagné d'une légende. Heureusement qu'elle est là, car ils ne reconnaissent pas tous correctement ce qui représente les boîtes et objets ni la façon dont ils sont disposés chez Michel. Les enfants comprennent qu'il s'agit sans doute de placer leurs objets dans leur boîte à chaussures selon le message reçu pour obtenir la disposition précise de chez Michel.

Parvient ensuite un second message que les grands de 2e déchiffrent : il s'agit cette fois-ci d'un texte illustré seulement de quelques dessins. Mais voici que tout s'embrouille : quatre points ne correspondent pas aux données du premier message. Et encore deux nouveaux messages… qui malheureusement ne les éclairent guère plus. Les enfants décident alors de faire appel au groupe de Michel : *Nous n'y arrivons pas, vos messages ne vont pas ensemble. Nous voudrions recevoir un seul message*.

Le lendemain

Un nouveau message leur parvient, très clair cette fois-ci : en un rien de temps, les objets sont placés. Deux problèmes sont soulevés : le pot de confiture et la boîte à conserve, cylindriques tous les deux, sont représentés par des rectangles. Ne faudrait-il pas les coucher ? Hier le problème n'avait pas été soulevé, alors que les boîtes étaient représentées de la même façon. Discussion. On décide finalement de coucher les boîtes : *Si la boîte était debout on verrait un rond et pas un rectangle !* Mais on hésite… Autre problème : on n'arrive pas à donner à l'élastique la même forme que celle représentée sur le dessin !

Ce deuxième jour a lieu une nouvelle confrontation avec le groupe de Michel qui affirme : *C'est faux, les boîtes sont debout*. Le groupe de Lucette se défend : *C'est votre plan qui est faux, vous les avez dessinées couchées*, *nous on a bien compris !* Pour le problème de l'élastique les enfants de chez Michel assurent en haussant les épaules : *Vous allez trop loin ! Ça n'a pas d'importance !*

Ça continue

Le lendemain (le troisième jour, donc) le jeu continue chez Lucette : *À nous maintenant d'envoyer un message dessiné à la classe de Bernadette pour lui dire comment nous avons placé boîtes et objets*. La boîte à chaussures est placée sur une table, bien en vue et chaque enfant reçoit une feuille… et une consigne : *pour dessiner le message, on ne peut pas prendre sa feuille pour aller voir dans la boîte qui contient les objets*. Il faut donc tout retenir dans sa tête pour venir dessiner la boîte et les objets sur sa feuille. Mais on peut aller voir autant de fois qu’on veut ! Les enfants groupés par quatre circulent et chaque groupe rédige un message dont, finalement, un seul sera choisi. Les enfants en commençant, ont décidé de n’envoyer à la classe de Bernadette qu’un seul message. Ils veulent éviter aux autres les difficultés qu’ils ont eues avec les différents messages venant de la classe de Michel. Et ils ont bien fait ! Les enfants du groupe de Bernadette réussissent rapidement à interpréter le message. Les difficultés rencontrées lors de la première partie du travail ont en effet bien aidé les enfants de chez Lucette à émettre le message le plus clair possible.

Chez Bernadette

Les enfants de chez Bernadette reçoivent le message de la classe de Lucette. Ils sont réunis autour de la grande table avec le message et la boîte contenant tous les objets. À tour de rôle chaque enfant est venu placer un objet dont il avait bien perçu la situation sur le plan. Pour chaque élément placé, les autres observaient et intervenaient s’ils n’étaient pas d’accord. La reconstitution dans la boîte à partir du plan a été très vite réalisée et la lecture du plan n’a pas posé de problèmes sinon quelques discussions sur la précision : *C’est comme ça sur le plan, regarde la pique de la punaise est par là ! Et l’allumette, le bout brûlé est dans l’autre sens ! La tête du clou est vers la boîte d’allumettes. Attention l’élastique ne touche pas le pot*.

Les enfants étaient très respectueux du plan, quelque peu tatillons même… Mais toutes ces discussions précises leur ont permis d’affiner la lecture. Le travail terminé, tous les enfants étant d’accord avec la disposition des objets et des boîtes, nous avons appelé les enfants de Lucette pour vérifier le travail : tout était correct.

Du recul

À ce stade, Bernadette propose un temps d’évaluation en posant les questions suivantes : *Comment cela s’est-il passé pour vous ? Quelles difficultés avez-vous rencontrées ? Le message était-il lisible ? Grâce à quoi pouviez-vous bien le comprendre ?* Et elle constate que les enfants se sont attachés à bien respecter les consignes écrites par l'autre classe, à observer tous les détails du plan pour recréer la disposition demandée. Ils tenaient à être aussi précis que le dessin et sentaient que c'était important pour montrer qu'ils avaient compris. Ce souci du détail et de la précision était naturellement accepté, *car on savait que les autres allaient venir vérifier*.

C'est reparti

L'après-midi, les enfants de la classe de Bernadette élaborent un nouveau message qu'ils apporteront le lendemain (le quatrième jour) à la classe de Michel. Autour de la table, chaque enfant vient placer un élément dans la boîte. Consigne : *Par groupes de deux, un enfant de 1re et un enfant de 2e, vous dessinez le plan de la boîte avec ce qu'il y a dedans. Les enfants de Michel devront être capables, grâce à votre message, de refaire le montage que vous avez fait dans la boîte*. Après un quart d'heure, exposition de tous les travaux autour de la table. Les enfants les observent et les comparent à la disposition des objets de la boîte. On discute et on élimine les dessins erronés. On choisit ensemble le message qui nous semble le plus clair : c'est celui de Sofia et Krystyna. Il arriva donc chez Michel quatre jours après que le premier message ait été envoyé !

Tous ces allées et venues entre les classes ont amélioré la lecture et l'écriture d'un plan, donc de la représentation simplifiée d'objets. Simplifiée mais pas pour autant imprécise. Toutes ces communications, écrites et orales, ont, à elles seules, par le défi de devoir être comprises, créé cette énergie et ce plaisir de comprendre. Elles ont permis ce difficile travail pour les enfants : prendre du recul par rapport à leurs perceptions, bref objectiver leurs vues subjectives. Les enfants ont participé, en le créant, à la construction d'un langage codifié qui a permis de rapprocher leurs langages.

Chapitre VIII

Qui a tué le petit génie qui sommeillait en eux ?

Ils sont petits, vifs, curieux, veulent tout savoir, posent sans cesse des questions, refont cent fois la pyramide d'anneaux, essaient avec patience de faire entrer un objet dans la bonne cavité d'une bulle, comptent à toute heure du jour… Des petits génies en herbe que l'on retrouve, douze années plus tard, désabusés, démotivés, peu aptes à interpréter un graphique, à comprendre une probabilité, à lire un plan, à exprimer ce qu'est une vitesse.

Que s'est-il passé ? Pourquoi tant d'entrain à 4 ou 5 ans ? Pourquoi un petit nombre, après douze années de métier (d'élève, cela s'entend) jongle avec les dérivées, les intégrales, les complexes, les matrices tandis que beaucoup n'y voient qu'un tissu de symboles ennuyeux, abscons, source de difficultés de pure forme, complètement inutile à leurs yeux ? Pourquoi tant d'exclus et, pour ceux qui vont jusqu'au bout, un savoir mathématique peu opératoire ?

Hors toute explication psychologique sur le comportement de l'adolescent – cela dépasse notre compétence – nous allons faire un petit tour des responsables sans avoir la prétention d'en faire une liste exhaustive. Mais ce sera plutôt l'occasion de rectifier quelques images largement véhiculées et pourtant fausses des mathématiques et formuler des pistes ou propositions de changement. Un changement qui, relativement facile à énoncer, s'avère plus difficile à mettre en œuvre.

Les mathématiques elles-mêmes

Si tant d'élèves ont des difficultés en mathématiques, c'est parce que les mathématiques sont difficiles !?

« Je connais la tendance de l'esprit humain à faire n'importe quoi plutôt que de penser. Certes, aucun d'entre nous n'espère réussir sans travail. Nous savons tous qu'acquérir un tant soit peu de science exige un effort intellectuel considérable, et je suis sûr que nous y sommes prêts pour avancer dans notre discipline. Mais effort intellectuel n'égale pas pensée. Et ceux qui, à grand-peine, ont acquis l'habitude de s'appliquer à leur tâche, souvent trouvent plus aisé d'apprendre une formule que de maîtriser un principe (MAXWELL, 1979). » Si Maxwell, l'un des plus grands physico-mathématicien, génial fondateur de la théorie électromagnétique, reconnaît la difficulté de penser, comment croire alors à des mathématiques qui coulent de source pour l'élève « ordinaire », assis dans une classe de première primaire ou de sixième année de transition ? Avec ou sans bosse, il faut forcer sa nature pour se mettre au travail et sans garantie de succès.

Même si elles trouvent leur source dans des problèmes de la vie concrète, de dessin, de physique, d'économie et d'autres, les mathématiques finissent par s'éloigner de leur contexte, elles deviennent souvent abstraites, s'expriment dans un langage très symbolisé et tendent souvent (trop vite probablement) à devenir formelles.

Le travail de recherche, avec le doute qui menace, le syndrome de l'impuissance qui plane, les nombreuses erreurs qui l'émaillent, est principalement motivé par l'aboutissement, la joie de réussir, de dominer un concept, une matière. Maxwell ajoute que « malgré le recul naturel de l'esprit devant le dur processus de la pensée, pourtant, ce processus une fois accompli, l'esprit ressent une puissance et une jouissance qui l'amènent à mépriser désormais les peines et angoisses qui accompagnent son passage d'un stade de développement à un autre. »

Alain Connes, mathématicien français[1] qui parle également de se cogner[2], heurter à la réalité mathématique, précise que « quand on trouve, il se produit quelque chose d'extraordinaire. On est anéanti par l'émotion. » Bien sûr, l'élève n'est pas le mathématicien. Pour lui, le défi doit être bien dosé. Il ne peut attendre une vie. Et il n'y a défi que si les questions ne sont ni trop loin ni trop près de ce qu'il sait et sait faire. C'est de petits défis en petites réussites qu'il progresse, prend confiance en lui et se sent prêt à relever de plus grands défis.

Pour la question qui nous occupe, le peu d'intérêt, voire le dégoût, des jeunes pour les mathématiques, ce sont pourtant moins les difficultés inhérentes à la pratique mathématique qui sont en cause que le manque de pratique mathématique dans les classes. Car il n'y a pas de math sans problèmes, pas d'apprentissage mathématique sans faire des mathématiques. Même pour les plus faibles que l'on juge incapables de comprendre. Paradoxalement, le vrai problème est bien là : à 18 ans, malgré un volume horaire substantiel, des élèves n'ont presque jamais fait de mathématiques [3].

La famille

Lorsqu'on évoque les carences et problèmes des enfants, on ne peut s'empêcher d'évoquer, à tort ou à raison, les responsabilités familiales.

« La famille comme l'école sont des lieux où l'accumulation des traumatismes finit par déterminer entièrement le comportement de l'adulte devant la vie intellectuelle en général, et devant les sciences, en particulier. (…) Il faut bien admettre l'idée que nos concitoyens, dans la majorité, ont été traumatisés dans leur enfance par des attitudes et des méthodes répressives en famille et en classe (SCHATZMAN, 1989). » Evry Schatzman, astrophysicien, membre en France de l'Académie française, donne de nombreux exemples pour étayer sa thèse. Un premier exemple touche à l'apprentissage « géométrique » de l'enfant très jeune qui utilise son corps pour appréhender l'espace, ses trois dimensions, et tout particulièrement, la verticale. Il fait l'expérience de celle-ci, du haut, du bas, accomplit de nombreux essais, laisse tomber maintes fois le même objet, tient une boîte à l'envers et la regarde se vider. « Mais cette expérience physique se complète immédiatement par une expérience morale. L'enfant est l'objet de remarques, de conseils, ou même de punitions corporelles (SCHATZMAN, 1989). »

Certaines familles sont également accusées de léguer un lourd héritage à leur progéniture ; pudiquement, on parle de handicap socioculturel. Les jeunes de ces familles seraient mal préparés à suivre un enseignement mathématique souvent abstrait, éloigné du bon sens populaire, gratuit et plus proche de l'art que des sciences. B. Charlot (1972) réfute la thèse du handicap socioculturel et développe la notion de rapport au savoir. Quand une élève dit : « Moi, je suis bouchée en math, je n'ai jamais rien compris, maman non plus elle s'en sortait pas », on comprend que l'élève ne fait pas qu'apprendre (ou ne pas apprendre) au cours, mais elle se situe également par rapport au cours. Pour B. Charlot, la réussite passe par un rapport positif au savoir, ce qui pose notamment la question de l'adéquation de l'école au rapport des milieux populaires au savoir.

En mathématiques, il faut reconnaître que le rapport au savoir est quelque fois très négatif aussi dans les familles dites bourgeoises. Il n'est pas rare d'entendre un avocat, un médecin se vanter d'une incapacité quasi congénitale en mathématiques, qui s'est manifestée toute sa vie scolaire et semble excuser les faiblesses de sa descendance.

Amener les élèves à un rapport positif au savoir, c'est un travail difficile mais incontournable pour celui qui enseigne des mathématiques. C'est donner l'occasion aux élèves de rencontrer les matières étudiées dans des contextes diversifiés qui montrent l'utilité et l'instrumentalité des concepts abordés ; c'est ouvrir les questions à des approches différentes de façon à tendre, si possible à chacun, un jour ou le lendemain, une perche qui rencontre ses intérêts ; c'est renverser l'image négative qu'un jeune a de lui-même en lui permettant de relever un défi, de trouver, de réussir quelque chose.

Les enseignants

C'est un lieu commun. Quel est l'élève, potentiellement doué, qui n'a eu à souffrir d'un enseignant incompétent et complexé ? Surtout en mathématiques. C'est là qu'on trouve les moins sympathiques, les plus autoritaires, les plus carrés, les plus sadiques, les plus « moffleurs[4] ».

Image simpliste, loin des réalités ? Il faut reconnaître que certains enseignants en mathématiques n'ont jamais fait de mathématiques ou n'en n'ont plus fait depuis longtemps, tout comme les élèves auxquels ils s'adressent. Ils ramènent leur discipline à l'exigence et à la rigueur. Une fausse exigence qui repose plus sur le volume de travail que la qualité, qui s'appuie sur la mémoire des formules et le drill là où il faudrait recherche, réflexion et maîtrise des concepts, une fausse rigueur, une longue habitude de pointillisme qui tue l'imagination et inhibe le processus naturel de recherche. On pense que les mathématiques sont celles des traités. Elles sont polies, rigoureuses, avec leur lot d'axiomes, de théorèmes, de démonstrations logiquement enchaînées. Ce sont des mathématiques achevées, parfois loin des mathématiques en train de se faire. Celles-ci sont foisonnantes, mal structurées, intuitives, griffonnées sur des bouts de papier. On n'y trouve pas encore la belle rigueur du traité.

L'élève, lui aussi, doit pouvoir exprimer les choses avec ses mots, suivre ses intuitions, passer par des demi-vérités, procéder par essais et erreurs, prendre le temps de chercher sans être jugé, acquérir lentement un langage correct.

L'enseignant rencontre deux grosses difficultés pour accomplir correctement sa tâche. Tout d'abord celle de gérer la dynamique du groupe. Des élèves en activité, ce sont de multiples pistes de réflexion qu'il faut arriver à mettre ensemble. C'est du bruit dans la classe, ce sont des tempéraments fougueux qu'il faut freiner, ce sont des inhibitions qu'il faut lever et des paresses qu'il faut secouer. Ensuite, il faut différencier les pratiques en réponse à l'hétérogénéité intellectuelle du groupe tout en amenant tous les élèves à un niveau commun de compréhension de certaines théories.

La société

Ce n'est pas neuf, mais tellement vrai qu'il faut bien y revenir : les mathématiques jouent un rôle sélectif qui s'avère finalement préjudiciable pour la discipline. Non seulement dans les branches scientifiques, mais dans de nombreuses autres, à l'université ou dans les écoles supérieures, des cours de mathématiques (et de physique également) semblent plus se justifier par la sélection qu'ils provoquent que pour leur réelle utilité.

Que la société sélectionne, c'est normal. On ne peut confier sa santé à n'importe qui et on ne voudrait pas emprunter un pont construit par le premier venu. Que les grandes écoles jouent ce rôle sélectif, c'est acceptable même s'il faudrait peut-être revoir la façon dont on sélectionne. Mais pour l'école secondaire, qu'est-ce qui justifie ces coupes sombres successives et massives dans la forêt des petites têtes brunes, noires ou blondes. L'habitude ? Une culture très répandue de l'échec ? Le besoin de valoriser un diplôme qui perdrait de sa valeur si tout le monde l'avait et pouvait présenter les examens à la poste ? La nécessité de préparer les jeunes aux études supérieures ? Curieuse façon de préparer que de faire le travail de sélection à la place des autres.

Dès la maternelle et à l'école primaire, il faut préparer à l'université. En première primaire, on fait des comparaisons entre écoles. Là, ils ont vu deux lettres en plus mais un chiffre en moins. La course commence tôt, le savoir encyclopédique s'accumule, tant pis pour les plus lents.

Le caractère incontournable et obligatoire des mathématiques dessert la motivation. Or il n'y a rien de pire que le dégoût, que l'échec sanctionné lourdement par le redoublement.

Tout se passe comme si les élèves couraient (ou concouraient) pour obtenir un diplôme et faire plaisir aux parents qui lient les cadeaux et les autorisations diverses aux résultats scolaires. En oubliant l'essentiel, c'est qu'ils sont à l'école pour apprendre. À un élève de cinquième qui a vingt ans, on supprime le rugby parce que ses résultats sont médiocres et que c'était le sport auquel il tenait le plus. Puis on lui retire son écran d'ordinateur. Quelle perversion ! Les élèves oublient l'essence même de leur métier pour viser on ne sait quelle réussite.

Il est grand temps de remettre le pot droit, de cibler les compétences indispensables à acquérir de 7 à 77 ans en mathématiques, de tenir un discours clair mais non culpabilisant aux élèves, d'adapter les structures aux rythmes, de rendre la différentiation réellement possible, de rencontrer les aspirations et les difficultés du plus grand nombre possible.

L'enseignement

« Les mathématiques sont une forme de pensée riche de sens, mais qui s'appuie sur des enchaînements formels et des combinaisons de symboles qu'il est possible (et parfois souhaitable) de manipuler sans se soucier du sens. L'accident le plus fréquent dans l'apprentissage des mathématiques est la perte du sens et le repli sur la forme sans contenu : ne plus penser et se contenter d'exécuter des algorithmes selon l'unique procédé permis devient rapidement insoutenable[5]. »

Les plus jeunes élèves font l'expérience de ce dérapage. Tout au début du comptage par exemple. Quelqu'un qui regarde durant une seconde une petite dizaine d'animaux disposés de façon anarchique dans un pré est dans l'impossibilité d'en exprimer le nombre exact ; alors que s'il voit une structure complexe comme un pont, il voit tout de suite de quoi il s'agit. Le plural n'est pas simple à saisir. F. Lemay (1979) parle de mur du plural difficilement accessible. Pourtant, dit-il, « il est allégrement franchi ou du moins sans heurt apparent dès le premier jour d'école. » Le terme « neuf » par exemple ne devient pas significatif pour l'élève parce qu'il arrive à répéter la suite « un, deux, trois…, huit, neuf, dix » et que l'on dit qu'il sait compter.

Malgré l'absence de contexte pour les opérations effectuées, l'abandon trop rapide du matériel permettant les manipulations, la rareté des sources d'intuitions géométriques, beaucoup d'enfants savent compter, c'est-à-dire énumérer une liste de sons et les mettre en rapport avec des collections d'objets. Beaucoup d'enfants connaissent le mécanisme de l'addition écrite, avec les reports. Beaucoup d'enfants connaissent les tables par deux, par trois… Et savent faire des multiplications mentales ou écrites. Beaucoup ! Tandis que d'autres et pas spécialement les moins intelligents font une première expérience de manque de sens. Tout va tellement vite.

Bien sûr, on ne peut pas attendre de l'élève qu'il refasse l'histoire des numérations[6] longue de nombreux millénaires ; la première numération écrite[7] connue date de 4 000 ans avant J.-C., en terre de Mésopotamie (actuel Irak) et d'Elam (actuel Iran). Bien sûr, on n'a pas le temps de lui faire réellement découvrir en quoi s'impose une numération de position, quels sont les avantages et les inconvénients de la base dix, pourquoi le zéro est nécessaire. Mais des maîtres plus instruits de l'histoire seraient plus conscients des seuils à franchir dans l'apprentissage du système décimal et pourraient faire travailler plus longuement leurs élèves sur les notions clés. Certains le font déjà.

Au début du secondaire, il y a un monstre qui s'appelle algèbre. Il y a des mois de factorisation, des semaines de produits remarquables et des jours de résolution d'équation. Malgré cela, en sixième année, peu d'élèves savent mettre une situation en équation. Et quand un élève « fait passer les *x* de l'autre côté », il ne sait pas très bien si c'est additivement ou multiplicativement et pourquoi. Ils manipulent des symboles hors de tout contexte et sans les commenter dans leur langue maternelle. Ils doivent retenir des opérations constituées en dogme, il y a ce qu'on peut faire et ce qu'on ne peut pas faire. Et tout cela, paraît-il, parce que ça servira plus tard. Ça passe ou ça craque. Une fois encore, un grand nombre de jeunes passent à côté du sens et développent souvent un univers de sens parallèle[8].

