



À la découverte du volume des parallélépipèdes rectangles

Privilégier les images mentales

GEM : Groupe d'Enseignement Mathématique

Groupe fondamental

<http://www.gem-math.be/>

Table des matières

Matériel : Les enfants doivent disposer de cubes de 1cm d'arête, une vingtaine par enfant. La fiche 1 pourrait être réalisée avec des cubes plus grands. Dès la fiche 2, le lien entre la mesure de l'arête et le nombre de cubes sur l'arête ne peut se découvrir aisément qu'en utilisant des cubes de 1cm d'arête. Une fois ce lien maîtrisé, les élèves peuvent utiliser des cubes plus grands (2cm d'arête par exemple) pour faciliter la manipulation. Ils travailleront alors de manière intuitive en agrandissant deux fois les mesures.

Utiliser en fiche 1 des cubes non attachables limite les possibilités de construction.

Cette table des matières présente les différentes fiches et leurs objectifs d'apprentissage.

FICHE 0 : En guise d'introduction 4

FICHE 1 : Trois données numériques pour caractériser un parallélépipède rectangle 6

- *distinguer les parallélépipèdes rectangles des autres solides ;*
- *les caractériser en termes de tranche, couche, d'étage, d'arête... ;*
- *donner du sens à leurs dimensions : longueur, largeur et hauteur.*

**Activité de renforcement : construisons des parallélépipèdes rectangles avec des
Kapas 8**

**FICHE 2 : Trois informations pour construire un parallélépipède rectangle, une information pour
construire un cube..... 9**

- *amener les enfants à faire le lien entre la longueur d'une arête et le nombre de cubes nécessaires pour la construire ;*
- *découvrir que trois informations sont nécessaires pour construire un parallélépipède rectangle déterminé, une seule pour construire un cube ;*
- *comparer des volumes mesurés en nombres de cubes.*

FICHE 3 : Donner du sens aux termes tranche, couche, étage... 11

- *faire varier le nombre de couches et/ou de tranches et en découvrir l'effet sur le volume.*

FICHE 4 : Parallélépipèdes rectangles de même volume, de formes différentes, ... ou pas .. 12

- *prendre conscience que des parallélépipèdes rectangles différents peuvent avoir un même volume ;*
- *repérer des parallélépipèdes rectangles identiques mais positionnés différemment (solides jumeaux) et découvrir ainsi que des trios (L,l,h) différents peuvent caractériser le même parallélépipède rectangle ;*
- *prendre conscience du rôle de la multiplication dans les mesures des volumes des parallélépipèdes rectangles (exercices 3 et 4).*

FICHE 5 : Exprimer un volume en cm³ 15

- *exprimer un volume en unités de volume, ici des cm³ ;*
- *établir le lien entre variation du nombre de couches d'un parallélépipède rectangle et variation d'une dimension du parallélépipède rectangle ;*
- *percevoir le rôle des couches ou des tranches dans la mesure du volume (suite fiche 3).*

FICHE 6 : Doubler un volume : quel impact sur ses dimensions ? 17

- *établir l'effet produit sur les dimensions d'un parallélépipède rectangle lorsque l'on en varie (par multiplication ou fractionnement) le volume.*

Exercices d'entraînement : à réaliser avec des cubes sous la main !..... 19

FICHE 7 : Focus sur des parallélépipèdes particuliers : les cubes 21

- *établir l'effet produit sur les dimensions d'un cube lorsque l'on en varie les dimensions (multiplication ou fractionnement).*

FICHE 8 : Établir la formule pour dénombrer le vu et le caché..... 22

- *déterminer le volume d'un parallélépipède rectangle par calcul ;*
- *établir la formule de volume des parallélépipèdes rectangles.*

FICHE 9 : Utiliser la formule avec bon sens..... 25

Exercices supplémentaires 26

FICHE 0 : En guise d'introduction

L'objet premier de ce fichier d'activités est de donner du sens aux composantes de la formule de volume des parallélépipèdes rectangles. Les élèves sont ainsi amenés à se construire petit à petit, des images mentales fortes des parallélépipèdes rectangles, de leurs dimensions, et du rôle joué par celles-ci dans la formule. Cette maîtrise imagée des composantes de la formule est essentielle pour résoudre avec bon sens des exercices faisant intervenir des volumes de parallélépipèdes rectangles (exercice 2 de la fiche 9).

Cette suite d'activités n'a pas encore été testée avec un public d'enfants. Si vous avez l'occasion de la tester, n'hésitez pas à communiquer vos observations à l'adresse du sous-groupe GEM fondamental : gem_fondamental @ googlegroups.com

Avant de proposer les activités de ce dossier aux élèves, il nous semble essentiel qu'ils soient confrontés au concept de volume au travers de diverses situations. Ce sera l'occasion pour eux d'évoquer ce concept dans leurs mots. L'enseignant peut ainsi percevoir les représentations initiales des enfants et choisir des activités pour les faire évoluer. Les élèves découvrent les mots nécessaires pour parler de volume.

- Que veut dire « Cet objet est plus volumineux que cet autre » ?
- Comment savoir si cet objet est plus volumineux que tel autre ?
- S'il est plus volumineux, est-ce qu'il est plus lourd ?
- Un objet plus volumineux est-il un objet qui prend plus de place ?
- Que veut dire « Prendre plus de place » ?
- ...

Un premier objectif nous semble important à travailler :

Percevoir que des solides qui ont même volume peuvent avoir des formes différentes.

- Une démarche travaillant cet objectif est décrite dans « Maths et Manips » du CREM, chapitre 5, p111
<https://www.crem.be/publications/mm>

Un second objectif est lié aux représentations initiales des enfants. Que veut dire « Prendre plus de place dans l'espace ? »

Percevoir que certains objets nécessitent beaucoup de place pour être rangés alors que leur volume n'est pas nécessairement plus grand. Travailler pour cela avec des solides de forme complexe, souvent non convexes.