À la fin du secondaire des élèves dérivent des fonctions sans avoir appréhendé la richesse du concept de dérivation et en avoir soupçonné la quantité d'applications. Pire, des élèves faibles que l'on juge incapables de comprendre l'outil, on se contente d'exiger qu'ils sachent calculer. Et eux, rassurés, se contentent de la réussite momentanée.

Tout se passe comme si l'enseignement des maths était une vaste entreprise de théorisation hâtive et de formalisation précoce. On se prive d'un enracinement profond des notions étudiées, passant par la rencontre de ces notions dans des contextes variés qui leur donnent sens. On oublie le caractère instrumental des concepts pour s'attarder longuement sur le calcul. On méprise l'histoire qui nous enseigne que chaque découverte est une réponse à un problème, que la maturation des théories a le plus souvent été longue, détournée et hésitante et on voudrait faire acquérir « pour de bon », en une année, des concepts compliqués. On sanctionne régulièrement les erreurs alors que l'évaluation est naturelle et continue pour l'élève amené à réinvestir dans de nouveaux problèmes ce qu'il a acquis sur les chantiers de problèmes déjà résolus.

PARTIE III

À quoi ça sert ?

Chapitre IX

Des mathématiques à deux vitesses ?

« Le monde, tant social que physique, fait l'objet d'une mathématisation de plus en plus rapide (DAVIS, 1988). »

« L'industrie (au sens large, pas seulement les secteurs primaire et secondaire, mais également le secteur tertiaire) a besoin de mathématiques et de mathématiciens (DUBY, 1989). »

L'empire mathématique s'étend… Non sans ombres et sans menaces.

« Une enquête américaine a établi il y a quelques années que 80 % de la population adulte évitait de calculer, de compter, de se servir de nombres (SCHATZMAN, 1989). »

« Pourquoi tant de personnes sont-elles analphabètes mathématiques (KANFER, 1989) ? »

« Les matheux n'ont pas la foi. Pour les élèves des sections scientifiques, les mathématiques servent à réussir, mais non à réfléchir (DAVIS, 1985). »

Cent mille volumes de format moyen pourraient rassembler la connaissance mathématique actuelle. Celle-ci s'enrichit chaque année de deux cent mille nouveaux théorèmes. Les textes mathématiques peuvent être divisés en plus de trois mille sous-catégories. L'océan s'étend en profondeur et en largeur. Contrairement à ce qui se passait au siècle précédent, aucun mathématicien, seul, ne peut savoir où vont les mathématiques et il ne comprend plus qu'un petit pourcentage de ses pairs.

Cette croissance est loin de décliner, car « il y a deux sources inépuisables de nouvelles questions mathématiques. L'une des sources est le développement de la science et de la technologie. L'autre source provient des mathématiques elles-mêmes[6] ». Chaque résultat, aboutissement d'une recherche, est aussi point de départ potentiel pour d'autres recherches.

Les chiffres nous envahissent, les statistiques et les probabilités prolifèrent, l'informatique occupe tous les terrains, la modélisation mathématique, présente en physique et chimie depuis longtemps, a gagné également la médecine, l’économie, la sociologie et d’autres. À tort ou à raison, ce sont maintenant des disciplines comme la linguistique, le droit ou la politique (PASSET, 1989) qui utilisent des mathématiques.

Ombres

Au revers de cette image de mathématiques à grande vitesse, quelques constats nous renvoient plutôt à une certaine immobilité dans la pratique mathématique.

Le plus important, le plus alarmant, c’est l’analphabétisme mathématique qui recouvre l’illettrisme (des chiffres), la discalculie, l’inculture ou la gêne d’un grand nombre, même parmi les gens instruits, devant des proportions, des pourcentages, des graphiques. L’échec en maths est ravageur à l’école, quel que soit son niveau. Et ceux qui en sortent ont un savoir mathématique inopérant.

Le mathématicien Steen (STEEN, 1989) constate, pour sa part, que l’intérêt des étudiants pour les mathématiques va décroissant, aussi bien dans les pays de l’Ouest que dans les pays en voie de développement. Cela est confirmé par les statistiques françaises de la répartition des bacheliers ; la population des sections scientifiques est en baisse relative par rapport à l’ensemble des bacheliers.

En France, le « déséquilibre de la pyramide des âges des chercheurs mathématiciens va inéluctablement produire un vieillissement et des départs massifs en quelques années autour de l’an 2000 » (HUET, 1989). Ce sera certainement le cas en Belgique également, tant le recrutement a été ralenti ces quinze dernières années.

Un même phénomène de rareté est à craindre dans l’enseignement. Des pays comme les États-Unis et la France déploreraient la pénurie. En Belgique, les nombreuses restrictions successives dans l'enseignement masquent le phénomène.

La faute à qui ?

La responsabilité des maux décrits ne peut entièrement être imputée à l’enseignement, mais celui-ci est au cœur du problème. Sélectives, impérialistes, absconses, dogmatiques, mal enseignées, les mathématiques ont un méchant look.

Une commission, présidée par P. Danblon, mise sur pied par le ministre de l'Éducation pour étudier tous les aspects relatifs à l'enseignement des mathématiques en Communauté française a mis en évidence un écueil majeur : la perte de sens. « Les mathématiques sont une forme de pensée riche de sens, mais qui s'appuie sur des enchaînements formels et des combinaisons de symboles qu'il est possible (et parfois souhaitable) de manipuler sans se soucier du sens. L'accident le plus fréquent dans l'apprentissage des mathématiques est la perte de sens et le repli sur la forme sans contenu : ne plus penser et se contenter d'exécuter des algorithmes selon l'unique procédé permis devient rapidement insoutenable[1] . » En France, le mathématicien[2] chargé d'une mission semblable a remis ses conclusions. « Il y a trop de maths pour tout le monde dans des classes où les sciences expérimentales ne sont pas assez développées, où les travaux en laboratoire sont très insuffisants. (…) Les plages de temps réservées au travail scientifique sont tout à fait insuffisantes. Il y a trop peu de temps pour chercher. (…) Je propose un réaménagement horaire pour que les élèves puissent approfondir les connaissances, préparer des projets, travailler en groupe. (…) En maths, il faut accepter de passer du temps, de chercher et de chercher encore. » (HUSSET, 1989.)

Pour donner sens aux concepts abordés, il faut les situer dans des contextes problématiques, partir du terrain des élèves, répondre à des questions qu'ils se posent ou les accrocher par des questions provocatrices. Il faut permettre et exploiter les erreurs. Il faut susciter de nouvelles questions à partir des réponses apportées.

Que faire de la dualité ?

D'une part, la connaissance mathématique a une croissance exponentielle ; d'autre part, la pratique mathématique a du plomb dans l'aile, à divers niveaux. Mathématiques à deux vitesses ! On peut se satisfaire de ces constatations, conclure par un « et après ? » ; les hommes peuvent vivre sans mathématiques, il n'y a pas d'équation du bonheur, il faut surtout de bons politiques, la planète a un plus grand besoin de médecins que de mathématiciens… Ou s'interroger sur les conséquences sociales et politiques du fossé qui se creuse entre une élite qui développe un savoir et une masse qui y reste étrangère. On peut croire qu'un « plus » mathématique améliorerait la vie de chacun, rendrait le citoyen plus à l'aise, plus critique face aux nombres, aux graphiques, aux sondages… On peut espérer un meilleur discernement dans les applications quelque fois outrancières des mathématiques utilisées pour donner une caution de rigueur et d'objectivité aux propos de certains agissant par ignorance ou malhonnêteté.

L'enseignement est au centre du débat. Il ne remplit pas sa tâche minimale, celle qui consiste à endiguer puis supprimer l'analphabétisme. Pour B. Charlot (*in* BERNARD, 1988), la conception formaliste et élitiste des mathématiques enseignées depuis vingt ans, coupée des réalités économiques et sociales, risque d'être condamnée dans la société du XXI[e] siècle, qui valorisera des compétences (initiative, communication…) qui leur sont actuellement étrangères.

Des réformes, quelque fois mal comprises, sont en cours. La route est encore longue.

Chapitre X

Les mots pour le dire… en mathématique

Parlant activité mathématique et scientifique, on évoque symbolisation, abstraction, modélisation, théorisation, formalisation, généralisation et bien choses d'autres encore.

Attardons-nous quelques lignes à chacun des termes cités. Sans avoir la prétention d'être exhaustif, avec l'espoir de clarifier quelque peu des termes usités dans la pratique professionnelle ou l'apprentissage des sciences.

Symboles

Ils constituent une part importante des discours et textes mathématiques qu'ils ont pour fonction d'écourter, simplifier, rendre plus lisibles.

Entre les expressions « quelque soit le réel strictement positif *r*, il existe un entier positif *n* dont l'inverse est plus petit que *r* » et

$$« \ \forall r \in \mathbf{R}_{\mathbf{0}}^{+},\ \exists\ n \in \mathbf{N} : \frac{1}{n} < r \ »$$

qui veulent dire la même chose, on voit la différence.

Très jeunes, les enfants sont confrontés aux symboles avec les dix chiffres, le système de numération décimal et positionnel puis les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division.

Les symboles apportent généralement en précision bien qu'ils soient souvent porteurs de significations multiples. « + » et « – » désignent des opérations qui suivent des règles précises tout en recouvrant plusieurs situations concrètes. Mais une symbolisation outrancière rend un texte incompréhensible. C'est un travers des cours de sciences où des symboles familiers aux professeurs restent des « pas de sens » pour les élèves. L'apprentissage du calcul algébrique, si pénible pour beaucoup, en est la preuve.

Abstraction

Il y a abstrait et abstrait. L'abstraction par extraction (Davis et Hersh, 1985) s'illustre bien par la notion de nombre. De collections d'objets différents pouvant être mises en correspondance terme à terme, émerge un nombre ; d'ensembles aussi différents que trois pommes, trois vaches, trois couffins, on retire le nombre « trois ».

L' abstraction par idéalisation, quant à elle… Excusez-moi, j'aurais voulu poursuivre mon développement au sujet de l'abstraction, mais il y a deux maçons qui viennent d'arriver.

« Ben oui, demain on bétonne la terrasse. C'est un camion mélangeur qui amène le béton tout préparé. Pour ne pas payer de supplément, il faut le vider en 20 minutes. Il faut aller vite. Tout doit être prêt ; à ce moment-là, il sera trop tard pour réfléchir. Roger (c'est le chef) me fait tenir un petite boîte et m'envoie à une extrémité du mur arrière de la maison. Jean-Marie (l'autre maçon, celui qui n'est pas chef) tient le bout de la ficelle qui sort de la boîte que j'ai en main et celle-ci se déroule tandis qu'il se dirige à l'autre extrémité. La ficelle est élastique et recouverte de craie bleue (j'ai compris le mystère de la petite boîte). Une fois que Jean-Marie est en place et que la ficelle est bien tendue, Roger, après s'être assuré qu'elle était bien horizontale, la pince et la lâche d'un coup sec. Sur le mur apparaît une ligne bleue et bien droite. C'est le niveau que devra atteindre le béton. »

Droites bien droites

Les maçons sont partis, revenons-en à l'abstraction. Quand je dis « bien droite », c'est une façon de parler. Parce que la trace bleue a été faite sur un mur de briques. Autrement dit, elle est sur une brique, puis sur un joint de ciment un peu en retrait par rapport à la brique, puis sur une autre brique, et ainsi de suite. Enfin, s'il n'y avait pas de ciment et qu'il n'y avait que de la brique, elle serait bien droite. Quoique… La brique n'est pas régulière. Il faut imaginer un mur tout lisse. Mais de toute façon le trait est trop large, c'est plutôt une bande qu'une droite. D'accord ! Faudrait presque que la ligne n'ait pas de largeur. Comme l'arête d'une table. Oui, mais l'arête d'une table, c'est limité. Faudrait imaginer qu'on puisse la prolonger dans les deux sens, aussi loin qu'on veut. Ça devient abstrait. La ligne bleue, ça va. Mais cette histoire de droite bien droite, sans épaisseur et infinie…

En géométrie, on ne se préoccupe même pas de la définition de la droite. On précise seulement des propriétés qui la concernent. Comme si on ne s'intéressait pas à ce qu'elle est mais seulement à son usage : *a*) par deux points passe une et une seule droite ; *b*) il y a au moins deux points sur une droite ; *c*) il existe au moins trois points non alignés. Ces propriétés, admises au départ de la théorie et appelées axiomes, paraissent simples mais n'éclairent pas toutes les questions intuitives que l'on se pose, à propos de la droite et de ses points par exemple. Combien y a-t-il de points sur une droite ? Qu'engendre-t-on avec deux, trois, quatre ou mille points placés l'un à côté de l'autre. Comment place-t-on des points l'un à côté de l'autre ? Les points sont-ils des zéros d'étendue comme certains l'affirment ?

Toutes ces questions ont été controversées et alimentées durant plus de vingt siècles par des mathématiciens comme Aristote, Galilée, Pascal, Dedekind, Cantor[1].

Droites courbes

La droite géométrique a beau être un objet abstrait par rapport à la ligne bleue du maçon, elle n'en est pas moins un objet réel, familier dans l'imagination du mathématicien.

À un degré d'abstraction plus élevé, « lorsque les choses dont on s'occupe se dérobent à l'imagination – mais c'est toujours provisoire – le seul recours est de s'accrocher aux propriétés qu'on leur attribue et qui, même si on ne les voit pas, peuvent servir à raisonner » (ROUCHE, 1995).

La remise en cause de l'axiome des parallèles, qui précise que par un point, on peut mener une et une seule droite parallèle à une droite donnée, a été, dans l'histoire, source de nouvelles géométries qui heurtent quelque fois ce qu'on appelle le bon sens. Si vous êtes à la surface d'une sphère sans le savoir et que vous tracez une droite ou encore le plus court chemin entre deux points, un observateur sur la Lune vous verra décrire un arc de grand cercle[2]. Avec trois droites – pour l'observateur extérieur, trois grands cercles – qui se coupent deux à deux comme à la fig. 1, on peut former un triangle dont la somme des angles vaut 270^0, ou même plus.

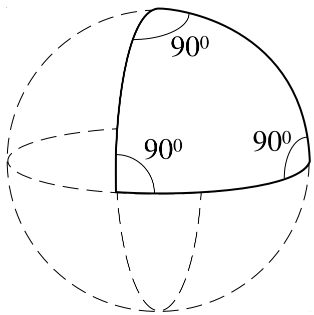


FIG. 1.

Au stade ultime (?) de l'abstraction, on ne s'intéresse plus qu'aux structures sans référence à ce dont elles s'occupent, « seule la forme des relations et des déductions demeure, le fond est oublié (d'où la locution très courante de structure formelle synonyme de structure abstraite). On peut dire également que dans une telle structure seule la syntaxe est étudiée, tandis que le sens est volontairement délaissé. »

Ainsi, à partir du concret par idéalisation ou du multiconcret par extraction, l'abstrait se construit, devient familier, est à l'origine d'une autre abstraction. L'abstrait est en devenir, dans l'opération d'abstraire, c'est un va-et-vient entre concrets, entre concrets et ce qui les unit, c'est une démarche où l'aboutissement d'un processus devient point de départ d'un autre processus.

Dans l'enseignement des mathématiques, on a oublié durant de nombreuses années, on oublie encore que c'est le multiconcret qui nourrit l'abstrait, que les manipulations et les observations constituent un passage incontournable, que les sources d'intuition doivent être nombreuses et variées (pour être à la mode, on pourrait dire différenciées). À l'opposé, certains pédagogues et enseignants, prônant l'activité des élèves, ont oublié qu'il faut dépasser le stade des manipulations pour faire des mathématiques, par nature assez rapidement abstraites. Il ne suffit pas d'enchaîner des situations problèmes pour faire apprendre, mais il faut les articuler pour qu'elles mènent quelque part, avec un souci de cohérence globale.

Modèles et Théories

La matière est constituée d'électrons, de neutrons et de protons. C'est un modèle (la réalité n'est pas comme cela, elle est plus complexe). À partir des modèles d'onde, de corps noir, de diffraction, on peut expliquer pourquoi le ciel est bleu, le soleil jaune en général et rouge quand il se couche. On juge les modèles aux hypothèses sur lesquelles ils reposent et à la conformité de leurs prédictions à la réalité.

Une théorie est un ensemble de concepts articulés selon une logique propre avec des axiomes ou postulats, des hypothèses, des équations ou lois, des preuves ou démonstrations, des résultats ou propositions ou théorèmes. Certaines théories se développent en réponse à des problèmes internes aux mathématiques et ne sont « utiles » que plus tard, ou jamais, en tant que modèles d'une réalité.

Peut-on proposer des activités de modélisation aux élèves ? On peut certainement centrer un travail de recherche sur quelques concepts-clés, pour élaborer des parties de théorie.

Formalisation

« C'est le processus par lequel les mathématiques s'adaptent à un traitement mécanique. Un programme d'ordinateur est un exemple de texte formalisé. » (Davis et Hersh, 1985.) Le texte formalisé est une suite de symboles. Il est à visage inhumain. Pour les formalistes, les mathématiques sont déductives, partant d'axiomes, pour aboutir aux théorèmes. La signification et la véracité importent peu, c'est la rigueur démonstrative qui compte.

Dans les années septante, les manuels de mathématiques du secondaire ont été submergés par la théorie des ensembles et son langage formel. Les cours étaient des séances de lemmes, théorèmes, démonstrations, corollaires. L'enseignement primaire en porte encore les stigmates puisque, pour se préparer au secondaire, les pauvres élèves doivent encore s'imaginer avec leur papa comme des couples de la relation « a pour père » qui n'est ni réflexive, ni symétrique, ni transitive.

On confond souvent formalisation et théorisation. Même si les deux sont très liées en mathématiques, le rejet de la pratique excessive de la première dans les cours n'inclut pas, contrairement à ce que beaucoup pensent, le rejet de la seconde. Il faut apprendre à théoriser sans aller trop vite aux structures formelles.

Généralisation

Les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu. Généralisation : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Généralisation abusive : les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu. Les résultats du particulier restent vrais pour le général ou sont modifiés, mais le mathématicien est toujours poussé à généraliser.

Le va-et-vient entre particulier et général est une méthode utile à la recherche. Pour certains problèmes, il est bon de particulariser pour se construire une intuition, conjecturer un résultat avant de tenter un règlement général de la question. Pour d'autres, il est plus commode d'examiner le cas général et d'en faire découler des effets particuliers.

Chapitre XI

Mathématique : Pour qui ? Pour quoi ?

La boulangère, l'homme de droit, l'interprète et le prof de math (c'est un collègue mais il ne faut pas le dire) sont unanimes : les mathématiques sont i-nu-ti-les. S'il y a encore des mathématiciens ? Pour quoi faire ? Que peut-on encore trouver aujourd'hui ? Pythagore, Euclide, Thalès : peut-être que oui ! Leibniz, Weierstass, Robinson : bof. Aujourd'hui, il n'y en a plus aucun de connu, ils travaillent dans des petits bureaux et font des calculs pour lancer des fusées et on ne sait tout quoi.

À l'université, il y a des cours de math en candidature dans presque toutes les facultés. Surtout pour sélectionner !

Dans le secondaire, on fait des mathématiques pour former le caractère, développer la capacité à faire des efforts. Et on sélectionne (aussi) : les bons, on peut leur apprendre à raisonner, exercer leur vivacité intellectuelle, leur faire comprendre un langage qui mène à l'abstraction ; pour les plus faibles, il y a du calcul et du calcul. C'est peut-être ennuyeux mais rassurant. C'est le drill qui sauve ceux qui ne peuvent comprendre.

En primaire, on apprend à compter, ça sert. Enfin, si ça ne sert pas vraiment à l'élève, ça sert à distinguer les meilleurs des moins mauvais. Apprennent-ils réellement à compter ? Parce qu'avec tous ces machins d'ensembles et les dessins de patates, on ne sait pas très bien comment les gosses s'en sortent.

L'utilité

Que l'épicier, l'huissier ou le médecin soient d'accord pour renvoyer les mathématiques au rang de gymnastique intellectuelle stérile, c'est une chose. Mais notre devoir de prof de math est de les convaincre, ou du moins d'en faire l'essai, que les mathématiques améliorent leur pouvoir sur le réel. Nous devons être sûr que leurs enfants, nos élèves, ne renient les mathématiques qu'en dernier ressort et en bonne connaissance de cause.

Est utile ce qui permet d'améliorer son existence matérielle et sociale : vivre, vivre mieux, se nourrir, s'abriter, gérer son environnement naturel, s'intégrer dans un groupe, comprendre, éventuellement diriger, améliorer son statut social. Un savoir, c'est un pouvoir que l'on se donne pour réaliser un objectif : arriver au terme d'un projet élaboré seul ou collectivement et basé sur l'espoir, voire la conviction, qu'on peut mieux s'en sortir.