Enfin, avant d'aborder les différentes activités de ce dossier, il est nécessaire que les élèves aient effectué des mesurages de volumes avec divers étalons non conventionnels.

Il est à noter que nous avons choisi de centrer ce fichier sur les volumes d'assemblages de cubes. Nous ne traiterons pas de volumes intérieurs de boîtes ou autres contenants.

FICHE 1 : Trois données numériques pour caractériser un parallélépipède rectangle

OBJECTIFS

- Distinguer les parallélépipèdes rectangles des autres solides ;
- les caractériser en termes de tranche, couche, étage, arête...
- donner du sens à leurs dimensions : longueur, largeur et hauteur.

NOTE MÉTHODOLOGIQUE

On veut faire découvrir qu'il y a de multiples solides ayant un même volume et que parmi eux, certains ont plus de régularités que d'autres : les parallélépipèdes rectangles. A ce stade, on laissera le débat ouvert quant à la distinction entre les « solides jumeaux » (exemple : un solide de hauteur 2 cubes, largeur 3 cubes et longueur 2 cubes est le jumeau de celui de hauteur 3 cubes, largeur 2 cubes et longueur 2 cubes).

Dans ce fichier les termes « longueurs » et « largeurs » ne sont pas figés de telle sorte que la longueur pourrait être inférieure à la largeur. En effet lorsque l'on fait varier les dimensions d'un parallélépipède rectangle, il arrive que la largeur devienne plus longue que la longueur (fiche 4, fiche 6, ...).

1. Inventez le plus possible d'assemblages avec 12 cubes (les cubes doivent se toucher de façon à ce que au moins une face d'un cube couvre complètement une face d'un autre cube).

Présentez-les sur la table d'exposition. Si c'est une nouvelle forme, laissez-la sur la table.

Note : si deux assemblages ont la même forme mais que l'enfant ne l'a pas remarqué, les laisser sur la table.

2. Comparez vos différentes constructions pour rassembler celles qui se ressemblent au niveau de la forme ; expliquez vos critères de choix.

3. Y a-t-il des assemblages qui ressemblent aux boîtes qu'on voit souvent autour de soi ? Les regrouper.

4. Comment les distinguer entre elles ?

Note : à ce moment tout dépendra des acquis des enfants :

- soit il s'agira de se remémorer ce qui les distingue entre eux, c'est-à-dire les longueurs de leurs arêtes, des trios longueur, largeur, hauteur ;

- soit il s'agira d'une introduction au concept de parallélépipède rectangle. On observe alors que ce qui permet d'en reconnaître un parmi d'autres est de citer le nombre de cubes sur chaque arête (3 cubes en hauteur sur 2 cubes en largeur sur 2 cubes en longueur).

5. Dictée de parallélépipèdes rectangles. Chaque élève possède 20 cubes. Un élève construit un parallélépipède rectangle (maximum 20 cubes). Il le cache aux yeux de la classe. Il va ensuite le décrire pour amener les autres à en reconstruire un à l'identique.

Débriefer en termes d'efficacité de description.

Note : Repérer les termes qui ont aidé à construire l'assemblage. Remarquer la variété des termes possibles, couches, étages, longueurs, hauteurs...

On peut éventuellement reproduire plusieurs fois l'activité en changeant de descripteur.

Vous trouverez sur le site du **GEM** une activité de dictée d'assemblages décrite pour trois niveaux différents (5/8, 8/10 et 10/12). Voici les liens qui y mènent.

<https://wp.gem-math.be/2010/01/01/dicter-un-assemblage-de-cinq-cubes-de-5-a-8-ans/>

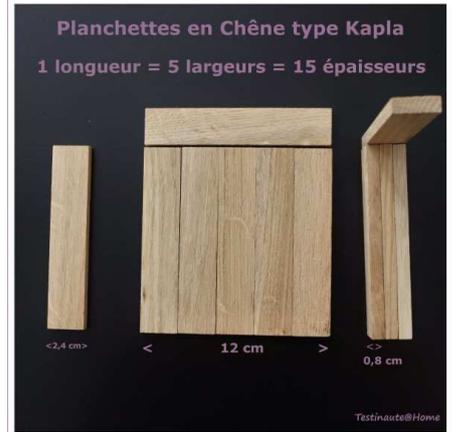
<https://wp.gem-math.be/2011/04/02/dicter-un-assemblage-de-6-cubes/>

<https://wp.gem-math.be/2010/02/13/dicter-un-assemblage-de-cinq-cubes-de-10-a-12-ans/>

Activité de renforcement : construisons des parallélépipèdes rectangles avec des Kaplas¹

OBJECTIFS

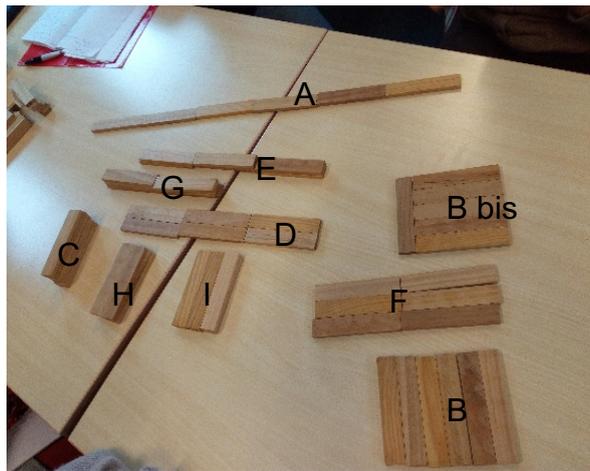
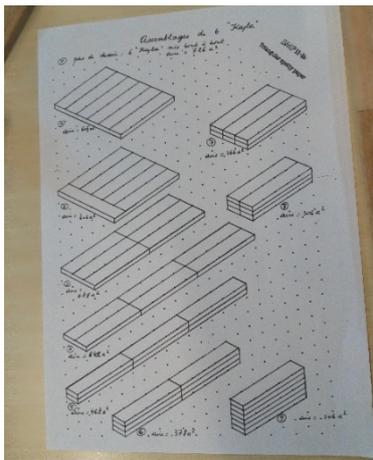
- Construire des parallélépipèdes rectangles ;
- observer que différents parallélépipèdes rectangles qui ont même volume n'ont pas même forme ;
- utiliser le Kapla comme étalon naturel.



CONSIGNE

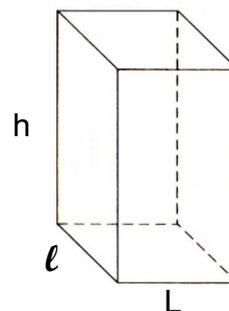
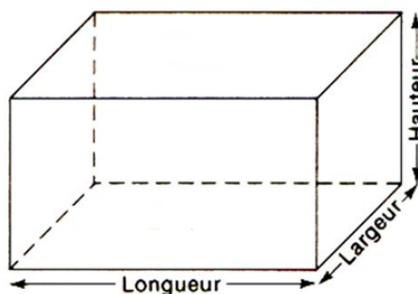
Construire le plus de parallélépipèdes rectangles différents avec 6 Kaplas.

Décider avec les élèves si deux constructions de même forme mais dont les Kaplas sont placés différemment sont comptées comme différentes. Pour notre recherche nous avons décidé de compter comme une seule solution les configurations B et B bis. Pour une même forme nous n'avons pas représenté toutes les dispositions possibles de Kaplas.



Un parallélépipède rectangle est un solide limité par 6 faces rectangulaires.

Il est caractérisé par 3 mesures de longueur : la Longueur, la largeur et la hauteur, notées L , ℓ et h



¹ Si l'activité est menée avec des blocs dont les longueur, largeur et hauteur ne sont pas dans les mêmes rapports que ceux des Kaplas, les élèves ne pourront obtenir toutes ces solutions.

FICHE 2 : Trois informations pour construire un parallélépipède, une information pour construire un cube.

OBJECTIFS

- Amener les enfants à faire le lien entre la longueur d'une arête et le nombre de cubes nécessaires pour la construire ;
- découvrir que trois informations sont nécessaires pour construire un parallélépipède rectangle déterminé, une seule pour construire un cube ;
- comparer des volumes mesurés en nombres de cubes.

Les élèves sont groupés par 4. Voici quatre solides à construire par le groupe en vue de les comparer. Chaque élève en construit un.

1. Un **parallélépipède rectangle A** qui a une longueur de 3 cm, une largeur de 2 cm et une hauteur de 4 cm.
2. Un **parallélépipède rectangle B** qui a une longueur de 4 cm, une largeur de 2 cm et une hauteur de 2 cm.
3. Un **cube A** qui a des arêtes de 3 cm.
4. Un **cube B** qui a des arêtes de 2 cm.

Une fois les solides construits :

1. Range les solides depuis le moins volumineux jusqu'au plus volumineux ? Prouve-le.

*Cube A (27 cubes)/ parallélépipède rectangle A (24 cubes)/ parallélépipède rectangle B (16 cubes)/
Cube B (8 cubes)*

2. Y a-t-il un solide dont le volume vaut le double, le triple ou le quadruple d'un autre ? Comment le sais-tu ?

Le volume du parallélépipède A vaut le triple du volume du cube B

Le volume du parallélépipède rectangle B vaut le double du volume du cube B

NOTE MÉTHODOLOGIQUE

Favoriser le débat entre les enfants.

Voici quelques pistes pour aider les enfants à prouver leurs réponses : comparer les silhouettes des parallélépipèdes (plus haut, plus long...) ; comparer le nombre d'étages, de tranches... ; comparer le nombre de cubes.

Amener les élèves à verbaliser le lien entre la mesure de l'arête et le nombre de cubes sur celle-ci et à percevoir le cube comme un parallélépipède dont les longueur, largeur et hauteur sont de même mesure.

Variante : si vous ne disposez pas d'assez de cubes (ou par choix pédagogique), vous pouvez imaginer de demander aux enfants de construire les parallélépipèdes rectangles les uns après les autres. Il est essentiel alors de dire aux enfants qu'après avoir construit les 4 parallélépipèdes rectangles, ils devront les ranger suivant leur volume. Ils peuvent alors prendre des notes après chaque construction.

FICHE 3 : Donner du sens aux termes *tranche, couche, étage*.

OBJECTIF

- Faire varier le nombre de couches et/ou de tranches et en découvrir l'effet sur le volume.

NOTE MÉTHODOLOGIQUE

La construction des solides assure l'image mentale et facilite la verbalisation.

Veillez à ce que les élèves expriment leurs réponses en termes de couches, tranches ou étages. Par exemple, à l'exercice 2, il y a un étage en moins qu'à l'exercice 1. Chaque étage est composé de 10 cubes.

Cette étape est indispensable pour permettre à tous les élèves de donner du sens aux composantes de la formule (fiche 5).

1. Construis un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont :

$$L = 5 \text{ cm}, \ell = 2 \text{ cm}, h = 3 \text{ cm}$$

Combien de cubes ont-ils été nécessaires ? **30** ...

2. Si je voulais construire un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont :

$$L = 5 \text{ cm}, \ell = 2 \text{ cm}, h = 2 \text{ cm}$$

Combien de cubes doit-on enlever au parallélépipède rectangle de l'exercice n°1 ? **10**

Explique comment tu as trouvé ce nombre.

Vérifie en construisant ce parallélépipède.

3. Si je voulais construire un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont :

$$L = 5 \text{ cm}, \ell = 2 \text{ cm}, h = 4 \text{ cm}$$

Combien de cubes doit-on ajouter au parallélépipède rectangle de l'exercice n°2 ? **20**

Explique comment tu as trouvé ce nombre.