Le calcul de base, savoir compter, connaître les quatre opérations, presque personne ne le discute, cela paraît incontournable. Mais au-delà…

Nous allons envisager plusieurs utilités des mathématiques, qui dépassent peu ou prou ce niveau élémentaire, en essayant de les faire comprendre au travers de problèmes. « Problèmes », le mot-clé, la matière première en mathématiques. Poser des questions, les résoudre et/ou poser de nouvelles questions.

Mathématiques de la vie concrète

1. On consomme, on achète, on vend. Dans ces actions, que de mathématiques !

J'ai acheté du carrelage pour vingt mille francs (prix hors TVA) avec un remise de 20 %. La TVA était de 20,5 %. Au moment de payer, le vendeur me dit :

« Finalement pour la remise, il suffit que je laisse tomber la TVA, vous ne me devez que 20 000 francs.

– Non, répondis-je. Calculez d'abord la remise et puis la TVA.

– Ah, je vois que vous êtes un petit malin. »

Faisons le calcul. Avec une remise de 20 %, le prix hors TVA est de $20\,000 - 20\ \%$ de $20\,000$, c'est-à-dire :

$$20\,000 - \left(20\,000 \times \frac{20}{100}\right) = 20\,000 - 4\,000 = 16\,000.$$

On aurait pu calculer d'un seul coup,

$80\ \%$ de $20\,000$ ou $20\,000 \times \dfrac{80}{100} = 16\,000$.

Appliquons la TVA, le prix est de

$16\,000 + 20{,}5\ \%$ de $16\,000$, ou

$$16000+\left(16000\times\frac{20,5}{100}\right)=16000+3280=19280.$$

J'ai gagné 720 francs en peu de temps.

2. J'ai acheté (encore, pensez-vous) une serre et je désire construire une base « en dur », c'est-à-dire une petite fondation en béton surmontée d'une rangée de blocs. La fondation, ça peut être approximatif, mais pour le bloc, il faut être précis. Au départ, j'ai planté quatre piquets dans le sol et je les ai reliés par une ficelle en respectant les longueurs et largeurs données par le fabricant en millimètres (L = 3767 mm, l = 2512 mm). Dans le livre d'accompagnement, ils conseillent de vérifier l'égalité des diagonales pour s'assurer qu'on a bien un rectangle. C'est un bon moyen de vérifier… Après coup ! Mais comment faire pour corriger ? Dès qu'on touche à un piquet, tout change. En fait, pour planter les deux premiers piquets, il n'y a aucun problème, il suffit de respecter la longueur. Mais au troisième, il faudrait déjà être sûr d'avoir formé un angle droit.

Grâce au théorème de Pythagore, j'ai calculé[1] la longueur de la diagonale d (toujours en millimètres) :

$$d^2=L^2+l^2 \text{ ou } d=\sqrt{L^2+l^2}\cong 4528 \quad .$$

J'ai planté un premier piquet, un second à 3,77 m (j'ai arrondi) pour faire une longueur. Pour le troisième piquet, j'ai attaché une ficelle de 2,51 m correspondant à la largeur, au deuxième piquet, et une ficelle de 4,53 m correspondant à la diagonale calculée, au premier piquet. En rapprochant les deux extrémités des ficelles bien tendues, j'ai obtenu la place du troisième piquet (fig. 1).

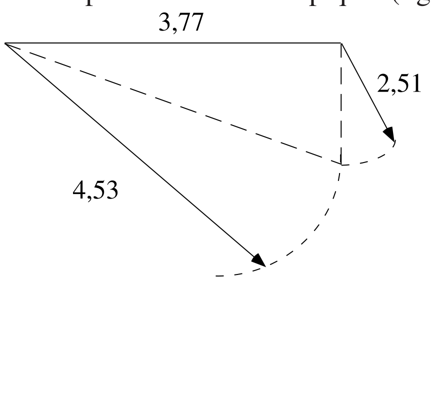


FIG. 1.

3. Combien de gens ont une bonne vue spatiale ? Durant vingt années de football, j'ai pu me rendre compte de la mauvaise perception spatiale de mes coéquipiers. À l'entraînement, combien de fois les ai-je vus partir dans tous les sens, alors que l'entraîneur venait d'expliquer une phase de jeu avec précision, en montrant clairement les mouvements. Ce n'était pourtant que de la géométrie plane.

Avoir une bonne perception de l'espace pour s'y mouvoir avec aisance, c'est une chose, communiquer à propos de l'espace en est une autre. Passer d'une représentation plane à un solide ou l'inverse, c'est important.

Un proche a fait construire, il y a quelques années. Sur le plan, tout est bien. Mais quand c'est fini… La cuisine, par exemple, est beaucoup trop petite et pour aller de celle-ci à la cave (un chemin souvent emprunté) il faut franchir une porte, pour se retrouver sur un petit palier, descendre des marches, arriver dans le garage après avoir franchi une seconde porte, traverser une moitié de celui-ci, ouvrir une troisième porte pour descendre à la cave.

Faites un essai pour juger de la qualité de votre propre perception. À la fig. 2, vous pouvez voir la façade avant (*a*), les vues du rez-de-chaussée (*b*) et de l'étage (*c*), la coupe AA (*d*) d'un bâtiment. Dessinez la façade arrière manquante.

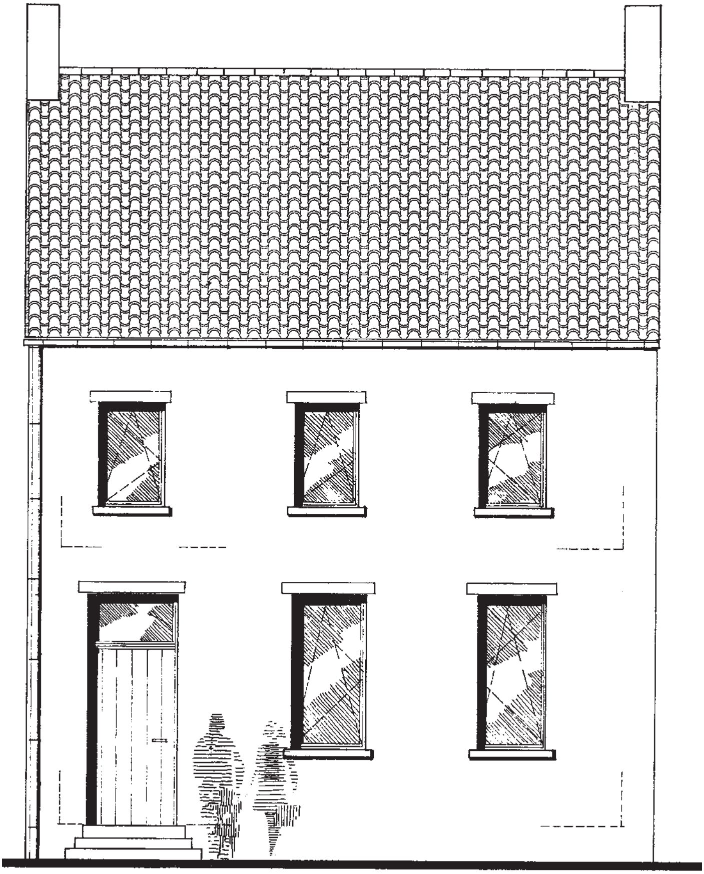


FIG. 2 (*a*).

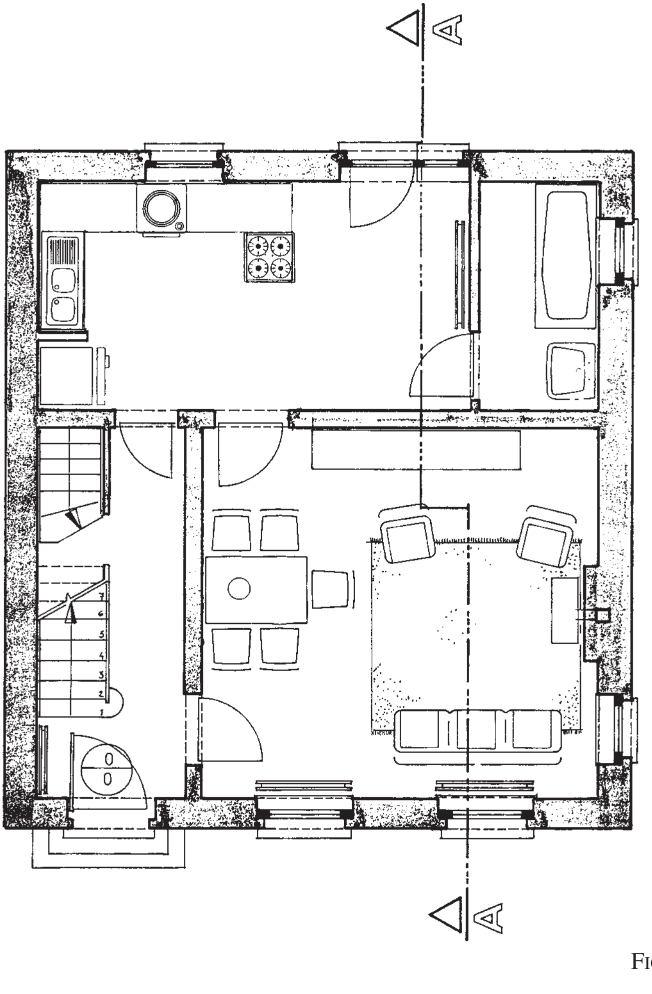


FIG. 2 (*b*).

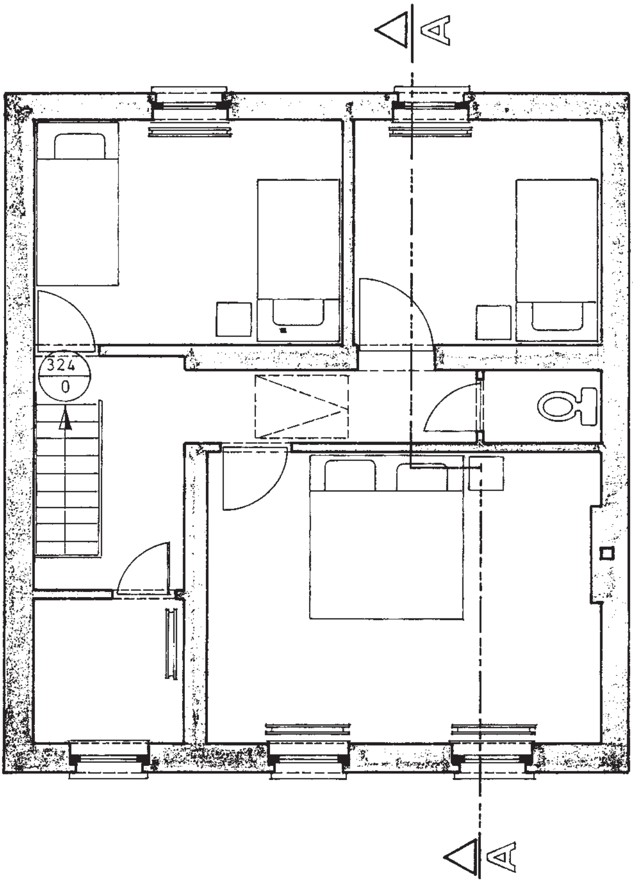


FIG. 2 (*c*).

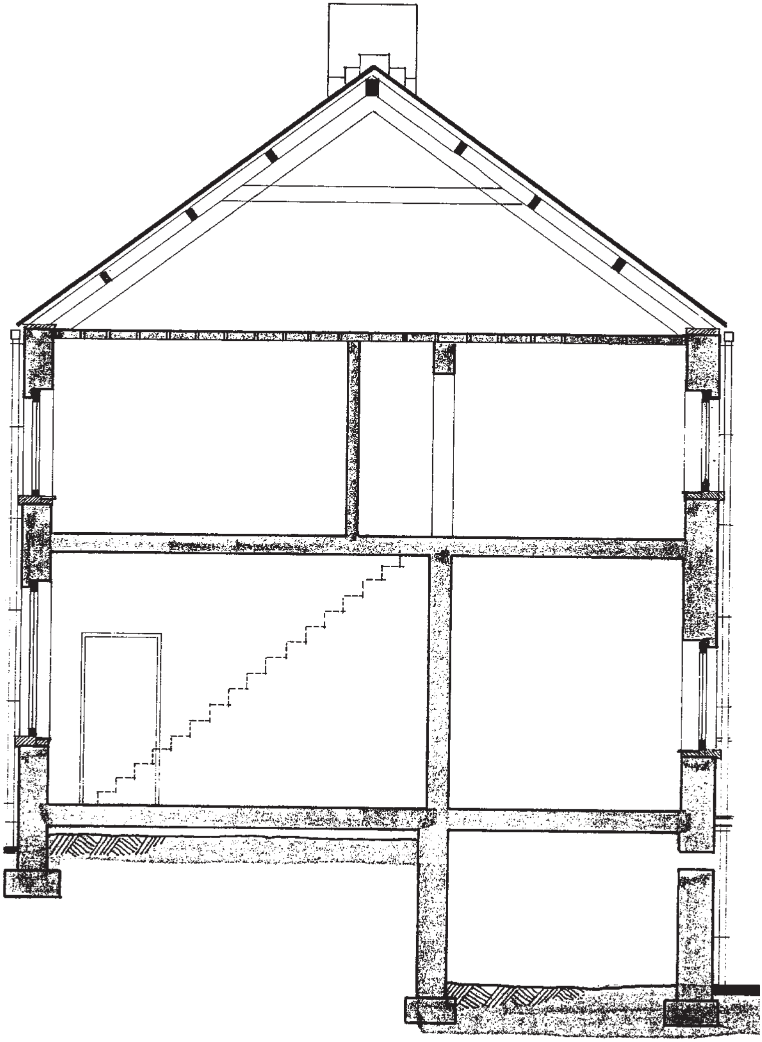


FIG. 2 (*d*).

4. Il faut souvent faire la file à la photocopieuse. Parfois ça dure, surtout quand c'est un collègue peu habile qui doit faire des réductions ou des agrandissements. Il photocopie un petit feuillet A5 qu'il veut doubler pour l'avoir sur une feuille A4. Il sélectionne la valeur 200 %. C'est trop grand. Quelqu'un lui indique qu'il faut sélectionner 141 %. Sans bien comprendre, perplexe, il exécute. Il n'a qu'une partie de son texte. On lui conseille de changer sa feuille de position, de la placer dans un autre coin.

Pour passer d'un motif à son agrandissement, la photocopieuse opère ce que d'un point de vue mathématique, on appelle une homothétie. Celle-ci est caractérisée par un centre (un des coins de la fenêtre de la photocopieuse, généralement bien renseigné), appelons-le O et un rapport, appelons-le r. À partir du centre O (fig. 3), chaque point P de la feuille de départ est envoyé en P', qui se trouve à un distance de $r \times$ (distance de O à P).

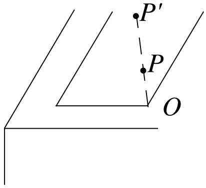


FIG. 3.

Lors d'une telle transformation, si les longueurs sont toutes multipliées par le coefficient r, les aires sont multipliées par le coefficient r^2. Prenons le cas d'un rectangle de longueur L, de largeur l et d'aire $L \times l$: après transformation la longueur sera $r \times L$, la largeur $r \times l$ et l'aire $r \times L \times r \times l$ ou encore $r \times r \times \mathrm{L} \times l$ ou encore $r^2 \times L \times l$.

Pour la majeure partie des photocopieuses, le pourcentage indiqué est le rapport des longueurs ou le rapport d'homothétie et non un rapport d'aires. Avec 200 % ou $r = 2$, les longueurs sont doublées et les aires sont donc quadruplées. Avec 141 % ou $r = 1{,}41$, les aires sont multipliées par $1{,}41^2 = 1{,}998 \cong 2$.

Un éditeur à qui je demande un jour à quel format correspond l'épreuve qu'il m'a envoyée par rapport au format d'édition me dit : « c'est très simple, j'avais fait une première réduction à 71 %, puis j'ai fait un agrandissement à 122 %, c'est donc un format 1/1. J'essaie de lui expliquer que ce n'est pas le cas et qu'il aurait dû faire un agrandissement à 141 %, mais il coupe rapidement court à la conversation en disant : « Écoutez, c'est vous le mathématicien, je vous fais confiance. »

71 % pour les longueurs (au sens large), cela donne un rapport d'homothétie r = 0,71 et un rapport pour les aires $r^2 = 0{,}5041 \cong 1/2$. Par contre, 122 % correspond à un rapport $r = 1{,}22$ et $r^2 = 1{,}4884 \cong 1{,}5$. En divisant l'aire par deux lors d'une première opération, puis en la multipliant par 1,5 on n'obtient pas le format initial. Il faut doubler les aires lors de la seconde opération pour revenir au format initial, c'est-à-dire sélectionner 141 %.

Il faut noter que depuis le règne de la photocopie, le format A4 et ses dérivés en amont (A3, A2, A1 et A0 qui vaut 1 m^2) comme en aval (A5, A6) se sont imposés en Europe face à d'autres formats en vigueur il y a quelques années (le quarto, par exemple). La raison est que l'on passe facilement d'un format à l'autre en pliant la feuille en deux sur sa longueur (fig. 4) et que tous les formats sont homothétiques ou semblables (fig. 5), c'est-à-dire de même forme. Si le format A0 fait 1 m^2, le format A1 fait 1/2 m^2, le format A2 fait 1/4 m^2, le format A3 fait 1/8 m^2, le format A4 fait 1/16 m^2, et ainsi de suite. Si tous ces rectangles ont la même forme, le rapport de la longueur à la largeur est constant quel que soit le format. Dès lors, si L et l sont les longueur et largeur du format A4, alors les longueur et largeur du format A3 valent respectivement $2l$ et L, et

$$\frac{L}{l} = \frac{2l}{L} \; .$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par L/l, on obtient :

$$\frac{L}{l} \times \frac{L}{l} = \frac{2l}{L} \times \frac{L}{l} \quad \text{ou encore} \quad \left(\frac{L}{l}\right)^2 = \frac{2 \times l \times L}{L \times l} = 2$$

et $\dfrac{L}{l} = \sqrt{2} \cong 1{,}41$.

Le rapport de la longueur à la largeur d'une feuille A4 (ou A0, A1,…) est donc la racine carrée de deux.

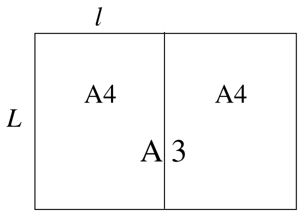


FIG. 4.

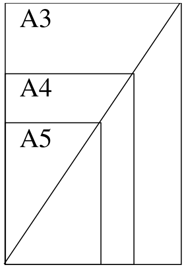


FIG. 5.

Mathématiques du citoyen.

1. Aujourd'hui, on sonde à tous propos, on fait des statistiques, on exprime des pourcentages, on se lance dans des prévisions, on calcule les chances que l'on a de réussir tel test, d'attraper telle maladie, de mourir au volant, en fumant, en buvant…

Une grande confusion existe notamment entre statistiques et probabilité. J'ai lu il y a peu, dans un article traitant de formation et d'emploi, que « des jeunes sans qualification et/ou en décrochage scolaire (20 % de l'Union européenne) ont quatre fois moins de chances que leurs collègues sortis de l'école » de trouver un emploi. Sans s'arrêter au 20 % de l'Union impossible à déchiffrer (car on ne sait pas 20 % de quoi ; les jeunes, la population, les chômeurs ?), on peut comprendre que le pourcentage de jeunes chômeurs sans qualification par rapport au nombre de jeunes sans qualification, est quatre fois plus élevé que le pourcentage de jeunes chômeurs diplômés par rapport au nombre de jeunes diplômés. Ou selon une autre interprétation, croire qu'il y a, en Europe, quatre fois plus de chômeurs sans qualification que de chômeurs diplômés. De toutes façons il ne s'agit que de statistiques et non de probabilité. Même si le journal ne l'a pas voulu, un glissement dangereux consisterait à interpréter la phrase comme une prédiction sur les chances qu'à un jeune donné de trouver un emploi. Jacques n'est pas Paul, même s'ils sont tous les deux sans qualification et qu'ils entrent tous deux dans la même catégorie statistique, l'un sera peut-être plus chanceux ou trouvera plus facilement du travail parce qu'il est plus débrouillard ou plus sympathique ou…

La confusion entre statistiques et probabilité peut induire des comportements fatalistes : « L'année passée, 50 % des étudiants de première ont réussi, on verra bien si je suis dans la bonne moitié », ou pervers : « Si Untel échoue, j'aurai d'autant plus de chances de réussir ».

Une compagnie d'assurances, par contre, transforme les statistiques en probabilités. C'est à partir du nombre d'accidents et du type d'accident qu'elle évalue le risque à couvrir et qu'elle peut fixer le montant des primes.