Vérifie en construisant ce parallélépipède.

4. Si je voulais construire un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont :

$$L = 6 \text{ cm}, \ell = 2 \text{ cm}, h = 4 \text{ cm}$$

Combien de cubes doit-on ajouter au parallélépipède rectangle de l'exercice n°3 ? **8** ...

Explique comment tu as trouvé ce nombre.

Vérifie en construisant ce parallélépipède.

FICHE 4 : Parallélépipèdes rectangles de même volume, de forme différente, ... ou pas

OBJECTIFS

- Prendre conscience que des parallélépipèdes rectangles différents peuvent avoir un même volume.
- repérer des parallélépipèdes rectangles identiques mais positionnés différemment (solides jumeaux) et découvrir ainsi que des trios (L, ℓ, h) différents peuvent caractériser le même parallélépipède rectangle.
- prendre conscience du rôle de la multiplication dans les mesures des volumes des parallélépipèdes rectangles (exercices 3 et 4)

NOTE MÉTHODOLOGIQUE

Après l'exercice 1, ouvrir la discussion sur les différentes réponses possibles :

$L = 4 \text{ cm}$, $l = 2 \text{ cm}$, $h = 1 \text{ cm}$ est-ce pareil que $L = 1 \text{ cm}$, $l = 4 \text{ cm}$, $h = 2 \text{ cm}$?

La convention habituellement adoptée d'appeler longueur le plus grand côté d'un rectangle limiterait ici la recherche. Oui, ces 2 suites de mesures caractérisent des parallélépipèdes rectangles identiques, ils sont simplement dans des positions différentes.

1. Construis le plus de parallélépipèdes rectangles possibles avec exactement 8 cubes.

Quelles sont leurs dimensions ? Indique-les dans le tableau ci-dessous.

L	ℓ	h
4 cm	2 cm	1 cm
4 cm	1 cm	2 cm
2 cm	2 cm	2 cm
2 cm	4 cm	1 cm
2 cm	1 cm	4 cm
1 cm	4 cm	2 cm
1 cm	2 cm	4 cm
1 cm	1 cm	8 cm
1 cm	8 cm	1 cm
8 cm	1 cm	1 cm

Est-ce possible de construire un cube ? *Oui*
.....

Si oui, quelles sont ses dimensions ? *Un cube de 2 cm d'arête.*

2. Construis tous les parallélépipèdes rectangles différents avec 24 cubes.

Quelles sont leurs dimensions ?

L	ℓ	h
1 cm	1 cm	24 cm
1 cm	2 cm	12 cm
1 cm	3 cm	8 cm
1 cm	4 cm	6 cm
2 cm	2 cm	6 cm
2 cm	3 cm	4 cm

Est-ce possible de construire un cube ? *Non*

Si oui, quelles seront ses dimensions ?

3. Imagine combien de parallélépipèdes rectangles différents peuvent être construits avec 17 cubes.

Un seul.....

Comment es-tu certain que tu les as tous ?

Pour réaliser un parallélépipède rectangle il faut organiser les 17 cubes en couches contenant chacune le même nombre de cubes. Comme 17 n'a comme seuls diviseurs que lui-même et 1, on peut construire une couche de 17 cubes ou 17 couches de 1 cube. On obtient le même parallélépipède rectangle de dimensions 17 x 1 x 1.

Quelles sont leurs dimensions ?

17 cm sur 1 cm sur 1 cm
.....

Est-ce possible de construire un cube ? *Non*

Si oui, quelles seront ses dimensions ?

NOTE MÉTHODOLOGIQUE

Comme 17 est un nombre premier, il y a une seule factorisation possible en trois facteurs (17 x 1 x 1), contrairement à tous les cas précédents. Il est important de souligner le contraste. Il est également intéressant de faire émerger les constats suivants : un nombre plus grand ne fournit pas

nécessairement plus de parallélépipèdes rectangles différents et il n'est pas toujours possible de construire un grand cube.

Et pour aller plus loin ...

4. Quel est le nombre minimum de petits cubes nécessaires pour construire un cube plus grand que celui de l'exercice 1 ?

Le cube de l'exercice 1 de 2cm d'arête nécessitait 8 cubes.

Le suivant, de 3cm d'arête nécessite 27 cubes.

NOTE MÉTHODOLOGIQUE

On peut ainsi faire apparaître que la construction d'un grand cube ne sera possible que pour les nombres qui peuvent s'écrire comme $n \times n \times n$ (ou n^3). Exemples : $8 = 2 \times 2 \times 2$ ou $27 = 3 \times 3 \times 3$

5. Trouve un nombre de cubes avec lequel il est possible de construire exactement 4 parallélépipèdes différents en utilisant chaque fois tous les cubes. Trouve d'autres nombres de cubes qui donnent ce même résultat !

Deux exemples :

12 cubes : $12 \times 1 \times 1$, $3 \times 4 \times 1$, $2 \times 6 \times 1$, $2 \times 2 \times 3$

20 cubes : $20 \times 1 \times 1$, $4 \times 5 \times 1$, $2 \times 10 \times 1$, $2 \times 2 \times 5$

Tous les parallélépipèdes rectangles construits avec le même nombre de petits cubes, même s'ils ont des formes différentes, prennent la même place dans l'espace, qu'on appelle **volume** du parallélépipède.

Pour mesurer des longueurs, on peut utiliser comme étalon le « cm ». 

Pour mesurer des aires, on peut utiliser comme étalon un carré d'1 cm de côté, le « cm² ». 

Pour mesurer le volume d'un solide, on peut utiliser comme étalon un cube d'1 cm d'arête, le « cm³ ». 

Donc, le nombre de cubes de 1 cm d'arête utilisés pour construire un solide donne la mesure du volume de ce solide en cm³.

Le parallélépipède rectangle construit avec 12 de ces cubes a un volume de 12 cm³.

FICHE 5 : Exprimer un volume en cm^3

OBJECTIFS

- Exprimer un volume en unités de volume, ici des cm^3 ;
- établir le lien entre variation du nombre de couches d'un parallélépipède rectangle et variation d'une dimension du parallélépipède rectangle ;
- percevoir le rôle des couches ou des tranches dans la mesure du volume (suite fiche 3).

NOTE MÉTHODOLOGIQUE

L'objectif de cette fiche est de faire le lien entre la notion de volume et le comptage des cubes unités nécessaires à la construction d'un volume. Le fait de partir d'une construction dont on donne les mesures, met déjà en place le lien entre la **mesure d'un côté** et le **nombre de cubes présents sur ce côté**. La question 1B établit le lien dans l'autre sens. On établit également ce lien en proposant des exercices de variation de volume par ajout ou retrait de couches, formulés également en termes de mesures.

1 A. Construis un parallélépipède rectangle qui a une longueur de 4 cm, une largeur de 2 cm et une hauteur de 1 cm. Quel est son volume ? Note ta réponse en cm^3 8 cm^3

1 B. Construis un cube qui a le même volume. Combien mesurent ses arêtes ? 2 cm

2 A. Construis un parallélépipède rectangle qui a une longueur de 5 cm, une largeur de 2 cm et une hauteur de 3 cm. Quel est son volume en cm^3 ? 30 cm^3

2 B. Quel serait le volume d'un parallélépipède rectangle qui serait celui de l'exercice 2 A, auquel on aurait ajouté une couche (un étage) de cubes ? 40 cm^3

Vérifie en construisant ce parallélépipède rectangle. Combien de cubes as-tu rajoutés ? 10

Quelles sont les dimensions de ce nouveau parallélépipède rectangle ? $5 \text{ cm sur } 2 \text{ cm sur } 4 \text{ cm}$

2 C. Quel serait le volume d'un parallélépipède rectangle qui serait celui de l'exercice 2 A, dont on aurait allongé la longueur d'un cm ? 36 cm^3

Vérifie en construisant ce parallélépipède rectangle. Combien de cubes as-tu rajoutés ? 6

Quelles sont les dimensions de ce nouveau parallélépipède rectangle ? $6 \text{ cm sur } 2 \text{ cm sur } 3 \text{ cm}$

2 D. Quel serait le volume d'un parallélépipède rectangle qui serait celui de l'exercice 2 A, auquel on aurait retiré deux couches (deux étages) de cubes ? *10 cm³*

Vérifie en construisant ce parallélépipède rectangle. Combien de cubes as-tu retirés ? *20*

Quelles sont les dimensions de ce nouveau parallélépipède rectangle ? *5 cm sur 2 cm sur 1 cm*

2 E. Quel serait le volume d'un parallélépipède rectangle qui serait celui de l'exercice 2 A, dont on aurait diminué la longueur de trois cm ? *12 cm³*

Vérifie en construisant ce parallélépipède rectangle. Combien de cubes as-tu retirés ? *18*

Quelles sont les dimensions de ce nouveau parallélépipède rectangle ? *2 cm sur 2 cm sur 3 cm*

FICHE 6 : Doubler un volume : quel impact sur ses dimensions ?

OBJECTIF

Établir l'effet produit sur les dimensions d'un parallélépipède rectangle lorsque l'on en varie (par multiplication ou fractionnement) le volume.

NOTE MÉTHODOLOGIQUE

Comme plusieurs résultats sont possibles, l'intérêt de cette fiche sera de les comparer et surtout de partager les stratégies qui les ont amenés. Ce partage a également pour objectif de trouver toutes les solutions possibles, de les structurer dans un tableau pour pouvoir observer les effets sur les trois dimensions.

Questions de relance

Est-ce qu'on pourrait trouver d'autres solutions ? Comment organiser toutes les solutions dans un tableau ?

Un lien pourra être réalisé avec la décomposition multiplicative de nombres.

Voici un exemple de tableau pour l'exercice 2. Il a été construit pour mettre en évidence les variations de longueur. Par exemple, dans la deuxième ligne, placer le 10cm en dessous du 5 cm montre bien la longueur multipliée par 2 :

L	ℓ	h	Volume
5cm	2cm	1cm	10cm ³
10cm	2cm	1cm	20cm ³
5cm	4cm	1cm	20cm ³
5cm	2cm	2cm	20cm ³
20cm	1cm	1cm	20cm ³

Volume doublé

1. Construis un parallélépipède rectangle qui a une longueur de 5 cm, une largeur de 2 cm et une hauteur de 1 cm. Quel est son volume ? 10 cm^3

2. Construis un parallélépipède rectangle dont le volume est le double de celui construit à l'exercice 1. Quelles sont ses dimensions (L, ℓ, h) ? *Par exemple : L = 10 cm ; ℓ = 2 cm ; h = 1 cm*

Trouve d'autres possibilités. Compare-les avec les dimensions du parallélépipède rectangle de l'exercice 1.

Organise tes résultats (L, ℓ , h et le volume) dans un tableau et fais apparaître les liens entre les différentes lignes du tableau. *Un exemple de tableau d'organisation est donné à la page précédente.*

Et pour aller plus loin...

3. Construis un parallélépipède rectangle dont le volume vaut les $\frac{3}{4}$ de ceux construits à l'exercice 2.

Quelles sont ses dimensions ? *...Par exemple : 5 cm sur 3 cm sur 1 cm*

Mêmes questions qu'au point 2.

Voici trois exemples de tableaux d'organisation, au départ du parallélépipède rectangle de dimensions 5 cm, 2 cm et 2cm, de celui de dimensions 10 cm, 2 cm et 1 cm et de celui de dimensions 5 cm, 4 cm et 1 cm.