2. En France, « l'industrie du jeu représente 58 milliards de francs, soit l'équivalent du budget des Affaires sociales et de la Santé, et les taxes rapportent 14 milliards à l'État, soit deux fois plus que l'impôt sur la fortune et l'équivalent du budget affecté à la culture… (ROSE, 1993). » Le Lotto et autres loteries ne sont rien d'autre pour les États belge et français notamment, que des formes d'impôt payés sur base volontaire. La probabilité de gain a beau être très mince et l'espoir de gain négatif, beaucoup de gens, de façon irrationnelle et attirés par les sommes importantes, jouent. De façon à aider le joueur dans ses choix, un quotidien liégeois publiait régulièrement la « réussite » ou le nombre de sorties de chaque numéro (il y a 42 boules au Lotto belge) comme gagnant et comme complémentaire depuis le premier tirage en 1978, la « fréquence » ou le nombre de sorties de chaque numéro depuis une certaine date et « l'écart » ou le nombre de tirages depuis la dernière sortie de chaque numéro. Tel lecteur mise sur les valeurs sûres, celles qui sont sorties le plus souvent, un autre joue les valeurs qui ont le vent en poupe, celles qui sortent fréquemment « ces moments-ci », un troisième joue les numéros frais, ceux qui ne sont plus sortis depuis un bon bout de temps. Mais personne ne joue les numéros 1 à 6 ou 37 à 42.

Regardons de plus près. À chaque tirage, chaque numéro a autant de chances de sortir que les autres qui sont dans le panier, c'est-à-dire 1 chance sur 42 pour la première boule tirée, 1 chance sur 41 pour le seconde, et ainsi de suite. Pour évaluer la probabilité d'un tirage donné et sans tenir compte du numéro complémentaire, considérons tous les tirages possibles. Pour la première boule, il y 42 possibilités, pour la seconde 41, et ainsi de suite jusqu'à la sixième pour laquelle il y a 37 possibilités. Le nombre de suites que l'on peut obtenir est donc de $42 \times 41 \times 40 \times 39 \times 38 \times 37 = 3\,776\,965\,920$.

Il s'agit bien d'un produit et non d'une somme comme le montre le comptage systématique ci-dessous.

1^er^ tir.	2^e^ tir.	3^e^ tir.	4^e^ tir.	5^e^ tir.	6^e^ tir.
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	6	5
1	2	3	5	4	6
1	2	3	5	6	4
1	2	3	6	4	5
1	2	3	6	5	4
1	2	4	3	5	6
		…	…		
1	2	5	3	4	6
		…	…		
1	2	6	3	4	5
		…	…		
2	1	3	4	5	6
		…	…		
3	1	2	4	5	6
		…	…		
4	1	2	3	5	6
		…	…		
5	1	2	3	4	6
		…	…		
6	1	2	3	4	5
		…	…		

Mais lors du tirage, on ne tient pas compte de l'ordre : les suites 41, 10, 20, 25, 32, 6 et 6, 25, 10, 20, 32, 41 constituent des tirages de Lotto identiques. Nous avons donc compté trop de possibilités. Combien ? Avec six nombres, on peut former des suites de six nombres en les tirant successivement. Il y a 6 possibilités pour le premier, 5 pour le second, 4 pour le troisième… Un pour le dernier. C'est-à-dire qu'avec une famille (l'ordre n'a pas d'importance) de six nombres, on peut former $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ suites (l'ordre a de l'importance). Pour le tirage du Lotto, on a donc compté chaque famille de six nombres 720 fois puisqu'on a tenu compte de l'ordre. Comme l'ordre n'a pas d'importance, il reste

$$\frac{3\ 776\ 965\ 920}{720},$$

c'est-à-dire 5 245 786 tirages possibles, tous équiprobables.

Les boules n'ont aucune mémoire du passé. À chaque tirage, chaque combinaison a la même probabilité qu'une autre (même la combinaison 1, 2, 3, 4, 5, 6,) de sortir, à savoir :

$$\frac{1}{5\ 245\ 786} = 0{,}000\ 000\ 190\ .$$

Un joueur a à peu près une chance sur cinq millions de gagner au rang 1.

3. Un graphique, cela éclaircit une situation, cela donne une vue globale ou ça trompe.

Sur le graphique[2] de la fig. 6 (réduite de 3/5 en largeur et en hauteur par rapport à l'original), un grand cube est associé à l'activité économique mondiale en 1991, un petit cube est associé à l'activité économique du cinquième le plus pauvre.

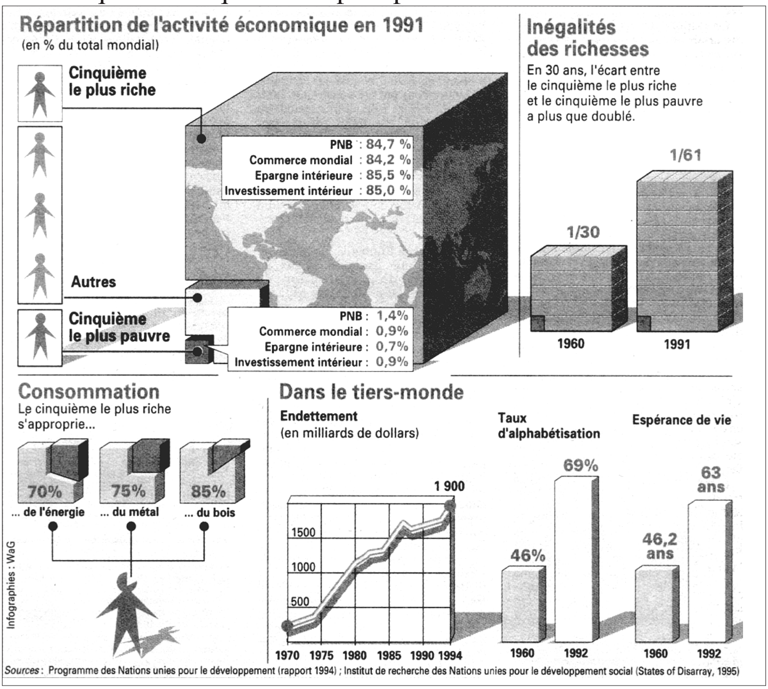


FIG. 6.

Au niveau des chiffres donnés, en pourcentage du total mondial, on voit que le produit national brut du cinquième le plus pauvre vaut

1,4 %, le commerce 0,9 %, l'épargne intérieure 0,7 %, l'investissement intérieur 0,9 %. Au niveau du graphique, si on ne prête attention qu'à la hauteur des cubes, le pourcentage de l'activité économique (dont on ne sait pas très bien ce qu'elle représente) du cinquième le plus pauvre de la planète est égal au rapport de ces hauteurs (exprimées ici en millimètres d'après le dessin original) :

$$\frac{5}{54{,}5} \cong 0{,}091\ 7 = 9{,}17\ \%.$$

Si on considère les faces carrées « avant » de ces cubes, si c'est la perception des aires qui est dominante pour le lecteur, le rapport vaut (toujours selon l'original) :

$$\frac{5^2}{54{,}5^2} = \left(\frac{5}{54{,}5}\right)^2 \cong 0{,}008\ 4 = 0{,}84\ \%.$$

Si on a plutôt une perception globale du graphique, que ce sont les volumes qui importent, le rapport vaut (toujours selon l'original) :

$$\left(\frac{5}{54{,}5}\right)^3 \cong 0{,}000\ 7 = 0{,}08\ \%\ .$$

Ce sont donc les aires qui semblent le mieux coller aux chiffres, mais ce sont probablement les volumes qui attirent l'attention de la plupart des lecteurs.

4. La farce est connue. L'aire d'un étang recouverte par les nénuphars double tous les jours. Le vingt-huitième jour, l'étang est complètement recouvert. Quand était-il recouvert à moitié ? Réponse : le vingt-septième jour. Eh non, le quatorzième !

Croissance exponentielle, cela évoque population mondiale, bactéries, bons de capitalisation et bien d'autres choses. La farce illustre combien le modèle dominant est une croissance linéaire et qu'il faut un peu d'habitude pour raisonner en termes de croissance autre, exponentielle par exemple.

Dans les années quatre-vingt, il y a eu Tchernobyl et les retombées. Très vite, on a parlé d'Iode 131 dont la demi-vie est de 8 jours. Plus tard, on a soupçonné la présence de Césium 137 dont la demi-vie est de 30 ans. Cela veut-il dire que la radioactivité de cet élément dure 60 ans ?

Bien plus en fait. La demi-vie d'un élément radioactif est le temps qui s'est écoulé lorsque la moitié des noyaux de cet élément se sont désintégrés. Après trente ans la moitié des noyaux tombés sur notre sol lors de la catastrophe se seront désintégrés, il en restera la moitié. Après trente nouvelles années ou soixante ans après la catastrophe, ce seront la moitié des noyaux restants qui se seront désintégrés, c'est-à-dire un quart. Il en restera un quart. Après nonante ans, il en restera un huitième, et ainsi de suite…

5. Les formules, pour un grand nombre, c'est rigoureux. On les entoure d'un parfum de mystère ou d'une once de scepticisme. On ne les comprend pas et on fait confiance au spécialiste ou on cherche à les interpréter.

Le tabl. 1 est extrait d'un budget communal. Tout propriétaire paie un impôt immobilier sur son revenu cadastral. Une part de cet impôt va à la région, une autre part à la province et une dernière part à la commune. Celle-ci dépend des centimes additionnels, dont le taux est fixé par la commune. En fonction du taux fixé, le service des contributions évalue le produit des centimes additionnels, c'est le tabl. 1, que presque tous les élus trouvent hermétique.

Budget de 1995

Évaluation du produit des centimes additionnels au précompte immobilier.

1) Revenu cadastral IMPOSÉ pour l'exercice 1993	31 633 320
(à fournir par l'Administration des contributions directes)	
2) Taux des additionnels de 1993	2 000
3) Montant des enrôlements pour 1993 (à fournir par l'Administration des contributions directes)	7 911 317
4) Revenu cadastral IMPOSÉ pour 1992	30 847 640
5) Prévision des enrôlements de 1995 pour un centime additionnel $\dfrac{n^\circ 3 \times n^\circ 1}{n^\circ 2 \times n^\circ 4}$	4 058 856
6) Taux des additionnels de 1995	2 000
7) Prévision à porter au budget $n^\circ 5 \times n^\circ 6 \times 105\ \%$	8 523 585

TABL. 1.

Au n° 1, on voit apparaître le revenu cadastral totalisé pour tous les habitants de la commune pour 1993. Au n° 4, il s’agit du même revenu mais pour 1992. Le rapport du n° 1 au n° 4 est donc un indice (appelons le *i*) qui exprime l’évolution du revenu cadastral.

Le n° 3 exprime ce qu’a rapporté l’impôt immobilier en 93. Le n° 2 donne le taux des additionnels en 93. Le rapport du n° 3 au n° 2 exprime donc ce qu’a rapporté chaque additionnel en 93 (appelons le *r*).

Le n° 5 est en fait le produit $i \times r$, qui exprime ce que rapportera un centime additionnel en 95, si l’évolution entre 93 et 95 est la même qu’entre 92 et 93. Cette dernière hypothèse reste bien sûr à vérifier, mais il faut bien en choisir une ; un budget, c’est prédictif et forcément relativement incertain. On ne peut se reposer sur l’évolution entre 93 et 94, car au moment de la confection du budget 95, c’est-à-dire en décembre 94, on ne dispose pas encore des chiffres précis de 94.

Au n° 7, on multiplie le rapport escompté d’un centime additionnel en 95 par le taux des additionnels fixés. On corrige encore par une indexation liée à l’indice des prix à la consommation.

Mathématiques de l’humaniste.

1. L’oreille perçoit des intensités[3] sonores comprises entre 0,000 000 000 001 (10^{-12}) W/m^2 et 10 W/m^2, ce qui veut dire qu'entre l'intensité minimum audible (que nous appellerons I_0) et l'intensité maximum audible, il y a un facteur de 10 000 000 000 000 (un, suivi de treize zéros). Essayez de représenter pareille échelle sur un axe et vous verrez que si on prend une échelle (fig. 7) qui permet de distinguer les valeurs proches de I_0, on ne peut représenter les grandes valeurs. Par contre, si on prend une échelle qui permet de faire apparaître les grandes valeurs, on ne distingue plus les petites (fig. 8).

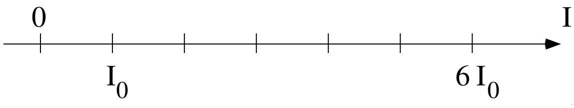


FIG. 7.

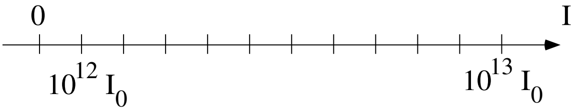


FIG. 8 .

Dans ce cas comme dans de nombreux autres semblables, on prend une échelle logarithmique (fig. 9). Pour le bruit, c'est la notion de niveau sonore mesuré en bel ou en décibel. Le tabl. 2 montre comment évolue le niveau lorsque l'intensité augmente : chaque fois qu'on multiplie l'intensité par dix, le niveau augmente de 1. Tout se passe comme si l'ouïe avait intégré cette échelle puisqu'une personne de sensibilité d'oreille moyenne détecte tout juste une augmentation d'intensité sonore d'environ 1 décibel

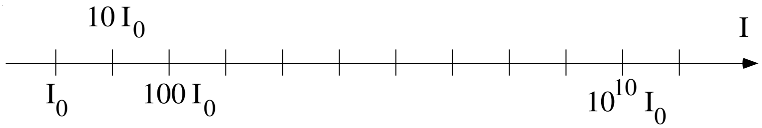


FIG. 9.

Niveau sonore	Intensité	
13 bel	10 000 000 000 000 I_0	avion de ligne au décollage à 25 m
12 bel	1 000 000 000 000 I_0	coup de tonnerre
11 bel	100 000 000 000 I_0	pop music
10 bel	10 000 000 000 I_0	bord d'autoroute
9 bel	1 000 000 000 I_0	métro, gros camion, mixer à 50 cm
8 bel	100 000 000 I_0	rue très active, Klaxon à 4 mètres
7 bel	10 000 000 I_0	télévision réglée fort
6 bel	1 000 000 I_0	conversation à voix forte, grand magasin
5 bel	100 000 I_0	conversation à voix normale
4 bel	10 000 I_0	tic-tac de montre
3 bel	1 000 I_0	résidence à la campagne
2 bel	100 I_0	chuchotement 1 m, bruissement de feuilles
1 bel	10 I_0	studio d'enregistrement
0 bel	I_0	intensité minimum audible

TABL. 2.

En y regardant de plus près, on peut voir que le tableau 2 met en parallèle une échelle multiplicative, celle des intensités, et une échelle additive, celle des niveaux sonores. Par exemple, ajouter 3 bel, c'est multiplier l'intensité par mille. Ajouter un décibel, c'est

multiplier l'intensité par 1,26, car lorsqu'on ajoute successivement 10 décibel (ou un bel), on multiplie l'intensité par
$1{,}26 \times 1{,}26 \times 1{,}26 \times 1{,}26 \times 1{,}26 \times 1{,}26 \times 1{,}26 \times 1{,}26 \times 1{,}26 \times 1{,}26$, ce qui revient à la multiplier par 10.

Mais doubler une intensité sonore ne correspond pas à doubler le niveau. Si on met l'un à côté de l'autre deux moteurs de niveau 9 bel, ça ne fait pas 18 bel. En effet, deux moteurs de niveau 9 bel, cela fait $2 \times 1\,000\,000\,000\ I_0$, c'est-à-dire $2\,000\,000\,000\ I_0$. En consultant le tabl. 2, on voit que c'est bien inférieur à $10\,000\,000\,000\ I_0$ ou 10 bel. En fait, la somme des deux ne fait que 9,3 bel.

2. Pour les mouvements rectilignes et uniformes, la vitesse est le rapport de l'espace parcouru au temps mis pour le parcourir. Mais uniquement pour les mouvements rectilignes et uniformes. Pour les autres, c'est plus compliqué, ce qu'ignorent 90 ou 99 pourcents de nos contemporains, même si c'est une idée vieille de quelques siècles, aussi vieille que l'écriture décimale avec chiffres après la virgule, par exemple.

Rencontrons cette notion de vitesse dans un contexte économique. La fig. 10 montre le coût de production d'une moto en fonction du nombre d'unités produites.

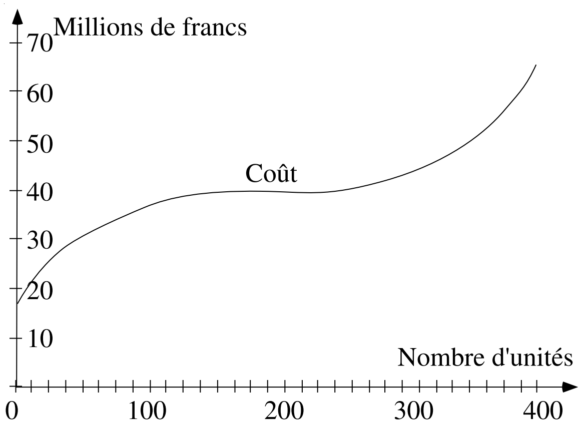


FIG. 10.

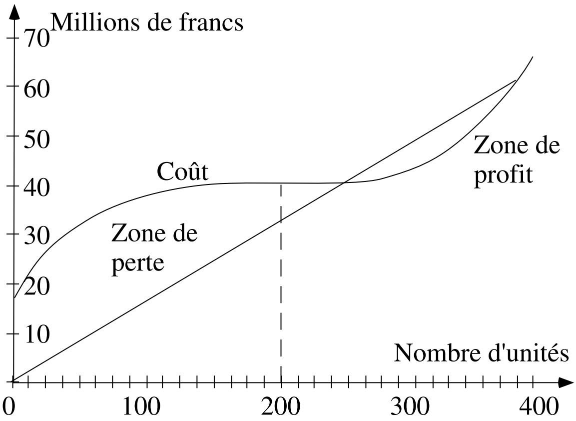


FIG. 11.

On peut constater qu'avant même de produire, un certain coût est déjà engagé ; puis jusqu'à deux cents unités, le coût augmente de moins en moins fort. Ce qui veut dire que si on se baladait avec un petit vélo sur la courbe, ce serait d'autant plus facile qu'on avance entre 0 et 200, la pente est de moins en moins forte. À partir de deux cents unités, le coût augmente de plus en plus fort. En termes vélocipédiques (ou géométriques), la pente est de plus en plus forte lorsqu'on va de 200 à 400.

À la fig. 11, on a également représenté la recette. C'est une droite qui passe par l'origine des axes. On constate que la recette est constante pour chaque unité produite et qu'elle vaut 160 000 ; elle est de 16 000 000 pour 100 unités, de 32 000 000 pour 200 unités et ainsi de suite.

Pour quelle production a-t-on un bénéfice maximal ? On pourrait dire de façon un peu hâtive que c'est pour une production de 200 unités, puisqu'après cette valeur le coût augmente à nouveau très fort. Or on voit qu'en 200, le coût est supérieur à la recette. Pour trouver la solution graphiquement, il faudrait déterminer la valeur pour laquelle l'écart entre recette et coût est maximal. Attention, positivement car il y a aussi un écart maximal correspondant à une perte maximale ! Ça a l'air d'être entre 325 et 350, mais dire où exactement…

Faisons un détour. En économie, on parle de coût marginal pour exprimer le coût de la dernière unité produite. Le coût marginal en 100, c'est le coût de la centième unité produite, que l'on peut calculer en faisant la différence du coût en 100 et du coût en 99. Si on regarde le graphique du coût à la loupe entre 98,5 et 100,5 (fig. 12), on remarque que le graphe est très proche d'un segment de droite dont on peut calculer la pente en faisant le rapport

$$\frac{C(100)-C(99)}{100-99}=C(100)-C(99)=C_m(100)\,,$$

qui n'est rien d'autre que le coût marginal en 100.

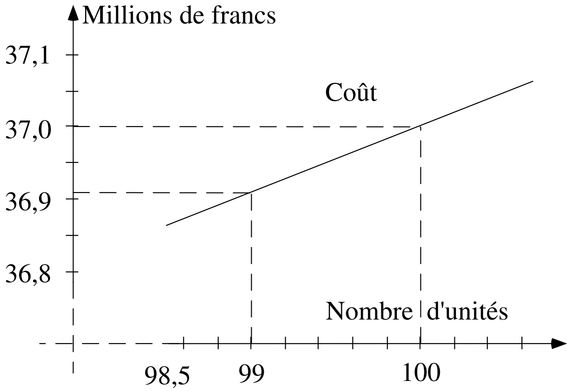


FIG. 12.

Le coût marginal correspond donc à la pente du graphique de la fonction coût, qui est localement proche d'un segment de droite. Sans loupe, on peut calculer la pente de ce très petit segment en le prolongeant suivant une droite qui n'est autre que la tangente au graphique au point d'abscisse 100 (fig. 13).

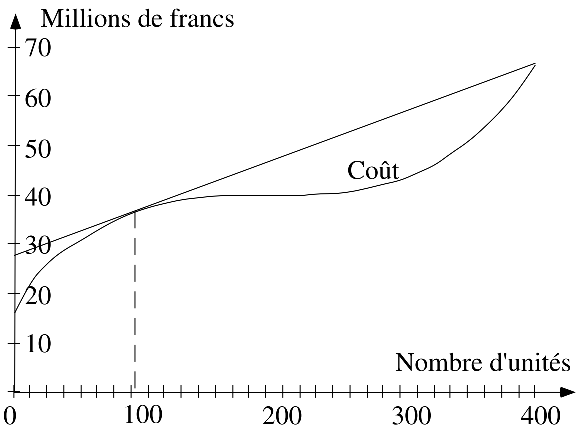


FIG. 13.