L	ℓ	h	Volume
5cm	2cm	2cm	20cm ³
15cm	1cm	1cm	15cm ³

$\frac{3}{4}$ du volume

L	ℓ	h	Volume
10cm	2cm	1cm	20cm ³
5cm	1cm	3cm	15cm ³

$\frac{3}{4}$ du volume

L	ℓ	h	Volume
5cm	4cm	1cm	20cm ³
15cm	1cm	1cm	15cm ³

$\frac{3}{4}$ du volume

NOTE MÉTHODOLOGIQUE

Attention, le choix des dimensions des parallélépipèdes rectangles à comparer peut complexifier les liens à établir. C'est à l'enseignant de « choisir » la difficulté en fonction des interventions de ses élèves.

L	ℓ	h	Volume
5cm	2cm	2cm	20cm ³
	1cm		
5cm	3cm	1cm	15cm ³

$\frac{3}{4}$ du volume

Exercices d'entraînement : à réaliser avec des cubes sous la main !

Les exercices présentés ci-dessous permettent de vérifier si les objectifs des fiches précédentes sont atteints. Il est essentiel que les enfants disposent de cubes pour réaliser leurs constructions.

Pour les exercices 1B, 2B, 3B et 4B, plusieurs solutions existent. Nous vous en indiquons une en exemple.

1 A. Construis un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont :

L = 3 cm, ℓ = 2 cm, h = 2 cm. Combien de cm³ ont-ils été nécessaires ? **12**

Quel est son volume en cm³ ? **12 cm³**

1 B. Construis un parallélépipède rectangle dont le volume est le triple de celui de l'exercice 1A.

Combien de cubes de 1 cm d'arête as-tu placés sur chaque arête ?

Sur la longueur : **9** cubes Sur la largeur = **2** cubes Sur la hauteur = **2** cubes

Quelles sont les dimensions de ton parallélépipède rectangle ?

L = **9 cm** ℓ = **2 cm** h = **2 cm**

Trouve une autre solution

L = **3 cm** ℓ = **2 cm** h = **6 cm**

2 A. Construis un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont :

L = 6 cm, ℓ = 2 cm, h = 3 cm. Combien de cm³ ont-ils été nécessaires ? **36**

Quel est son volume en cm³ ? **36 cm³**

2 B. Construis un parallélépipède rectangle dont le volume est la moitié de celui de l'exercice 2A.

Combien de cubes de 1 cm d'arête as-tu placés sur chaque arête ?

Sur la longueur : **3** cubes Sur la largeur = **2** cubes Sur la hauteur = **3** cubes

Quelles sont les dimensions de ton parallélépipède rectangle ?

3 cm **2 cm** **3 cm**

$$\underline{L} = \dots\dots \quad \underline{\ell} = \dots\dots \quad \underline{h} = \dots\dots$$

Trouve une autre solution.

$$\underline{L} = \underline{6 \text{ cm}} \quad \underline{\ell} = \underline{1 \text{ cm}} \quad \underline{h} = \underline{3 \text{ cm}}$$

3 A. Construis un parallépipède rectangle dont les dimensions sont :

$$L = 8 \text{ cm}, \ell = 3 \text{ cm}, h = 2 \text{ cm}. \text{ Combien de cm}^3 \text{ ont-ils été nécessaires ? } \underline{48} \dots\dots$$

$$\text{Quel est son volume en cm}^3 \text{ ? } \underline{48 \text{ cm}^3} \dots\dots$$

3 B. Construis un parallépipède rectangle dont le volume est le quart de celui de l'exercice 3A.

Combien de cubes de 1 cm d'arête as-tu placés sur chaque arête ?

$$\text{Sur la longueur : } \underline{4} \dots\dots \text{ cubes} \quad \text{Sur la largeur = } \underline{3} \dots\dots \text{ cubes} \quad \text{Sur la hauteur = } \underline{1} \dots\dots \text{ cubes}$$

Quelles sont les dimensions de ton parallépipède rectangle ?

$$L = \underline{4 \text{ cm}} \quad \ell = \underline{3 \text{ cm}} \quad h = \underline{1 \text{ cm}}$$

Trouve une autre solution.

$$L = \underline{2 \text{ cm}} \quad \ell = \underline{3 \text{ cm}} \quad h = \underline{2 \text{ cm}}$$

4 A. Construis un parallépipède rectangle dont les dimensions sont :

$$\underline{L} = 6 \text{ cm}, \underline{\ell} = 2 \text{ cm}, \underline{h} = 3 \text{ cm}. \quad \text{Combien de cm}^3 \text{ ont-ils été nécessaires ? } \underline{36} \dots\dots$$

$$\text{Quel est son volume en cm}^3 \text{ ? } \underline{36 \text{ cm}^3} \dots\dots$$

4 B. Construis un parallépipède rectangle dont le volume est le tiers de celui de l'exercice 4A.

Combien de cubes de 1 cm d'arête as-tu placés sur chaque arête ?

$$\text{Sur la longueur : } \underline{2} \dots\dots \text{ cubes} \quad \text{Sur la largeur = } \underline{2} \dots\dots \text{ cubes} \quad \text{Sur la hauteur = } \underline{3} \dots\dots \text{ cubes}$$

Quelles sont les dimensions de ton parallépipède rectangle ?

$$L = \underline{2 \text{ cm}} \quad \ell = \underline{2 \text{ cm}} \quad h = \underline{3 \text{ cm}}$$

Trouve une autre solution.

$$L = \underline{6 \text{ cm}} \quad \ell = \underline{2 \text{ cm}} \quad h = \underline{1 \text{ cm}}$$

FICHE 7 : Focus sur des parallélépipèdes particuliers : les cubes

OBJECTIF

- Établir l'effet produit sur les dimensions d'un cube lorsque l'on en varie les dimensions (multiplication ou fractionnement).