À partir de là on peut trouver le bénéfice maximal par un raisonnement assez simple. Le coût marginal est le coût de la dernière unité produite. Puisque la recette est proportionnelle à la production, la recette marginale ou recette de la dernière unité produite est constante pour chaque valeur de production. À partir du point de rencontre des graphiques de coût et recette, on entre dans une zone de bénéfice. Tant qu'une unité rapporte, c'est-à-dire tant que son coût marginal est inférieur à sa recette marginale, on a intérêt à la produire. Et il faut arrêter de produire à partir de la moto dont le coût et la recette marginales se valent. Sur le graphique, cela voudra dire que la tangente au graphique coût a même pente que le graphique recette (de pente constante), ou que la tangente au graphique coût est parallèle à la droite des recettes. On voit (fig. 14) que c'est autour de 330 que cela se passe.

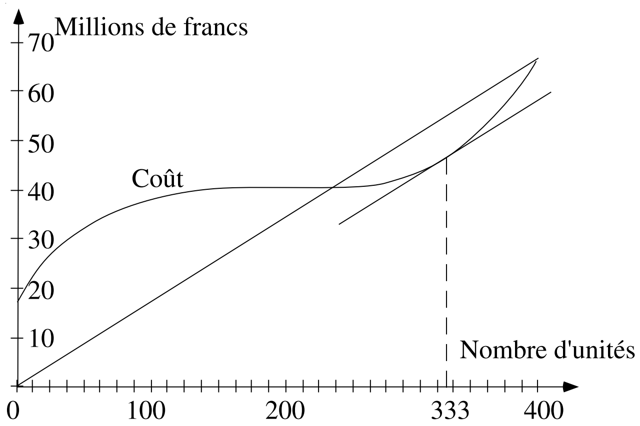


FIG. 14.

Le coût marginal en économie correspond à la vitesse en physique, tous deux liés à un même outil mathématique, la dérivée. Le coût marginal, c'est un peu comme la vitesse du coût ou une idée de la façon dont évolue le coût total au fil de la production.

Mathématiques du spécialiste

Le but de ce chapitre, rappelons-le, car certains lecteurs absorbés par les différents problèmes en ont peut-être perdu le fil, est de montrer de façon convaincante en quoi les mathématiques sont utiles à divers niveaux de la vie (concrète, citoyenne, humaniste).

Dans cette section sur les mathématiques du spécialiste, nous devrions développer quelques problèmes qui montrent comment les mathématiques sont à l'œuvre dans des domaines comme la politique, la sociologie, la médecine, l'économie, la chimie, la physique et les mathématiques. Mais à ce niveau personne ne doute de leur utilité. Et les problèmes qu'il faudrait développer risqueraient de dépasser largement le cadre de cet ouvrage. Cette section est donc terminée.

La vraie utilité

Aïe ! Je devine quelque inquiétude à la lecture du sous-titre. Faut-il croire qu'on vient de développer divers niveaux d'utilité sans toucher à l'essentiel et que l'on repart pour un tour complet ? Oui et non ! Si vous allez voir jusqu'où va ce chapitre, vous serez rassuré.

Au-delà des problèmes, il y a des façons de réfléchir, des stratégies de résolution, un registre de pensée qui se développe. Toute résolution met en œuvre des méthodes tout aussi importantes que les solutions et particulièrement intéressantes parce qu'elles sont réinvestissables dans d'autres problèmes.

Un exemple : la résolution de nombreux problèmes mathématiques passe par un va-et-vient entre le général et le particulier.

a) Du particulier au général. Que vaut le volume d'une pyramide ? Il y a une pyramide toute particulière dont on peut calculer aisément le volume, c'est celle qui a pour base la face d'un cube et pour sommet, le centre de celui-ci (fig. 15).

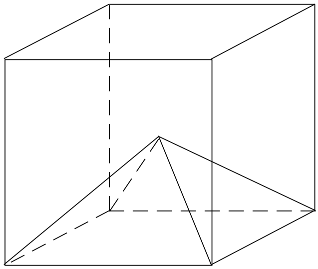


FIG. 15.

Il faut six pyramides comme celle-là pour former un cube dont le volume est $c \times c \times c$, où c est la longueur du côté.

Le volume de la pyramide vaut donc

$$\frac{c \times c \times c}{6} = \frac{c \times c \times \frac{c}{2}}{3} = \frac{b \times h}{3},$$

où h est la hauteur et b l'aire de la base.

À partir du volume de cette pyramide, on peut conjecturer que la formule sera la même pour toute pyramide, quelle que soit la forme de sa base et qu'elle soit droite ou non droite[4].

b) Du général au particulier. On peut prouver[5] qu'une pyramide quelconque et un cône qui ont même base (du point de vue de l'aire, évidemment) et même hauteur que la pyramide ci-dessus, ont même volume (fig. 16). En effet, si les bases ont même aire, tous les plans parallèles à la base coupent chacun des solides suivant une figure semblable à la base. Dans chaque cas le rapport de la figure à la base est le même, puisqu'on est à même hauteur. C'est comme si on était en présence de saucissons (aux formes particulières il est vrai) dont les tranches ont la même aire à chaque hauteur. On en conclut que les saucissons ont même volume[5].

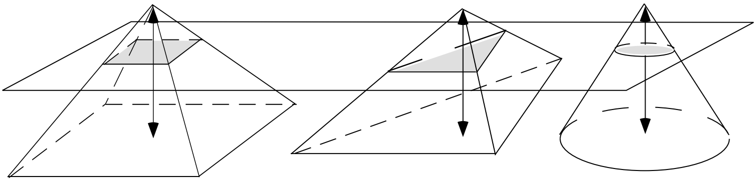


FIG. 16.

Pour le plaisir

En dehors de l'utilité immédiate (on a un problème, on cherche une solution, on a un résultat) et de l'utilité reportée (on a acquis des méthodes, on a développé un registre de pensée), il y a pour certains le plaisir, seule et vraie bonne raison de faire des mathématiques. Attention, un plaisir différé.

Faire du vélo quand il fait beau, c'est agréable. On respire le grand air, on voit du paysage, on bronze. Mais rouler soixante, nonante kilomètres tous les jours, ce sont des litres de sueur, des courbatures, des maux de selle, l'envie d'arrêter… Beaucoup d'efforts qui ne se justifient que par le bonheur d'être en forme, bien dans sa peau ou par le désir d'être suffisamment entraîné pour atteindre un objectif.

Faire des mathématiques, chercher à résoudre un problème, c'est parfois gai (au sens belge du terme) surtout quand on approche d'une solution. Mais c'est souvent dur, on patauge, on ne voit pas comment s'y prendre, on fait des erreurs, on emprunte des chemins de traverse… On doute ! Beaucoup d'efforts consentis pour répondre à une provocation intellectuelle ? Pour connaître la joie d'aboutir ? Pour assouvir une soif de connaissances ? Pour améliorer sa capacité à penser ? Pour se former et atteindre un objectif matériel ou social fixé ? Pour être reconnu ? En définitive, parce que c'est utile ?

Finalement et pour conclure, si on décide de ne pas faire de math avant d'en avoir fait, on fait un choix non délibéré. Comment juger quelque chose qu'on ne connaît pas ? Si on fait des maths, on se garde une chance de se rendre compte de leur utilité et du plaisir que cela procure…

Chapitre XII

Ils doivent savoir calculer !

Tant de temps passé sans penser…

L'activité calculatoire est importante en mathématiques. Elle est peut-être la partie la plus visible de cette science, comme en témoigne l'homme de la rue lorsqu'il confond, ce qui lui arrive souvent, mathématiques et calcul.

Mais qu'est-ce que calculer ? C'est combiner des symboles suivant des règles dans un but déterminé. Il y a deux aspects au calcul : il faut d'une part choisir et ordonner les opérations à faire pour arriver au résultat (c'est-à-dire concevoir l'algorithme), et d'autre part exécuter les opérations en suivant l'algorithme et en obéissant strictement aux règles. Seule la conception de l'algorithme peut comporter des choix et donc des décisions : il y a de ce point de vue des calculs qui mobilisent beaucoup de pensée tactique. L'exécution des opérations, de son côté, ne laisse aucune marge de manœuvre : c'est effectivement une tâche d'exécution.

Venons-en maintenant au constat sur lequel le présent exposé voudrait amener à réfléchir. On passe dans les écoles, à tous les niveaux, un temps considérable à s'entraîner à calculer selon des algorithmes soit étroitement imposés, soit à faible marge de manœuvre. Il serait faux de dire que l'on fait cela dans toutes les classes, mais il est certain qu'on le fait dans beaucoup. Et d'ailleurs, les manuels prévoient largement ce genre d'entraînement : on y trouve proposées de nombreuses colonnes de calculs de ce type. C'est ce qu'on appelle souvent le *drill*. Le mot anglais *drill* a d'abord une signification militaire : il désigne l'exercice qui consiste pour les soldats à évoluer en suivant strictement les règles de décomposition du demi-tour à droite, du porter arme, etc.

Outre qu'ils comportent peu de liberté de manœuvre algorithmique, les calculs dont nous parlons ne sont issus d'aucun problème, les symboles manipulés ne renvoient à rien sinon, abstraitement, à des nombres ou des fonctions, aucune question n'a été posée au préalable à laquelle le calcul apporterait un élément de réponse. Ces calculs n'ont pas d'amont. Ils ne viennent de nulle part. Et par conséquent ils n'ont pas d'aval non plus, ils ne vont nulle part, sauf chez le professeur qui comptabilise les fautes.

Face à ces activités de calcul, les élèves sont en positions diverses. Certains y sont très habiles et se souviennent, quand il s'agit de symboles littéraux, que ceux-ci renvoient à des nombres ou des fonctions : en cas de difficulté, ils se donnent un exemple numérique pour vérifier expérimentalement « comment ça marche ». D'autres, tout aussi habiles que les premiers, et peut-être doués d'une mémoire plus solide, exécutent le *drill* sans faute ou pratiquement, quoique sans savoir ce que les symboles veulent dire. Ils appliquent aveuglément des règles qui leur apparaissent comme totalement arbitraires. D'autres élèves enfin, et on sait qu'ils sont nombreux, ne réussissent pas à bien faire les calculs, ils font plein de fautes. Comme les précédents, ils ne savent pas ce qu'ils font, mais en outre ils n'arrivent pas à le faire.

Les élèves de la première catégorie, ceux qui arrivent à calculer et à retourner le cas échéant des lettres aux nombres, ne mobilisent dans l'activité de *drill* qu'une pensée mathématique de courte portée. Les élèves des deux autres catégories ne pensent pas du tout sur le plan mathématique. Ils vivent la débâcle du sens. Dans leur esprit, les symboles ont largué leurs référents. La porte est grande ouverte sur l'arbitraire. Ils imaginent en calculant les choses les plus farfelues, les plus absurdes. Beaucoup se mettent à vomir les calculs et, par effet d'entraînement, les mathématiques. On les envoie à la remédiation, comme s'ils étaient malades, alors que leur indigestion est sans doute la réaction saine d'un organisme ingurgitant des arêtes sans chair, des symboles sans référents.

Mais revenons à notre question principale. S'il est vrai d'une part que l'activité de *drill* est si répandue, et d'autre part qu'elle mobilise très peu ou pas du tout de pensée (mathématique), pourquoi passe-t-on tant de temps à ne pas penser ?

L'effet du *drill*

Avant d'entamer une critique détaillée du *drill* sans contexte, précisons que le *drill* a parfois sa raison d'être, et que tout jugement trop radical à ce sujet risquerait d'être faux. En effet, comme il est raisonnable de faire de la gymnastique d'entraînement avant de partir skier, il l'est parfois aussi de s'entraîner (mais pas trop longtemps à l'avance !) à certaines formes de calcul dont on sait que l'on aura besoin. Il arrive d'ailleurs qu'une règle de calcul apprise mécaniquement soit interprétée et que sa raison d'être soit comprise au moment où on l'applique sur un chantier de problème significatif. Le *drill* dont nous nous occupons ci-après est le *drill* aveugle, la pratique des règles de calcul sans autre perspective qu'une problématique utilité dans un avenir imprécis.

Un premier effet de la pratique intensive du *drill* concerne les élèves qui n'y réussissent pas. L'échec en calcul est un facteur, et sans doute non le moindre, de la sélection scolaire. De nombreux élèves redoublent, puis quittent les sections prometteuses de l'enseignement général et se dégoûtent de l'école, entre autres raisons parce qu'ils n'ont pas su calculer, Si on admet que les activités de calcul en question mobilisent peu de pensée, on doit se demander si l'échec en calcul est un critère de sélection adéquat ou plus simplement acceptable.

Un deuxième effet de la pratique intensive du *drill* concerne les élèves qui y réussissent. Certains auteurs ont étudié la question et ont obtenu, selon toute apparence, des résultats convaincants. On en trouvera mention dans un article de A. Bell (1980) intitulé « Que dit la recherche à propos des méthodes d'enseignement en mathématique ? » Bell rapporte et commente dans les termes suivants les résultats de Brownell et quelques autres : « Brownell en 1975, à la suite de quelques trente années de recherches intensives consacrées par d'autres à l'usage du *drill* dans l'apprentissage des faits et de la pratique arithmétiques, a commencé à étudier l'efficacité du *drill* comparé à des méthodes plus significatives. Il s'agissait de l'efficacité mesurée non seulement par les performances immédiates des élèves à l'entraînement, mais par la rétention au long du temps, la compréhension, et le transfert à des situations quelque peu différentes. Il a montré, dans une série d'expériences sur l'enseignement de l'addition puis de la soustraction (…), dans chaque cas par des méthodes significatives et de routine, que, bien que le *drill* accroisse effectivement la vitesse de rétention des faits et améliore la capacité pratique, il n'améliore pas la compréhension des relations, jugée par la capacité de restituer des faits oubliés à partir de souvenirs d'autres faits, ni la capacité de transférer l'apprentissage, fût-ce des nombres à deux chiffres aux nombres à trois chiffres. (Bell renvoie à trois travaux, respectivement de Brownell et Chazal, Brownell et Moser, et Williams.) Ce travail peut être résumé comme suit : *le drill améliore la dextérité mais non la compréhension et ses effets s'estompent vite.* » (C'est Bell qui souligne.)

Bien entendu, l'étude en question porte sur l'arithmétique élémentaire à l'école primaire. Mais ce n'est pas une mauvaise conjecture que d'étendre ses résultats aux apprentissages par *drill* dans les enseignements de tous niveaux, car d'autres études ont confirmé, pour dire les choses en gros, que les enseignements au cours desquels les élèves ne pensent pas ou peu leur apprennent peu à penser. (*Cf.* sur ce point le reste de l'étude de synthèse de A. Bell.) Ce qui, après tout, n'est pas tellement étonnant…

Mais alors revient la question : pourquoi consacre-t-on encore tant de temps à ce type d'enseignement inefficace ?

Pourquoi continue-t-on ?

Les causes d'un phénomène social sont rarement aisées à identifier, et on n'arrive jamais à faire le tour d'un problème. Voici quelques hypothèses qui ne manquent pas de vraisemblance pour expliquer la perpétuation de l'enseignement par *drill*.

Tout d'abord, l'apprentissage du calcul routinier tend, de lui-même, à se perpétuer. Quand une génération d'élèves a été élevée dans le *drill*, elle devient une génération de parents persuadés que le *drill* est important et, jusqu'à un certain point, que faire des mathématiques, c'est calculer. « Beaucoup d'enfants », écrivent P. Hilton et J. Pedersen (1988), conservent dans l'âge adulte la conception fausse qu'il est dans la nature des mathématiques d'aller d'une tâche assignée, via une méthode prescrite, vers l'unique bonne réponse. » « Ils doivent savoir calculer, dit-on, donc il faut qu'ils calculent beaucoup… » Ce qui, nous l'avons vu au numéro 2, n'est pas une implication à accepter sans nuances.

Ensuite, dit-on encore, les copies d'examens portant sur des calculs se notent plus objectivement que celles qui portent sur des questions de réflexion. Devant un calcul, on ne discute pas : on décompte autant par faute, selon un barème convenu. La société scolaire attend du professeur de mathématique un jugement clair et net sur la « valeur » des élèves, ce qui semble plus difficile à obtenir des professeurs d'autres matières. L'ennui, c'est que cette valeur est jugée sur un critère pour le moins insuffisant. Quand on organise des examens de cette sorte, on refuse au nom de l'objectivité de la note de vérifier si le cours de mathématiques a atteint ses objectifs principaux, qui sont de l'ordre d'apprendre à penser plus que d'apprendre à calculer.

Il arrive aussi que le calcul soit enseigné par des routines du simple fait qu'un tel enseignement, de toutes façons réputé important, est plus facile que d'autres. Il évite d'avoir à penser, et l'enseignant n'y court aucun risque. Il serait aussi faux d'éliminer *a priori* cette dernière hypothèse que de la généraliser.

Relevons enfin l'argument souvent entendu, concernant les élèves jugés médiocres, voire incapables : « Comme cela ils sauront au moins quelque chose. »

Rôle et portée du calcul

Si le calcul routinier est la cause de si grandes et si anciennes difficultés, il est opportun d'y réfléchir fondamentalement. Revenons à notre question de départ. Qu'est-ce que le calcul ? À quoi sert-il ? D'où vient-il ?

Calculer, c'est remplacer des pas de raisonnement par des manipulations formelles (de symboles), c'est-à-dire sans s'inquiéter du sens, du fond. Il est possible de calculer à l'intérieur de toute structure mathématique, en faisant fonctionner les relations exprimées par les axiomes et les théorèmes.

La réduction du raisonnement, c'est-à-dire de la résolution des problèmes, au calcul, revient comme un leitmotiv et un objectif fondamental à travers l'histoire des mathématiques. On le trouve chez Euclide lorsqu'il établit, dans les Éléments, les bases d'un calcul sur les segments. Il revient chez Viète, qui, au XVIe siècle, introduit l'usage des symboles en algèbre, pour la résolution des équations. Au XVIIe siècle, Descartes et Fermat ramènent une bonne partie de la géométrie à des calculs dans un système de coordonnées. Plus tard, dans le même siècle, Leibniz tente de jeter les bases d'un calcul logique, qui sera plus tard repris par Boole. Sur un autre plan, et en parallèle avec Newton, il ramène les recherches d'aires, de volumes et de centres d'inertie à des calculs de primitives, alors qu'Archimède, vingt siècles auparavant, inventait pour chaque problème de ce genre une méthode appropriée. À la fin du XVIII^e siècle et au début du XIX^e, Lagrange s'efforce de donner un fondement au calcul infinitésimal et à la mécanique en les réduisant à de purs calculs. Au XVIII^e siècle, les déterminants sont introduits par Vandermonde et Bezout pour synthétiser et rendre routinière la résolution des équations linéaires. Les matrices apparaissent au XIX^e siècle avec Cayley pour calculer les transformations linéaires. Faute d'espace, nous nous bornerons ici à ces quelques jalons historiques. Mais sans doute suffisent-ils à témoigner de la constance et de l'ingéniosité que les mathématiciens ont déployées pour remplacer, dès que c'est possible, les raisonnements par des calculs. Serait-ce, puisqu'il est plus facile de calculer que de penser, un effet de l'irrépressible paresse des hommes ? Nous verrons ci-après qu'il n'en est rien.

Mais voyons maintenant l'autre face de la question. S'il est vrai qu'il est plus facile de calculer que de penser, il est par contre plus stimulant et plus éclairant de penser que de calculer. Sauf exception, calculer est ennuyeux. Aussi des trésors d'ingéniosité ont-ils été dépensés à travers l'histoire, d'une part pour abréger les calculs, et d'autre part pour les remplacer quand c'est possible par « des raisonnements conceptuels » (l'expression est de J. Dieudonné, 1969, pp. 2 à 16).

Un premier exemple est celui du développement des machines à calculer. En soulageant l'esprit de la tâche absorbante d'exécution des opérations, elles le libèrent et lui permettent de se concentrer, dans un contexte problématique donné, sur le choix de tel ou tel enchaînement d'opérations. Elles permettent donc une attention accrue au sens.

Un autre exemple majeur de cette tendance est le double courant d'idées qui a conduit à l'algèbre linéaire. Les vecteurs ont servi non seulement à abréger les calculs en coordonnées de la géométrie analytique (trois équations étant remplacées par une seule), mais encore à se passer d'un système d'axes arbitraires et à calculer sur des éléments géométriques appartenant aux figures étudiées, des éléments dits intrinsèques, et donc de conserver au cours des calculs une vue de la question posée. Les vecteurs ont engendré historiquement les espaces vectoriels, et les transformations linéaires de ceux-ci ont été d'abord étudiées en utilisant les matrices et les déterminants, dont nous avons vu ci-dessus comment et pourquoi ils sont nés. Mais déterminants et matrices sont des outils lourds à manier et absorbants. Ils sont aujourd'hui remplacés dans la construction théorique de l'algèbre linéaire par des raisonnements et calculs souvent brefs, portant directement sur les transformations linéaires, et au cours desquels on garde une vue claire de ce qu'on cherche. Il ne faudrait pas croire pourtant que les coordonnées et les matrices ont été liquidées une fois pour toutes, car on est bien obligé d'y revenir dès que l'on veut traiter numériquement un cas d'espèce.

Ainsi le calcul est un objet de contradiction : tantôt recherché et défendu avec passion, tantôt rejeté et méprisé. Comment un seul et même type d'activité peut-il inspirer des jugements et des sentiments aussi opposés ? La réponse n'est pas compliquée : c'est que le calcul n'est rien par lui même, et que ce qui compte c'est ce qu'il permet de faire, à savoir répondre à des questions, résoudre des problèmes. Le calcul est en soi toujours inintéressant. Mais il arrive que ses résultats soient intéressants, significatifs. Là est son unique enjeu. Tout calcul sensé vient d'un problème et y retourne. Accepter de perdre momentanément le sens de vue pour s'enfoncer dans une suite d'opérations mécaniques comporte une frustration dont l'intensité croît avec la longueur du calcul. Cette frustration n'est acceptée que lorsque le résultat en vaut la peine.

Ainsi, la faveur qu'a le calcul à certains moments de l'histoire n'a rien à voir avec la paresse des hommes, et des mathématiciens en particulier : ceux-ci aiment toujours mieux penser que calculer, mais ils calculent volontiers, et parfois avec passion (*cf.* Dieudonné, 1969, pp. 2 à 16), lorsque c'est pour eux le seul moyen de continuer à penser.

La parabole des myopes

Pourquoi en irait-il autrement de nos élèves ? Pourquoi supporteraient-ils plus facilement que les mathématiciens de calculer pour calculer, c'est-à-dire de calculer pour rien, de calculer pour obtenir un résultat qui ne soit la réponse à aucune question ? D'ailleurs, ils demandent souvent « À quoi ça sert ? », et la réponse habituelle « Tu verras plus tard » ne les satisfait pas. Comme l'a écrit un jour Bourbaki (1948), faire des mathématiques, c'est comme se mouvoir dans un paysage. On veut aller quelque part, vers un but qu'on aperçoit dans son horizon. On regarde à moyenne puis à courte distance comment on pourrait y aller, quels sentiers permettraient de se rapprocher du but. Puis on avance dans un sentier choisi, en surveillant chacun de ses pas. Après un moment, on relève la tête pour voir le chemin qu'on a déjà fait et envisager la suite du parcours, etc.

L'élève qui ne comprend pas pourquoi il calcule est comme un myope profond (*cf.* ROUCHE, N., 1988, pp. 1 à 24) soudain transporté dans un paysage mathématique. Il ne voit pas plus loin que ses souliers et n'a le projet d'aller nulle part. On lui demande d'avancer après lui avoir expliqué comment poser les pieds selon les règles. Quoi d'étonnant à ce que, souvent, il refuse d'avancer, et s'il avance, trébuche ? Quoi d'étonnant aussi à ce que, s'il y arrive, il ne retienne pas longtemps (comme nous l'avons noté au n° 2) les façons de mettre les pieds, ou autrement dit les règles de calcul ? Pour retenir une chose, chacun de nous a le plus souvent besoin de la « raccrocher » à une autre ou à d'autres. C'est une des leçons, simple mais toujours vivante, de la psychologie associationniste du début du siècle. Les images et les idées s'associent de diverses façons dans l'esprit et se retiennent du fait même de leurs associations. Nous avons besoin d'un contexte qui nous amène à dire devant une situation nouvelle : « Ah mais oui, je me souviens, c'est comme dans telle ou telle autre circonstance ! » On comprend dès lors que lorsqu'il n'y a pas de circonstance, lorsqu'on s'entraîne au calcul pur et nu, le souvenir ne trouve rien à quoi s'accrocher. C'est un peu comme d'essayer de mémoriser une page de l'annuaire téléphonique d'une localité inconnue. Il manque des référents, il manque du sens. Le signifiant a perdu le signifié[1].

Devant cette situation, que faire pratiquement ? Deux choses dont l'une regarde principalement les autorités qui conçoivent les programmes, et l'autre principalement les enseignants dans leur pratique journalière.

Ne pas formaliser prématurément

La première est qu'il faudrait éviter, dans l'éducation mathématique, de formaliser prématurément, c'est-à-dire d'introduire des structures, des relations, des symboles et des algorithmes qui ne renvoient pas à un paysage mathématique suffisamment riche et familier aux élèves. Car alors la structure avec sa combinatoire de symboles risque trop de fonctionner à vide. L'expérience a prouvé largement et tragiquement que ce danger est immense.

Il en est ainsi par exemple lorsqu'on soumet des enfants au *drill* sur les opérations de l'arithmétique avant qu'ils aient eu le temps de penser et d'expérimenter suffisamment les nombres naturels et la numération, de se poser à leur propos assez de questions significatives.

Randall Souviney (communication orale), qui est un des responsables des problèmes d'éducation mathématique à l'université de Californie à San Diego, s'efforce – ce sont ses propres dires – de formaliser l'arithmétique à l'école primaire le plus tard possible, c'est-à-dire de maintenir les élèves le plus longtemps possible sur le terrain du sens, par opposition à celui des automatismes aveugles. Certes, il est bien évident que les élèves doivent apprendre à terme à pratiquer sans réfléchir les quatre opérations sur des nombres pas trop grands (pour les autres, il y a dorénavant la calculatrice), car où irions-nous s'il fallait tout prouver à chaque fois ? Mais pourquoi vouloir presser cet apprentissage au point d'enfermer les élèves dans les automatismes, à défaut de leur avoir donné préalablement les moyens de pensée pour en sortir quand c'est nécessaire ?

Autre exemple, parmi tant d'autres. Les règles de calcul sur les entiers positifs et négatifs sont enseignées partiellement en primaire et complètement en première année du secondaire, y compris la règle des signes pour le produit. À cet âge, on dispose d'un contexte raisonnable pour la somme : par exemple le calcul d'un bilan de recettes et de dépenses, ou celui de la température moyenne en un lieu donné pendant un mois d'hiver. Par contre, dans beaucoup de classes, la règle des signes fonctionne de façon purement formelle. Il arrive qu'elle soit présentée comme une convention arbitraire, ou soutenue par des métaphores sans autre valeur que mnémotechnique (deux négations font une affirmation, etc.). Il est vrai qu'il faut des trésors d'ingéniosité pour la mettre à cet âge dans un contexte significatif, et que l'une des circonstances principales où elle prend sens, à savoir la composition des homothéties, n'intervient dans le programme que deux ans plus tard.

Voici un dernier exemple. On sait que les éléments de l'analyse mathématique, les concepts de limite, dérivée et intégrale, sont difficiles. Or on voit souvent des élèves s'entraîner en série au calcul automatique des dérivées et des intégrales avant d'avoir suffisamment réfléchi à ces notions dans des contextes appropriés, touchant aux tangentes, à l'application linéaire tangente, aux aires et aux volumes, aux barycentres, aux valeurs moyennes, aux débits, aux vitesses, aux espaces parcourus…

Ainsi, dans l'éducation mathématique, le danger est constant de tomber dans la pratique des règles avant d'avoir assuré le sens. S'il est vrai que toute théorie répond à des questions, ne nous arrive-t-il pas trop souvent d'enseigner les réponses (c'est-à-dire les théories) avant les questions, avant que les élèves aient suffisamment éprouvé la nécessité de la théorie ?

Pour étayer ce propos, je voudrais citer Wu-Yi Hsiang (1988), professeur de mathématiques à l'université de Berkeley et responsable d'une réforme de l'enseignement secondaire mathématique en Chine populaire, réforme ambitieuse comme en témoigne son titre : « Le curriculum mathématique pour le XXIe siècle en république populaire de Chine. » Un principe de base de cette réforme est : ne jamais formaliser tant que le besoin de le faire n'est pas arrivé. Le formalisme doit être approprié aux problèmes que se pose la classe.

Une priorité : la mise en calcul

En guise de conclusion pratique, ne suffit-il pas de souligner ceci : puisque tout calcul qui a du sens vient de quelque part et y retourne, ne faut-il pas se soucier sans cesse de ce quelque part ? Si beaucoup d'élèves – c'est un fait reconnu – sont en général si peu capables de savoir en quelles circonstances il faut mobiliser tel ou tel moyen de calcul, n'est-ce pas parce qu'on leur a enseigné avant tout le calcul, et très peu la mise en calcul, si on peut ainsi s'exprimer ? Ne faudrait-il pas que la mise en calcul devienne dans la classe de mathématique (et dans les programmes), autant sinon plus importante que l'exécution du calcul ? Le sens est toujours premier : c'est lui qui fait briller les yeux des écoliers.

PARTIE IV

Ça fait longtemps qu'on cherche !

Chapitre XIII

Sur la notion de recherche dans le domaine de l'éducation mathématique

Depuis bien des années, on a accumulé des recherches, des études et des résultats théoriques sur l'apprentissage des mathématiques. Pourtant, peu de choses changent dans la pratique, c'est-à-dire dans les classes. Il est donc important de questionner ces recherches.

Nous essayons ci-après d'apporter quelques éléments de réponse aux deux questions suivantes :

• où se situent et où doivent se situer les recherches dans le domaine de l'éducation mathématique ?

• peut-on dégager certaines conditions de pertinence de ces recherches ?

L'autonomie de la pensée

Déjà, J. Dewey (1916) écrivait : « Je veux souligner le fait qu'aucune pensée, aucune idée ne peut être communiquée en tant qu'idée par une personne à une autre personne. Quand elle est dite, elle est, pour la personne à qui elle est dite, un fait donné comme les autres, non une idée. La communication peut conduire l'autre personne à se poser elle-même la question et à imaginer une idée semblable, ou bien elle peut étouffer son intérêt intellectuel et réprimer tout effort naissant de pensée. Mais ce qu'elle obtient *directement*[1] ne peut pas être une idée. C'est seulement lorsqu'elle est aux prises avec les données du problème, en cherchant et en trouvant elle-même le moyen de s'en sortir, qu'elle pense. » « Les faits ou vérités, écrit aussi Dewey[2], deviennent des sujets d'étude – c'est-à-dire de recherche et de réflexion – quand ils entrent comme facteurs dont on doit tenir compte dans le déroulement d'un cours d'événements dans lequel nous sommes engagés et dont le résultat nous affectera. »

Cette constatation de l'autonomie de la pensée a été reprise, approfondie et expérimentée tout au long du XX^e siècle. Elle sous-tend les grandes tentatives de réforme d'aujourd'hui, comme par exemple les *Curriculum and evaluation standards for school* *mathematic* [3]. Nous l'adoptons comme idée directrice pour la suite de cet exposé. Mais en même temps, notons le paradoxe : il est vrai qu'on reconnaît de plus en plus le caractère nécessairement autonome de la pensée, l'intérêt d'organiser la construction personnelle du savoir et de l'expérience, mais en même temps cette idée de base est peu mise en œuvre dans le système éducatif. On ne voit pas beaucoup d'élèves, d'enseignants, d'acteurs sociaux devenir chercheurs chacun sur son terrain.

Notons aussi que cette idée s'oppose absolument à celle du partage des responsabilités entre recherche sur l'enseignement d'une part et pratique de l'enseignement de l'autre. On ne peut pas simplement sous traiter à des spécialistes l'étude des difficultés de l'enseignement et transmettre ensuite les solutions aux enseignants. Une telle forme de taylorisme ne peut fonctionner. Dewey, dans le même ouvrage, écrit encore : « Rien n'a causé plus de tort à la théorie pédagogique que le fait de croire qu'elle consiste à remettre aux enseignants des recettes et des modèles qu'il leur suffit d'appliquer dans leur enseignement. »

Quatre couches de recherches

Nous distinguerons ci-après quatre « couches » de recherches orientées vers l'apprentissage. (Notons par précaution qu’il s'agit là d'une vue schématique, proposée ici pour la clarté de l'exposé. Bien des chercheurs sont en effet « à cheval » sur plusieurs couches.) Les premières recherches et les plus importantes, celles auxquelles les trois autres s'ordonnent, sont *les recherches des élèves*. Comment ceux-ci construisent-ils, tout au long de leur jeunesse, leur autonomie intellectuelle, leur capacité de chercher sur des questions, de penser mathématiquement ?

Les deuxièmes sont *les recherches de l'enseignant sur le terrain des classes*. Un élève n'est pas l'autre, les classes sont différentes, comme le sont aussi les écoles, les matières, les trimestres, les jours, les inspecteurs, les collègues, etc. Dans le contexte touffu, changeant, souvent imprévisible de sa classe, chaque enseignant conduit sa barque en observant ce qui se passe, en réfléchissant, en s'informant, en ajustant son action à ses objectifs, en augmentant et améliorant son expérience. La réflexion en prise directe sur l'action est une forme authentique de recherche qu'aucune autre ne peut remplacer.

Il faut noter toutefois que ces deux premières couches de recherche sont peu conformes aux critères académiques. De ce fait, elles sont rarement considérées comme des recherches au sens ordinaire.

Les recherches du troisième type sont *les recherches sur le développement de curriculum*, c'est-à-dire celles qui visent à concevoir un système d'enseignement d'une matière donnée (en ce qui nous concerne les mathématiques) applicable à un type d'élève et une tranche d'âge donnés, et donc destiné à être utilisé par beaucoup d'enseignants et dans beaucoup de classes. Ces recherches sont à la fois globales, car elles touchent à tous les aspects de l'enseignement (aménagement de la matière, méthodes, contrôle des connaissances), et nettement plus abstraites que les précédentes, puisqu'elles ne prennent en compte aucun élève, aucune classe en particulier. Elles tablent sur une classe moyenne, d'ailleurs difficile à cerner. Un curriculum est une sorte de partition (au sens musical) que l'enseignant doit encore interpréter dans sa classe, adapter au concret, ce qui fait partie de sa recherche à lui.

Du fait qu'elle vise l'action et ses moyens plus que la connaissance, cette troisième couche de recherches est plus souvent considérée comme « développement » que comme recherche au sens habituel.

Reste la quatrième couche, celle *des recherches que*, pour faire bref, *nous qualifierons d'universitaires* (même si celles de la troisième couche sont aussi parfois poursuivies dans les universités). Ces recherches portent sur des sujets variés et sont de portées diverses. Elles seules sont le plus souvent, dans les milieux académiques, considérées comme recherches authentiques. Elles sont certes importantes. Rappelons toutefois que ce sont surtout ces recherches-là, théorisantes par nature, qui ont peu d'impact sur l'enseignement tel qu'il se pratique.

Nous ne reviendrons qu'incidemment ci-après sur les recherches des élèves et sur les recherches universitaires. Répétons toutefois que les trois dernières couches n'ont de sens que dans la mesure où elles contribuent à la croissance intellectuelle des élèves, à leur capacité de recherche.

Des enseignants chercheurs ?

Essayons maintenant de voir à travers quelles difficultés un enseignant peut réfléchir à ce qu'il fait. Nous verrons ensuite ce qui, éventuellement, l'empêche d'agir et de se considérer comme chercheur. Tout d'abord – nous y avons déjà fait allusion ci-dessus – une classe est toujours beaucoup plus complexe que ce qu'une recherche, aussi minutieuse soit-elle, peut cerner : chaque élève a sa propre forme d'esprit et sa propre expérience (tout un monde pour chacun), le savoir s'élabore par essais et erreurs et ne saurait être immédiatement clair, le langage est imparfait, les facteurs intrinsèques de l'apprentissage sont multiples et souvent inattendus (psychologiques, sociaux, institutionnels, etc.), trop de choses se passent en même temps pour que l'enseignant puisse les percevoir et les maîtriser, et certaines sont insaisissables par essence, à savoir celles qui, dans la maturation intellectuelle, ont lieu dans le subconscient de chacun. Plongé dans une telle complexité, l'enseignant souvent pare au plus pressé et navigue à l'estime.

Arrêtons-nous un moment sur cette métaphore de la navigation. S'il est vrai qu'une partie du savoir et de l'expérience d'un enseignant peut être solide et stable, une autre partie doit demeurer susceptible d'ajustement et de révision. Un peu comme en météorologie, certaines prévisions à long terme sont hasardeuses. Une classe en recherche n'aboutit pas toujours où l'on pense, c'est le moins qu'on puisse dire. L'expérience de l'enseignant s'apparente davantage à celle du pilotage d'un navire sur une mer aléatoire qu'à une collection de méthodes infaillibles. Mais le pilotage, la capacité de voir clair rapidement et de prendre des décisions sur le tas sont des choses qui s'apprennent et s'appuient sur un savoir.

On le voit, une telle pratique de la réflexion dans l'exercice du métier n'est pas facile. Elle n'est guère encouragée non plus.

Certains enseignants, par exemple, ne se posent pas beaucoup de questions à propos des mathématiques, et cela peut être dû à ce qu'ils n'ont retiré de leurs études qu'une culture mathématique limitée. Cette situation est explicable, surtout dans le cas des instituteurs qui ont à enseigner toutes les matières (et dans bien des cas, les mathématiques ne sont pas celle qu'ils préfèrent). Ils peuvent être persuadés que les mathématiques élémentaires sont bien définies, simples et qu'elles se ramènent à la pratique de quelques règles sans exception. Ils peuvent ne pas soupçonner la variété et l'importance de tous les phénomènes qui les sous-tendent sur le plan intuitif, tout en opposant des obstacles à leur élaboration dans l'esprit.

Plus généralement, les idées toutes faites empêchent la curiosité. Pourquoi s'interroger sur les difficultés d'apprentissage des mathématiques si l'on croit à la bosse des maths (les doués réussiront, les autres non) ? Pourquoi envisager plusieurs façons d'enseigner si l'on pense que les mathématiques sont une science établie une fois pour toutes, claire, purement déductive, où l'on doit toujours chercher l'unique bonne réponse par l'unique bonne méthode, où la rigueur est l'exigence majeure, en quelque sorte unique, où l'erreur est toujours nuisible et doit être pourchassée sans cesse ? Cette idéologie fausse des mathématiques est de tradition très ancienne et n'est sans doute pas près de disparaître (voir à ce sujet le chapitre V).

Certaines contraintes institutionnelles peuvent aussi expliquer que beaucoup d'enseignants soient peu enclins à remettre en question leurs conceptions et leur pratique. Chacun doit préparer ses élèves pour l'année suivante ou pour des examens officiels qui imposent une certaine forme de mathématiques. Chacun doit organiser lui-même des examens qu'il faut noter « objectivement ». Or s'il est facile de se donner à l'avance une règle pour comptabiliser des fautes de calcul, ce n'est pas le cas si on veut estimer le degré d'assimilation d'un concept. D'où parfois une hypertrophie de l'enseignement des calculs routiniers, partie la moins intéressante de l'activité mathématique.

Un autre facteur important doit encore être relevé. Il est lié aux précédents : c'est la peur. Si les mathématiques sont une science claire, univoque, d'où l'erreur est proscrite, qui distille des certitudes, où l'opinion n'a pas cours, qui est l'affaire des gens intelligents, si les élèves, les parents, les collègues attendent de l'enseignant qu'il soit infaillible, la peur s'installe. Et l'enseignant a tendance à se maintenir en terrain sûr, à éviter les risques intellectuels, à réprimer l'erreur, ainsi que la pensée libre et imaginative.

Lorsqu'un enseignant n'est pas lui-même chercheur, il n'a aucune chance d'être réceptif aux recherches poursuivies par d'autres que lui. Il accueillera les propositions de nouveau curriculum avec lassitude et ne prendra sans doute même pas connaissance des autres recherches, celles que nous avons appelées recherches universitaires. Ceci résulte de l'analyse de Dewey, rappelée au début de cette étude : une condition nécessaire pour assimiler les idées des autres, c'est de se poser des questions, d'être en quête de réponses. D'où *une conclusion paradoxale* : pour que les recherches sur le curriculum et les recherches universitaires aient un impact sur l'enseignement, il ne suffit pas qu'elles soient pertinentes et soient communiquées aux enseignants, il faut encore que ceux-ci soient encouragés dans la voie de *leurs propres recherches*.

Arrêtons-nous un moment sur cette dernière condition. Pour que les enseignants deviennent chercheurs, il faut leur en donner les moyens : assez de temps, un soutien hiérarchique à l'expérimentation, un accès facile à la documentation, des possibilités d'échanges oraux et écrits de leurs productions (colloques, revues, etc.), en somme tout ce qui soutient une recherche quelle qu'elle soit.

Qui plus est, les enseignants devraient recevoir une initiation explicite à la pratique de la recherche à la fois en général et dans leur domaine particulier. Cela devrait faire partie de leur formation initiale et devenir, sans doute, la composante principale de leur formation continue.

Certaines de ces conditions (nécessaires et insuffisantes) pour promouvoir la recherche des enseignants sont peu réalisées dans l'institution scolaire d'aujourd'hui, à tout le moins en Belgique. Relevons deux lacunes particulièrement évidentes : l'absence quasi générale d'un rayon de bibliothèque de mathématiques dans les écoles et l'absence d'initiation à la recherche.

Le développement de curriculum

Examinons maintenant, dans les grandes lignes, ce qui peut faire la qualité ou les défauts d'une recherche sur le curriculum. Une première observation s'impose à la lumière de l'expérience des « mathématiques modernes ». Il n'est pas nécessaire d'en reprendre ici la critique[4] pour affirmer qu'on ne peut pas confier l'élaboration d'un curriculum aux seuls mathématiciens chercheurs, car ils ne connaissent pas bien la maturation des concepts mathématiques au départ de l'expérience commune. Ils ignorent trop aussi les enfants, les classes et les conditions du métier d'enseignant.