1. Construis un cube de 2 cm d'arête.

Les dimensions du cube sont : $L = 2 \text{ cm}$ $\ell = 2 \text{ cm}$ $h = 2 \text{ cm}$

Le volume du cube est :⁸..... cm^3

2. Au départ de ce cube, si tu doubles les arêtes de ce cube, que deviennent,

Les dimensions du cube : $L = 4 \text{ cm}$ $\ell = 4 \text{ cm}$ $h = 4 \text{ cm}$

Le volume du cube :⁶⁴..... cm^3

3. Reprends ton premier cube. Si tu triples l'arête, que deviennent,

Les dimensions du cube : $L = 6 \text{ cm}$ $\ell = 6 \text{ cm}$ $h = 6 \text{ cm}$

Le volume du cube :²¹⁶..... cm^3

4. Imagine un cube de 4 cm d'arête.

Les dimensions du cube : $L = 4 \text{ cm}$ $\ell = 4 \text{ cm}$ $h = 4 \text{ cm}$

Le volume du cube :⁶⁴..... cm^3

5. Imagine le cube de 4cm d'arête. Divise chaque arête par deux.

Les nouvelles dimensions du cube : $L = 2 \text{ cm}$ $\ell = 2 \text{ cm}$ $h = 2 \text{ cm}$

Le volume du cube :⁸..... cm^3

NOTE MÉTHODOLOGIQUE

Volontairement nous avons choisi de conserver les notations de longueur (L), largeur (ℓ) et hauteur (h), pour que les enfants perçoivent le cube comme un parallélépipède rectangle particulier.

FICHE 8 : Établir la formule pour dénombrer le vu et le caché

OBJECTIFS

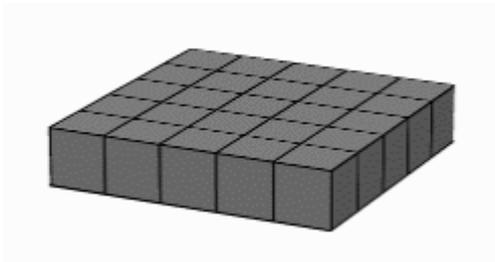
- Déterminer le volume d'un parallépipède rectangle par calcul ;
- établir la formule de volume des parallépipèdes rectangles.

1.

a/ Combien de cubes de 1cm d'arête contient chacun de ces parallépipèdes rectangles ?

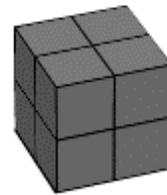
b/ Quel est le volume en cm^3 de chacun de ces parallépipèdes rectangles ?