De même on ne peut pas confier l'élaboration d'un curriculum aux seuls enseignants ou aux responsables administratifs de l'enseignement, car leurs préoccupations professionnelles ne les mettent pas en contact direct avec les mathématiques vivantes, celles qui, au cours des siècles, n'ont jamais cessé de revoir leurs fondements. Et ces fondements ont quelque chose à voir avec les mathématiques les plus élémentaires, même s'il serait absolument faux de dire qu'il faut enseigner les fondements des mathématiques aux enfants.

Il faut donc confier l'élaboration des curriculums à des équipes de recherche composites rassemblant toutes les compétences, depuis les enseignants expérimentés de tous niveaux jusqu'aux mathématiciens chercheurs[5]. De telles équipes existent déjà dans certains pays, mais à coup sûr pas dans tous.

Par ailleurs, le développement de curriculum est une entreprise difficile à beaucoup d'égards. La pensée mathématique au travail, même sur les sujets les plus élémentaires, est une constante source de surprises, ce qui veut dire qu'on manque d'instruments de prévision. On ne dispose pas, pour construire un curriculum, de modèles fiables du fonctionnement de l'esprit, non plus que de la psychologie des enseignants ou de la sociologie des classes. Beaucoup de choses demeurent inexprimées par essence, par exemple le travail mathématique subconscient[6] ou les causes profondes des idéologies (y compris celles qui concernent les mathématiques). Tout cela fait que la plupart des hypothèses ont une autonomie faible. Le développement de curriculum n'est ni une discipline entièrement rationnelle, ni, comme les sciences expérimentales constituées, un contrepoint méthodique et clair de la théorie et de l'expérience[7].

De là découle la nécessité, pour l'équipe de développement, de soumettre sans cesse ses productions à des enseignants, des classes, des élèves variés. La réalité avec ses surprises et ses contraintes est de loin la principale pierre de touche des opinions. Les deux écueils opposés (Charybde et Scylla…) entre lesquels il faut passer nous ramènent à notre point de départ, à savoir l'autonomie intellectuelle, la recherche : il ne faut pas prendre les élèves et les enseignants par la main et les conduire pas à pas en empêchant leur initiative, mais il ne faut pas davantage les laisser sans soutien suffisant face à des situations tellement ouvertes qu'ils prennent peur et se réfugient dans la routine. L'objectif est bien d'apprendre aux élèves à penser mathématiquement par eux-mêmes sous la conduite de maîtres qui ont l'expérience personnelle de ce que cela veut dire.

Puisque le développement de curriculum n'est pas une discipline constituée et que la communication entre chercheurs y est rendue difficile par un certain manque de concepts clairs, il est important que s'instaure entre les membres de chaque équipe une familiarité dans les échanges, une connivence intellectuelle. Bien entendu, un maximum de choses doivent être explicitées et expliquées. Mais d'autres, tout en demeurant inexpliquées, voire implicites, seront vécues, pressenties et finalement prises en compte grâce aux échanges dans l'équipe. En outre, on peut attendre un effet positif de la création spontanée d'un vocabulaire propre à l'équipe (« tu sais, c'est comme… ») et, malheureusement ou non, inutilisable pour les communications vers l'extérieur. H. Freudenthal (1978) a bien décrit ce phénomène utile.

Par delà ce langage « confidentiel », et à défaut – rappelons-le – de concepts représentant fidèlement la réalité, les instruments de pensée seront souvent des idéaux types[8], c'est-à-dire des concepts clairs, outils servant à évoquer des choses, mais en perpétuelle attente de nuances et de compléments de sens.

Dans un contexte intellectuel et social aussi touffu et mouvant, la « science » d'une équipe de développement de curriculum s'apparente davantage à la météorologie qu'à la physique, à un savoir et une expérience qu'à une science au sens ordinaire.

Évoquons encore deux difficultés qui peuvent compliquer la formation d'équipes composites regroupant des mathématiciens professionnels et des enseignants de base.

La première est très ancienne : par delà le fait qu'un mathématicien chercheur n'accepte pas volontiers de consacrer du temps à autre chose que sa recherche – ce qui est compréhensible – c'est le peu de considération en laquelle les mathématiciens tiennent les problèmes d'enseignement. Cette situation semble s'améliorer depuis quelques années, comme on le voit à la prise de conscience de plusieurs sociétés professionnelles de mathématiciens.

La deuxième est que l'on a besoin comme chercheurs à part entière d'enseignants expérimentés de tous les niveaux depuis l'école maternelle. Ils sont seuls à disposer de leur compétence spécifique, mais les organismes d'administration de la recherche ne sont pas habitués à les considérer comme chercheurs potentiels. Ils ne font pas de doctorat, ils n'ont pas en vue une grande carrière universitaire. Les critères habituels de sélection des chercheurs et d'appréciation de leurs travaux ne sont pas pertinents. Il n'en faut pas davantage pour qu'on les perçoive comme des intrus. Il faudrait au contraire que leur rôle dans les équipes de recherche soit reconnu et que les gestionnaires scientifiques conçoivent et leur appliquent des critères de qualité adaptés à leur type particulier de contribution.

Il est peut-être intéressant de généraliser cette observation. La société reconnaîtra sans doute de plus en plus que certains problèmes sociaux importants (l'enseignement des mathématiques par exemple)

- méritent qu'on leur consacre des recherches ;
- sont impossibles, vu leur complexité, à saisir sur le mode de la science ordinaire ;
- ne peuvent donc être sous-traités aux seuls chercheurs universitaires ;
- exigent par conséquent la collaboration active en tant que chercheurs de certains acteurs sociaux de la base.

Ceci étant, il faudra donc bien, pour assurer la qualité de ces recherches, créer des structures de gestion et de contrôle de ces équipes d'un type nouveau[9].

Notons enfin que si la compétence de certains chercheurs est liée au fait qu'ils sont personnellement impliqués dans le sujet même de la recherche (la classe, l'enseignement), on doit se demander s'ils peuvent disposer du recul nécessaire, du détachement dont on fait souvent une condition de l'objectivité. Cette question est très ancienne et nous ne chercherons pas à la vider ici. Contentons-nous d'observer ce que l'expérience montre fréquemment : lorsqu'un enseignant (ou n'importe qui) participe à une équipe de recherche, à des discussions fréquentes avec des interlocuteurs aux compétences diverses, lorsqu’il accède à une documentation variée, il prend petit à petit de la distance par rapport aux idées toutes faites et développe son esprit critique[10].

Chapitre XIV

Pourquoi s'intéresser à l'histoire des mathématiques ?

Pourquoi certains enseignants de mathématiques, de plus en plus nombreux semble-t-il, s'intéressent-ils à l'histoire[1] de leur discipline ? Voici, à notre meilleur jugement, quelques bonnes raisons qu'ils peuvent avoir pour cela.

L'histoire aide à retrouver les défis primitifs

Il ne faut pas s'interroger longtemps pour apercevoir une première raison de rechercher l'origine de certains concepts. En effet, l'histoire montre que les choses qui paraissent élémentaires aux adultes que nous sommes n'ont parfois été mises au point qu'avec difficulté, ce qui est bon à savoir lorsqu'on doit les enseigner. Il faut, comme le dit F. Lemay (1974) retrouver « les défis primitifs ».

Prenons un exemple. C'est une chose banale que de mesurer les longueurs en mètres, kilomètres, centimètres, etc. et d'exprimer les mesures dans notre système de numération décimale pourvu de la virgule. Or derrière cette simple pratique se cachent des millénaires de tâtonnements.

D'abord l'*homo sapiens*, perdu dans la nuit des temps, a dû comparer directement deux objets allongés en les rapprochant, puis quand ce n'était pas possible, transporter de l'un à l'autre un troisième objet servant à la comparaison. La numération de position pour les nombres entiers était connue des Assyro-Babyloniens, mais chose étrange, elle n'est pas parvenue jusqu'aux Grecs. Par ailleurs, on s'est servi d'étalons de mesure depuis la plus haute antiquité. Mais lorsqu'une mesure « ne tombait pas juste », on exprimait le reste par une fraction, et les fractions utilisées avaient les dénominateurs les plus variés. C'est seulement au XVIe siècle que Simon Stevin dans *la Disme* (1634) a introduit en Occident pour les nombres non entiers, qu'ils soient rationnels ou non, les principes de la numération de position. Il a proposé en même temps le système décimal d'unités de mesure coordonné à cette nouvelle numération, libérant par le fait même les artisans et commerçants du fardeau d'avoir à calculer avec des « rompuz » (c'est-à-dire des fractions inférieures à l'unité.) Mais il a fallu attendre encore deux cents ans avant que la Révolution française ne promulgue un tel système d'unités, et on sait que les États-Unis d'Amérique ne l'ont pas encore adopté. Ainsi, le curieux système anglais des poids et mesures est aujourd'hui le témoin d'une époque très ancienne, manifestant l'extrême stabilité de certaines coutumes et institutions et l'importance de ce que Fernand Braudel appelait « le temps long ».

Lorsqu'on veut aider un enfant à s'approprier la numération décimale et le système décimal des poids et mesures, il n'est pas indifférent d'avoir à l'esprit les étapes qu'il devra franchir, les défis qu'il aura à relever. L'histoire aide à identifier ces défis.

Il serait facile, mais nous manquons de place pour le faire ici, de donner d'autres exemples analogues, à commencer par ceux qui concernent les extensions de la notion de nombre vers les négatifs, les complexes, etc.

Les mathématiques travaillent à détruire leur histoire

Essayons maintenant d'approfondir notre analyse. D'abord, il est clair que toute théorie mathématique a une histoire. Au départ, il y a toujours une ou des questions et la théorie s'élabore par étapes pour y répondre. Sa genèse passe par des doutes, des conjectures, des intuitions vraies ou fausses, des paradoxes surmontés, des impasses reconnues puis abandonnées, des constructions partielles difficiles à raccorder, des conceptualisations maladroites. Mais à travers ces péripéties, ces mouvements apparemment désordonnés de la pensée en recherche, ce qui est visé, c'est la constitution d'une théorie logiquement cohérente. Celle-ci doit certes répondre aux questions de départ, encore que bien d'autres questions et difficultés surgissent en cours de route. Mais au fur et à mesure que le travail avance, la pensée s'absorbe de plus en plus dans son agencement logique. Construire une théorie mathématique est une bataille de l'esprit contre sa propre histoire. Il faut arriver à gommer l'énorme (et passionnant) foisonnement de la recherche pour ne laisser subsister que la théorie impeccablement déductive, sorte de cristal brillant, net et froid, qui prend place sous forme de traité dans le musée de la pensée intemporelle (jusqu'à ce que, peut-être, un accident lui redonne vie, mais ceci est une autre… histoire). Ainsi, parce qu'il est un effort vers le déductif, le travail mathématique engendre la mise à l'écart, l'oubli de ses origines et de sa démarche constitutive.

Une autre raison écarte les théories mathématiques de leur histoire. C'est que toute théorie a pour fonction de servir d'instrument de pensée (c'est-à-dire de résolution de problèmes) dans des contextes variés, que ce soit à l'intérieur des mathématiques ou dans les applications extérieures à celles-ci. Or si une théorie demeurait liée aux questions qui l'ont d'abord suscitée, si ces concepts restaient sémantiquement ancrés dans un contexte particulier, elle ne serait pas disponible comme outil abstrait à usages multiples, elle n'aurait pas la souplesse d'emploi (en anglais *versatility*) que seule l'abstraction peut lui conférer.

C'est vers la fin du XIXe siècle que les théories mathématiques ont commencé à abandonner leur statut d'étude d'un objet donné pour se transformer en structures abstraites disponibles pour l'étude de multiples objets particuliers. Et, chose étrange, cette émergence des structures pures n'est pas due d'abord à l'idée de créer des machines outils de la pensée (comme certains les ont appelées ultérieurement).

Attardons-nous un instant sur ce point. Au tournant du siècle, les mathématiques ont été secouées par une grande « crise de fondement ». Il est impossible de la relater ici dans les détails. Disons simplement que les mathématiciens de cette époque ont mis à jour des paradoxes qui leur ont fait craindre de voir leur discipline ébranlée par des contradictions. Ils ont alors tenté de prouver, pour se rassurer, que leurs théories seraient à jamais exemptes de contradiction. Et pour ce faire, pour y voir clair, ils les ont amenées à une sorte d'état limite où les concepts de départ sont totalement vidés de contenu sémantique et sont ensuite combinés selon quelques règles de pure forme appelées *axiomes*. En somme, ils ont ramené le problème de la non-contradiction de l'énorme édifice des mathématiques à celui de la non-contradiction de quelques axiomes (de la théorie des ensembles) dont toutes les mathématiques, à peu de choses près, se tirent ensuite par application des règles de la logique.

Ce sont les théories mathématiques réinscrites dans ce cadre, et donc arrivées à cet état de sécheresse, à cette extrémité de leur mode d'existence, qui se sont mises à servir les unes dans les autres et dans les applications comme des machines-outils de la pensée.

Une telle analyse de l'évolution des mathématiques depuis la fin du siècle passé risque de donner une impression grossièrement fausse de cette science dans son état actuel. Les mathématiques ne sont pas une science achevée, ayant définitivement atteint le stade de la perfection logique. Au contraire, elles demeurent pleines de questions non résolues provoquant, comme elle l'ont toujours fait, doutes, conjectures, intuitions, etc. Les chercheurs ne s'en plaignent pas, puisque c'est là leur stimulant quotidien.

Mais c'est plutôt des élèves et étudiants qu'il s'agit ici. Si on leur enseigne les mathématiques sous une forme trop figée, trop cristalline, ils pensent qu'elles sont par essence intemporelles, immuables, achevées. Ils ne savent pas qu'elles ont résolu des problèmes et qu'elles peuvent en résoudre encore. Car comment discerneraient-ils ces problèmes ? Alors, et c'est un signe de santé intellectuelle, ils demandent : « Mais d'où cela sort-il ? Pourquoi a-t-on inventé ces choses qui tombent du ciel ? Qui a bien pu penser à cela ? À quoi cela sert-il ? » Ces questions importantes méritent toujours des réponses attentives. L'histoire peut être exploitée pour cela, et l'expérience montre que les élèves sont souvent sensibles au supplément de sens qu'elle leur apporte. Par ailleurs, l'histoire n'est pas le seul recours, car les théories peuvent aussi trouver dans le présent des raisons d'être et des occasions de se remettre à vivre.

L'histoire montre les questions auxquelles les théories ont répondu

Mais les questions que l'exploration historique découvre à l'origine des théories ne sont, loin de là, pas toujours celles qu'on aurait attendues. Prenons quelques exemples.

> La trigonométrie n'est pas née un jour du désir d'un mathématicien d'étudier les angles du triangle. Elle est née en partie substantielle chez Ptolémée (au IIe siècle de notre ère) comme instrument d'étude des mouvements des astres.
>
> Les nombres négatifs ne sont pas nés du besoin de graduer des droites, mais bien – au moins était-ce une raison fondamentale de l'intérêt qui leur était porté – du fait que l'on pouvait trouver des solutions positives à certaines équations, à condition d'accepter de calculer avec des négatifs en cours de résolution, négatifs qui avaient le bon goût de disparaître à la fin des calculs.

Les coniques, c'est-à-dire la parabole, l'hyperbole et l'ellipse, sont les courbes que l'on obtient comme intersection d'un cône et d'un plan. Elles ont été beaucoup étudiées par les Grecs, et en particulier par Apollonius au IV[e] siècle avant J.-C. (1923) Ce sont des figures géométriques qui viennent naturellement, dans un ordre de complexité croissante, après la droite et le cercle, et on pourrait croire naïvement que, la géométrie s'occupant initialement des figures, on les a étudiées sans autre désir que de les connaître. Or l'histoire semble prouver qu'il n'en est rien (*cf.* M. Kline, 1972). En effet, parmi les grands problèmes posés par les Grecs était celui de la duplication du cube : il s'agissait de construire à la règle et au compas le côté d'un cube double d'un cube donné. À défaut d'y arriver (et on a démontré seulement au XIX[e] que c'est impossible), Hippocrate s'est détourné de la règle et du compas (c'est-à-dire de la droite et du cercle) pour prouver qu'on pouvait résoudre le problème par des intersections de coniques. Et c'est à cet effet qu'il aurait introduit l'étude de ces courbes.

Autre exemple : la théorie des ensembles. Tout le monde en connaît l'existence depuis qu'on en a mis quelques éléments au départ des cours élémentaires de mathématiques. Cette théorie est à la base même des mathématiques depuis que celles-ci ont revu leurs fondements au tournant du siècle. Mais elle n'a pas été conçue d'abord pour cela. En effet Cantor, son initiateur, l'a étudiée pour résoudre un problème très technique dont l'énoncé même ne dira rien à beaucoup de lecteurs (mais cela n'a pas d'importance) : il s'agissait de l'unicité des fonctions représentées par des séries de Fourier.

L'intérêt de ces exemples est de montrer qu'une théorie mathématique n'est pas nécessairement un édifice dont on possède une esquisse avant d'en réaliser fidèlement les détails selon le plan prévu. C'est bien plus souvent le développement surprenant d'une pensée qui ajuste son cap et parfois même modifie son objet au gré des multiples difficultés rencontrées et de connexions nouvelles qu'elle se découvre en cours de route avec d'autres théories.

Cela, c'est l'histoire qui nous l'apprend. Mais il faut aller plus loin et tenter de comprendre cas par cas comment et pourquoi les théories passent des balbutiements de leurs débuts à la forte charpente logique et symbolique qui marque leur maturité.

Ici aussi, un exemple s'avère éclairant.

Le lecteur conviendra sans peine que les fractions

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\ldots \qquad (1)$$

deviennent de plus en plus petites et tendent vers 0 au fur et à mesure que l'on avance dans la suite. Ainsi la notion de limite (nulle en l'occurrence) semble-t-elle *a priori* claire et facile à exprimer. Pourquoi alors les mathématiciens disent-ils qu'une suite de nombres

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\ldots\ a_n\ldots$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini si pour tout ε strictement plus grand que zéro, il existe un nombre naturel N tel que pour tout nombre naturel n plus grand que N, on ait $|a_n|$ (la valeur absolue de a_n) inférieur à ε ? Que le lecteur à nouveau nous pardonne ce langage abscons (qu'il a pourtant dû rencontrer à l'école secondaire). La plupart des concepts mathématiques sont comme celui-là ciselés dans un langage plein de précautions, de réserves, de termes hautement techniques. Pourquoi ?

Poursuivons avec le même exemple. Parmi toutes les suites qui tendent vers 0, il en est beaucoup qui ne le font pas de façon aussi visible que la suite (1). On peut, avec un calculette, explorer la suite

$$\frac{20}{1}, \frac{20\times 20}{1\times 2}, \frac{20\times 20\times 20}{1\times 2\times 3}, \frac{20^4}{1\times 2\times 3\times 4}, \frac{20^5}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}\ldots$$

ou encore la suite

$$0,999,\ (0,999)^2, (0,999)^3,\ \ldots$$

Il ne saute pas aux yeux que ces deux suites tendent vers 0. On n'arrive à le prouver qu'à la suite d'un raisonnement non élémentaire.

De tels raisonnements sont des constructions techniques impossibles à réaliser en s'appuyant sur la notion première et intuitive de limite nulle. On a besoin, pour construire une démonstration, de concepts saisis techniquement et dûment pourvus des « accessoires » leur permettant de se faufiler avec sécurité parmi les pièges du raisonnement.

Ce que l'histoire peut montrer si on l'interroge à ce sujet (et non sur d'autres aspects plus anecdotiques), ce sont précisément ces pièges. I. Lakatos (1984), parlant de *proof generated concepts* (concepts forgés sur des chantiers de preuves) a montré sur deux exemples importants comment et pourquoi certains concepts ont été de plus en plus élaborés et raffinés techniquement pour tenir le coup (être de bons outils) dans les démonstrations portant sur des objets mathématiques de plus en plus généraux (et donc de plus en plus piégés).

Là se trouve sans doute l'apport clé de l'histoire pour un professeur de mathématiques (et pour un mathématicien) : expliquer les raisons de l'évolution de chaque concept vers une technicité croissante et donc pouvoir répondre cas par cas et précisément à la question « à quoi ça sert (cette technicité) ? » De telles réponses sont plus convaincantes que les arguments globaux et sommaires du genre : « ça sert dans les applications », ou « les mathématiques ont besoin de rigueur », ou encore « tu verras plus tard ! » Bien sûr, ici non plus l'histoire n'est pas l'unique recours, on peut aussi découvrir les raisons d'être des caractères techniques d'un concept par une analyse mathématico-épistémologique entièrement située dans les mathématiques actuelles. Mais l'histoire aide, et même beaucoup.

L'histoire des mathématiques au sein de l'histoire générale

Au VIe siècle avant J.-C., l'école pythagoricienne, qui était aussi une secte religieuse, professait que toutes choses et l'univers lui-même pouvaient s'expliquer à partir des nombres naturels 1, 2, 3,…, jusqu'au jour où l'un des leurs montra par un raisonnement bref mais incroyablement subtil qu'il n'est pas possible de trouver un segment de droite qui soit contenu un nombre entier de fois dans le côté d'un carré et aussi un nombre entier de fois dans sa diagonale. Il s'agit là d'une découverte purement théorique, une affaire d'intellectuels purs. Car tous les praticiens se contentent de mesurer les carrés avec la précision qui leur convient et ne se soucient pas du fait que leurs mesures ne soient *jamais absolument exactes*. Mais pour les mathématiciens, il s'avérait que les nombres naturels (les seuls nombres reconnus de cette époque) n'étaient pas des instruments adéquats pour étudier la géométrie. Il fallut plus de vingt-trois siècles, d'abord pour que l'on accepte d'étendre l'idée de nombre, et ensuite pour mettre au point des nombres nouveaux (ceux que l'on appelle *réels*) capables d'exprimer la mesure d'un segment quelconque, fût-ce, comme c'est le cas pour $\sqrt{2}$ et π, au prix d'une infinité de décimales ne se répétant pas périodiquement. C'est seulement, en effet, aux environs de 1870 que de tels nombres ont acquis dans les mathématiques un statut rigoureux et désormais incontesté (grâce aux travaux de Dedekind, Weierstrass et Cantor).

Voici maintenant un autre épisode de l'histoire des mathématiques. Jusqu'au XVI^e siècle, il arrivait bien que l'on désigne l'inconnue d'une équation par une lettre (par exemple x), mais il a fallu attendre Viète au XVI^e siècle (1970), pour que *toute quantité, toute variable* (même susceptible de prendre un infinité de valeurs) soit communément désignée par une lettre et que soient proposés pour les opérations algébriques des symboles proches de ceux que nous utilisons aujourd'hui. Ce mode nouveau d'expression a considérablement facilité l'exercice de la pensée mathématique. Il a permis à Descartes et Fermat d'établir un pont entre la géométrie et l'algèbre, et plus tard à Newton, Leibniz et quelques autres après eux de fonder l'analyse infinitésimale, cette partie des mathématiques qui distille les infiniment petits et les infiniment grands, et sans laquelle les hommes n'auraient pas bien compris la mécanique, la thermodynamique et l'électricité, sans laquelle la révolution industrielle en serait sans doute encore à son balbutiement.

Si on se souvient en outre et plus généralement que les mathématiques ont depuis vingt-cinq siècles donné des modèles et des outils au rationalisme occidental, on peut se demander ce qui a le plus marqué l'évolution de l'humanité de la bataille de Samothrace ou de l'incommensurabilité du côté et de la diagonale du carré ? De la guerre de Cent Ans ou de la symbolisation de l'algèbre ?

Bien sûr, de telles questions sont biaisées, car l'histoire s'intéresse aussi à d'autres choses que les guerres et les traités. Mais tout de même – et nous proposons ceci comme conclusion – l'histoire des mathématiques, partie intégrante et importante de l'histoire tout court, intimement liée au destin de l'humanité, est source de sens et de culture dans l'acception profonde de ce terme. N'est-elle pas (avec l'histoire des sciences) quelque peu négligée, entre autres dans la formation de nos élèves et de leurs professeurs ?

Notes

CHAPITRE PREMIER. – Comptez et multipliez.

Ce chapitre a été retravaillé collectivement à partir d'un texte de Pierre SARTIAUX et du GEM (Groupe d'Enseignement des Mathématiques), *Mathématiques et pédagogie*, n° 85, pp. 19 à 32, 1992.

1. La multiplication « per gelosia » se retrouve simultanément ou à des périodes différentes, en Chine, en Inde, dans les pays d'Islam et en Europe.

La pratique de cette technique, dans toutes les civilisations, repose sur les mêmes principes de base, mais avec cependant quelques variantes dans son application et dans sa présentation : elle est aussi connue sous les noms de multiplication « par tableau », « par grillage », « par filets », ou « par jalousie ». Cette dernière application faisant référence au nom de certaines fenêtres vénitienne. (CHABERT, J.-L., 1994.)

Chap. II. – Le jeu de la banquière.

Ce chapitre a été inspiré par un texte d'Alain Desmarets, paru dans la revue *Échec à l'échec*, n° 100, de la C. G. E. (Confédération Générale des Enseignants.)

Chap. III. – Voir dans sa tête.

Ce chapitre est issu d'une conférence du GEM lors d'un congrès S. B. P. M. (Société Belge des Professeurs de Mathématiques) en 1993. La rédaction en a été assurée par Pierre Sartiaux dans *Mathématique et Pédagogie*, n° 95, janvier-février 1994, pp. 79 à 85.

Chap. IV. – Trafic et graphiques.

Ce chapitre a été écrit par Benoît Jadin d'après un travail effectué par le GEM.

Chap. V. – Les idées qu'on se fait des mathématiques.

Ce chapitre a été écrit par Nicolas Rouche, et comme tous les autres, retravaillé en collectif par les auteurs.

1. Jusqu'à Hilbert, les axiomes avaient, pour l'essentiel, le statut d'évidences premières. Hilbert, initiateur principal de la position formaliste en mathématiques, a donné aux axiomes le statut (théorique) de propositions soumises à la seule condition de non-contradiction.

Chap. VI. – S'il n'y avait plus de problème, avec quoi salerait-on ?

Ce chapitre est inspiré de plusieurs articles de Benoît Jadin parus en partie dans la revue *Échec à l'échec*, de la C. G. E.

Chap. VII. – Mise en boîte.

Ce chapitre a été écrit par Alain Desmarets à partir d'un article paru dans la revue *Échec à l'échec*, de la C. G. E.

Chap. VIII. – Qui a tué le petit génie qui sommeillait en eux ?

Ce chapitre est inspiré d'un texte de Benoît Jadin, écrit pour la revue *Forum Pédagogie* du SeGEC (Secrétariat Général de l'Enseignement Catholique).

1. Alain Connes a reçu la médaille Fields en 1982. La médaille Fields est l'équivalent, pour les mathématiques, d'un prix Nobel.
2. Portrait d'un médaillé Fields, *Le Monde*, Dossiers et documents, avril 1989.
3. Qu'a fait l'élève au cours de mathématiques ? Pour plus d'indications sur ce qu'est faire des mathématiques, le lecteur peut se reporter au chap. VI , « S'il n'y avait plus de problèmes, avec quoi salerait-on ? »
4. Belgicisme qui qualifie un professeur ayant généralement un grand nombre d'élèves en échec.
5. Rapport de la commission scientifique sur l'Enseignement des Mathématiques et des Sciences (dite commission Danblon), *Perspectives sur l'enseignement des Mathématiques dans la Communauté française de Belgique*, ministère de l'Éducation, Bruxelles, 1989.
6. On peut consulter pour l'histoire des numérations le livre de G. Iffrah, 1994.
7. RITTER, James, *Mathématiques mésopotamiennes*. Dans IREM de Nancy, 1993. RITTER, James, *Babylone – 1800 et Chacun sa vérité : les mathématiques en Égypte et en Mésopotamie.* Dans Michel Serres, 1989.
8. S. Baruk a clairement décrit ce phénomène dans plusieurs ouvrages. BARUK, S.,1973, BARUK, S., 1977 et BARUK, S.,1985.

Chap. IX. – Des mathématiques à deux vitesses.

Ce chapitre a été écrit par Benoît Jadin à partir d'articles parus dans le journal *Le Ligueur* et la revue *Échec à l'échec* de la C. G. E.

1. Rapport de la Commission scientifique sur l'Enseignement des Mathématiques et des Sciences, *Perspectives sur l'enseignement des mathématiques dans la Communauté française de Belgique*, ministère de l'Éducation, Bruxelles, 1989.
2. Il s'agit de D. Dacunha-Castelle, professeur à l'université Paris-Sud Orsay
3. HUSSET, M.-J., *Rendre les maths plus attrayantes* (entretien avec D. Dacunha-Castelle), 1989.

Chapitre X. – Les mots pour le dire… en mathématique

Ce chapitre a été écrit par Benoît Jadin à partir d'idées émises dans quelques articles parus dans la revue *Échec à l'échec* de la C. G. E.

1. Pour plus d'informations sur l'histoire du lien entre droites et points, on peut consulter T. Gilbert, B. Jadin, Ph. Tilleuil, « Faire la droite avec des points », dans *Actes du neuvième colloque inter-IREM d'épistémologie et histoire des maths*, *Histoire d'infini*, IREM de Brest, Plougastel, 1995.
2. Une « ligne droite » sur la sphère ou le plus court chemin entre deux points est une partie de grand cercle. Un grand cercle sur la sphère est l'intersection de celle-ci par un plan passant par son centre. Les méridiens et l'équateur, par exemple, sont des grands cercles.

Chap. XI. – Mathématiques : Pour qui ? Pour quoi ?

Ce chapitre a été rédigé par Benoît Jadin.

1. Les maçons pratiquent de la sorte lorsqu'ils doivent carreler, par exemple, et qu'ils partent d'un angle droit. C'est le principe de la corde à treize noeuds équidistants. Les noeuds initial et final se recouvrant, on peut former un triangle rectangle de côtés 3, 4 et 5 et on observe que $3^2 + 4^2 = 5^2$.
2. *Le Monde diplomatique*, n° 496 de juillet 1995, p. 22.
3. L'intensité est la puissance par unité de surface.
4. Une pyramide droite a son sommet sur une perpendiculaire à la base passant par le centre de symétrie de celle-ci.
5. C'est un principe connu sous le nom de « principe de Cavalieri ». Le principe de Cavalieri (mathématicien italien, 1598-1647) :

   1° en version simplifiée, précise que « si les sections par des plans parallèles de deux solides sont toujours égales, ainsi en est-il des volumes des solides » ;

   2° en version complète, précise que « si les sections par des plans parallèles de deux solides sont toujours dans un même rapport, ainsi en est-il des volumes des solides ».

Chap. XII. – Ils doivent savoir calculer.

Ce chapitre reprend en partie un texte de Nicolas Rouche, paru dans la revue *Mathématique et Pédagogie*, n° 70, 1989, pp. 5 à 23.

1. La plupart des disciplines scolaires peuvent mettre l'élève dans une situation analogue de perte de sens. Que l'on songe à la lecture ânonnante des jeunes enfants, aux exercices routiniers de substitution de valeurs numériques dans les formules de physique, aux tableaux de noms et de dates dans les cours d'histoire, etc.

Chap. XIII. – Sur la notion de recherche.

Ce chapitre reproduit une communication de Nicolas Rouche au colloque I. C. M. E. (International Congress on Mathematics Education), Québec, 1992.

1. Dewey souligne.
2. *Ibid.*
3. *Curriculum and évaluation standards for school mathematics*, *National Council of Teachers of Mathematics*, Reston, Virginia, 1989.
4. On pourra consulter par exemple R. Bkouche, B. Charlot et N. Rouche, *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, A. Colin, Paris, 1991.
5. Le CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), installé à Nivelles, tente depuis quelques années de constituer une telle équipe.
6. Rappelons que le rôle du subconscient en mathématiques a été analysé par H. Poincaré et J. Hadamard. Voir par ex. HADAMARD, J., *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Gauthier-Villars, Paris, rééd. 1975.
7. Le comble de l'aberration scientiste serait de croire possible, comme certains l'ont néanmoins prétendu, de concevoir un curriculum portant sur quelques années d'enseignement, puis de l'expérimenter pendant une ou deux fois le nombre d'années en question, pour ensuite le reconnaître recevable, amendable ou inacceptable.
8. On pourra consulter entre autres P. Bourdieu, J.-Cl. Chamboredon, J.-Cl. Passeron, 1983, pp. 246 à 252.
9. Dans certains pays, dont la Belgique n'est pas le seul exemple, il n'y a pas de recherche sur le curriculum comme tel. Les curriculums y sont élaborés de façon morcelée par des commissions de programme et les auteurs de manuels, l'essentiel des questions de contrôle des connaissances relevant de l'initiative des enseignants. Les résultats de ces travaux divers ne sont pas soumis à une critique et un contrôle social vigilants. Il arrive, mais c'est plutôt rare, que certains groupements professionnels d'enseignants de mathématiques contribuent à cette critique. Mais on peut se demander si l'insuffisance de la critique en général (critique est pris ici dans un sens positif, et non au sens de dénigrement) n'est pas due en partie à ce que, assez souvent, le programme et certains manuels sont rédigés par des inspecteurs qui ont aussi pour fonction, par ailleurs, d'apprécier le travail des enseignants.
10. Dans l'ouvrage déjà cité, Dewey exprime la double nécessité et la possibilité de puiser la matière de la recherche dans l'expérience intime du métier et de s'en détacher assez pour dominer les problèmes. Il écrit (p. 202) : « Il n'y a pas toutefois incompatibilité entre le fait que l'occasion de la réflexion réside dans une participation personnelle à ce qui se passe et le fait que la valeur de la réflexion consiste à se tenir en dehors des données. La difficulté presque insurmontable de parvenir à ce détachement est la preuve que la pensée a son origine dans des situations où le cours de la pensée fait réellement partie du cours des événements et est destiné à en influencer le résultat. Ce n'est que peu à peu, en même temps que s'élargit le champ de notre vision grâce à l'accroissement de notre sens social, que la pensée se développe jusqu'à inclure ce qui se trouve au delà de nos intérêts immédiats (Dewey souligne) – fait dont l'importance est grande pour l'éducation. »

Chap. XIV. – Pourquoi s'intéresser à l'histoire des maths ?

Chapitre écrit par Nicolas Rouche, paru dans la revue *Histoire et Enseignement*, sous le titre « Pourquoi s'intéresser à l'histoire de l'enseignement ? » n° 1, 1992, pp. 5 à 8.

1. Les enseignants de mathématiques ont beaucoup écrit ces dernières années sur l'histoire de leur discipline et l'usage qu'ils en font dans leurs classes. Pour en savoir pratiquement un peu plus et découvrir une bibliographie du sujet, on se reportera utilement à l'ouvrage suivant : BARBIN, E., Lyon, 1988.

Bibliographie

APOLLONIUS, *Les Coniques*, trad. P. Ver Eecke, Desclée-De Brouwer, Bruges, 1923.

BARBIN, E., (éd.), « Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques », *Bulletin Inter-IREM d'Épistémologie*, 334 p., Lyon, 1988.

BARUK, S., *Échec et Maths*, Seuil, Paris, 1973.

BARUK, S., *Fabrice ou l'École des maths*, Seuil, Paris, 1977.

BARUK, S., *L'Âge du capitaine*, *de l'erreur en mathématiques*, Seuil, Paris, 1985.

BELL, A., « What does research say about teaching methods in mathematics ? » *Shell Centre for Mathematical Education*, Nottingham, 1980, p. 26.

BENBOW, C. P., STANLEY, J.-C., « Sex differences in mathematical ability : fact or artifact, *Science 210*, 1980, pp. 1262 à 1264.

BERNARD, P., « L'Enseignement des maths va-t-il tuer les maths ? », *Le Monde*, 13-10-1988.

BERNARD, P., « Les « Matheux » n'ont pas la cote », *Le Monde*, 12-1-1989.

BKOUCHE, R., CHARLOT, B., et ROUCHE, N., *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, A. Colin, Paris, 1991.

BOURBAKI, N., *Éléments de mathématique*, Livre 1, Hermann, Paris, 3e éd.,1958.

BOURBAKI, N., « L'Architecture des mathématiques », dans F. Le Lyonnais (éd.), *Les Grands Courants de la pensée mathématique*, Cahiers du Sud, 1948.

BOURDIEU, P., CHAMBOREDON, J.-CL., PASSERON, J.-CL., *Le Métier de sociologue*, Mouton, 4e éd., Berlin, 1983, pp. 246 à 252.

CHABERT, J.-L., (ouvrage collectif sous la direction de), *Histoires d'algorithmes*, Belin, 1994.

CHARLOT, B., « Je serai ouvrier comme papa, alors à quoi ça me sert d'apprendre ? », dans l'ouvrage collectif du G. F. E. N., 1982.

CHARLOT, B., « Les Contenus non mathématiques dans l'enseignement des mathématiques », *Cahiers Galilée 42*, 1978, pp. 5 à 9.

COENRAETS, P., JANSSENS, R., *Mathématique 6*, De Boeck, Bruxelles, 1976.

ERMEL, *Apprentissages numériques à l'école élémentaire*, Éd. Sermap Hatier.
Collectif, *Le Matin des mathématiciens (entretiens sur l'histoire des mathématiques présenté par E. Noël)*, Éd. Belin – France Culture, 1987.

COLLETTE, J. P., *Histoire des mathématiques*, Éd. du Renouveau pédagogique, Montréal (Québec), 1973.

DAVIS, P. J., et HERSH, R., *L'Univers mathématique*, Gauthier-Villars, Paris, 1985.

DAVIS, P. J., HERSH, R., *L'Empire mathématiqu*e, Gauthier-Villars, Paris, 1988.

DE LANGE, J., *Mathematics, insight and meaning*, OW and OC, Utrecht, 1987.

DESCARTES, R., *Discours de la méthode*, 1637.

DEWEY, J., *Démocratie et Éducation*, trad. G. Deledalle, rééd. A. Colin 1990, 1re éd. anglaise 1916.

DIEUDONNÉ, J., « Le Point de vue du mathématicien concernant la place du calcul dans la mathématique d'aujourd'hui », *Nico, 2*, 1969, pp. 2 à 16.

DUBY, J.-J., « De l'utilité des mathématiques et des mathématiciens », *Bulletin de l'A. P. M. E. P.,* n° 370, août 1989.

ERMEL, collectif, *Apprentissages numériques à l'école élémentaire*, tt. I à III, Sermap – Hatier, Paris.

FREUDENTHAL, H., *Mathematics as an educational task*, Reidel, Dordrecht, 1973.

FREUDENTHAL, H., *Weeding and sowing*, Reidel, Dordrecht, 1978, p. 174.

FURETIÈRE, A., *Dictionnaire universel…,* nouvelle éd., Arnout et Reisnier Leers, La Haye et Rotterdam, 1694.

GALILEI, G., *Il saggiatore*, 1623.

G. F. E. N. (Groupe Français d'Éducation Nouvelle), *Quelles pratiques pour une autre école ?*, Casterman, Tournai, 1982.

GROUPE D'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE, « Lettre du GEM au Groupe Français d'Éducation Nouvelle » (G. F. E. N.), *Dialogue* 54 *bis*, 1985, pp. 10 à 27.

HADAMARD, J., *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine des mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, rééd. 1975.

HILBERT, D., COHN-VOSSEN, S., *Geometry and the imagination*, Chelsea, New York, 1952, (éd. originale 1932).

HILTON, P., PEDERSEN, J., *Build your own polyhedra*, Addison-Wesley, Menlo Park, 1988.

HILTON, P. J., *Le Langage des catégories*, trad. J.-C. Mathys, CEDIC, Paris, 1973.

HUET, S., « L'Empire des paradoxes », *Sciences et Avenir*, novembre 1989.

HUSSET, M.-J., « Rendre les maths plus attrayantes » (entretien avec D. Dacunha-Castelle), *Sciences et Avenir*, novembre 1989.

IFFRAH, G., *Histoire universelle des chiffres* (2 vol.), Robert Laffont (Bouquins), Paris, 1994.

IFFRAH, G., *Les Chiffres ou l'Histoire d'une grande invention*, Robert Laffont, Paris, 1985.

IREM de Bordeaux, « La Multiplication au CE1 », université de Bordeaux, 1985.

IREM de Dijon, « Choses d'algèbre », université de Dijon (groupe d'histoire des mathématiques pour nos élèves), 1981.

IREM de Nancy, « Fragments pour une initiation à l'histoire des sciences », université de Nancy 1, 1993.

JACQUARD, A., *Moi et les Autres, initiation à la génétique*, Seuil, Paris, 1982.

KANFER, S. H., « To conquer fear of counting », *Time*, 30-1-1989.

KLINE , M., *Calculus, an intuitive and physical approach*, J. Wiley, New York, 2e éd. 1977.

KLINE, M., *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, 1972.

LADRIÈRE, J., « Objectivité et réalité en mathématiques », *Dialectica* 20, 1966, pp. 215 à 241.

LAKATOS, I., *Preuves et Réfutations, essai sur la logique de la découverte mathématique*, trad. N. Balacheff et J. M. Laborde, Hermann, Paris, 1984.

LEMAY, F., *Genèse des systèmes de nombres à partir de l'idée de mesure*, 97 p., fac. des sc. de l'éducation, université Laval, Québec, 1974.

LEMAY, F., « Une étude structurale du comptage », Département de didactique, faculté des sciences de l'éducation, université Laval, 1979.

LERAY, P., *Des techniques de la multiplication*, 1980, CEREMO, université catholique de l'Ouest.

LITTRÉ, E., *Dictionnaire de la langue française*, Hachette, Paris, 1878.

MAXWELL, JAMES C., « Conférence inaugurale au King's College de Londres », 1860. Texte original reproduit dans *Am. J. Phys. 47*, 928, 1979.

PASSET, R., « La Politique et le Chaos », *Le Monde diplomatique*, décembre 1989.

ROBERT, P., *Dictionnnaire alphabétique et analogique de la langue française*, Société du Nouveau Littré, Paris, 1963.

ROSE, J., *Le Hasard au quotidien (coïncidences, jeux de hasard, sondages)*, Éd. du Seuil, coll. « Points, Sciences », 1993.