A



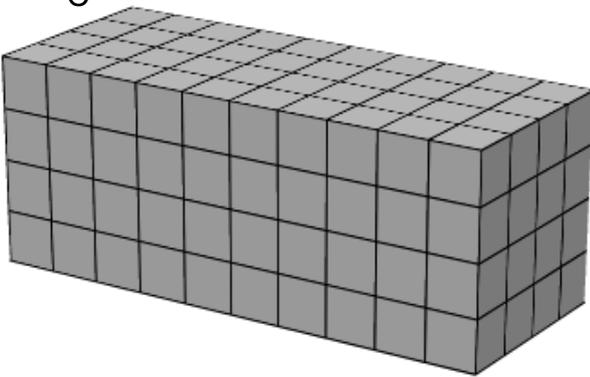
a/ 25 cubes b/ 25 cm^3

B



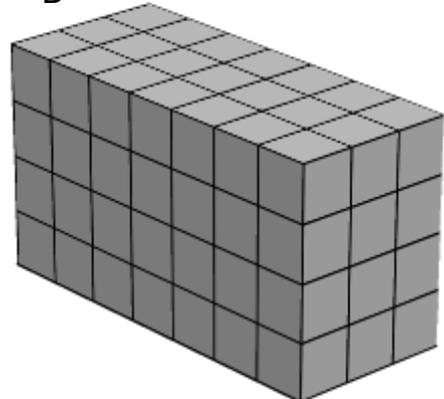
a/ 8 cubes b/ 8 cm^3

C



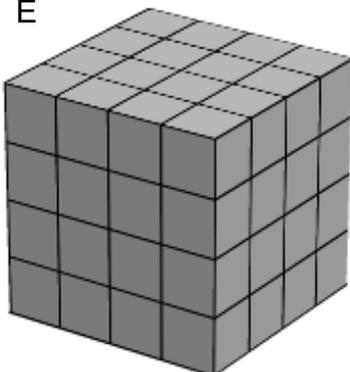
a/ 160 cubes b/ 160 cm^3

D



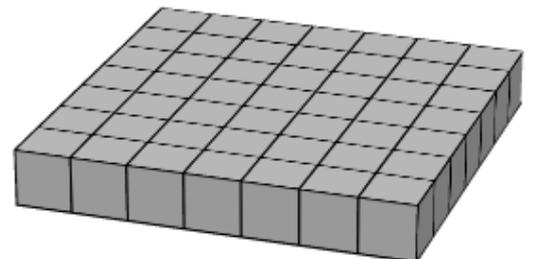
a/ 84 cubes b/ 84 cm^3

E

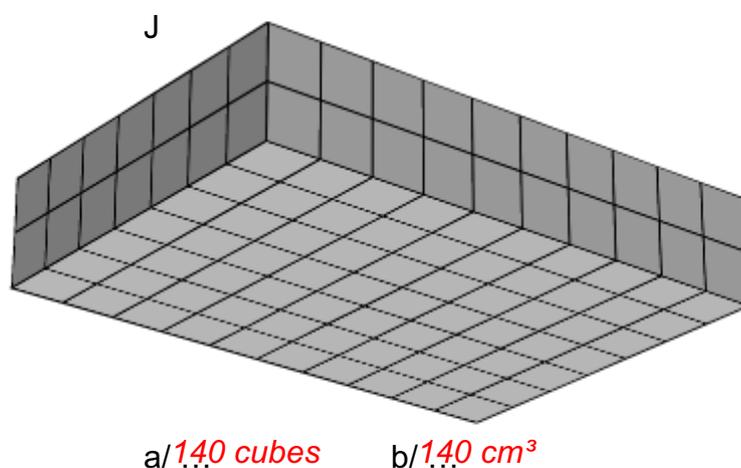
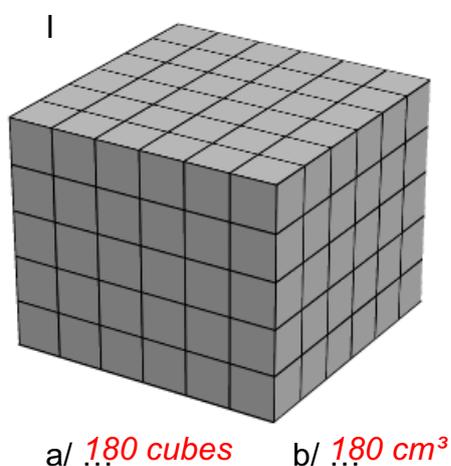
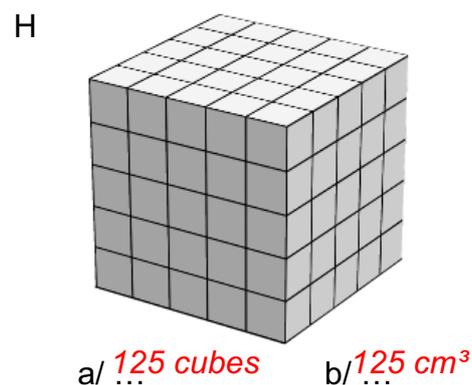
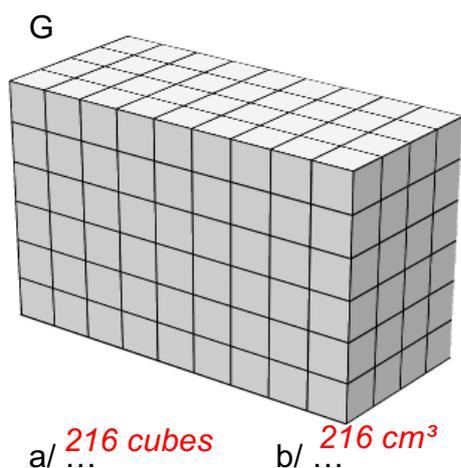


a/ 64 cubes b/ 64 cm^3

F



a/ 49 cubes b/ 49 cm^3



NOTE MÉTHODOLOGIQUE

Proposer aux élèves de comparer leurs stratégies et d'expérimenter celles des autres élèves pour en dégager une plus efficace.

Les élèves doivent passer par le comptage pour se rendre compte du risque d'erreur et du caractère fastidieux. On espère qu'ils seront motivés à prendre un raccourci, à utiliser un calcul.

Les élèves qui ressentent le besoin de manipuler peuvent utiliser des cubes. Il sera cependant intéressant qu'il n'y ait pas assez de cubes pour que l'élève soit obligé de voir les cubes dans sa tête, d'extrapoler la suite du comptage en imaginant un calcul.

Si les enfants le demandent, autoriser la calculatrice pour que le calcul ne soit pas un frein à l'apprentissage.

Différentes stratégies sont possibles pour arriver au nombre de cm^3 présents dans un parallélépipède rectangle. Voici quelques formulations qui vont mener à la découverte de la formule de volume de celui-ci.

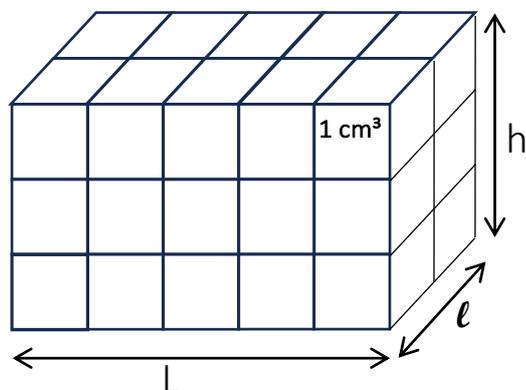
Cette formule peut elle-même être exprimée de diverses façons.

- Je compte le nombre de cubes sur un étage et je multiplie ce nombre par le nombre d'étages.
- Je compte le nombre de cubes sur une arête. Je multiplie ce nombre par le nombre de tranches et enfin par le nombre d'étages.
- Je compte le nombre de cubes sur une rangée ensuite, je compte le nombre de rangées et je multiplie ces deux nombres. Enfin, je multiplie le résultat par le nombre de couches.
- Je compte le nombre de cubes sur la longueur, je multiplie par le nombre de cubes sur la largeur et par le nombre de cube sur la hauteur.
- Pour arriver au calcul suivant pour obtenir le nombre de cm^3 qui composent le solide :

Nombre de cubes sur la longueur	x	Nombre de cubes sur la largeur	x	Nombre de cubes sur la hauteur
Mesure en cm de la longueur	x	Mesure en cm de la largeur	x	Mesure en cm de la hauteur
L	x	ℓ	x	h

La formule s'écrit habituellement sous la forme :

$$L \times \ell \times h \times \text{cm}^3$$



Dans cet exemple

$$L \times \ell \times h \times \text{cm}^3$$

vaut

$$5 \times 2 \times 3 \times \text{cm}^3$$

Si vous souhaitez plus d'informations concernant la construction de la formule de volume du parallélépipède rectangle, nous vous invitons à consulter le Tome 1 de *Comprendre les Maths pour bien les enseigner*, pp. 268 et 269 (Voir référence complète en page 28)¹.

FICHE 9 : Utiliser la formule avec bon sens

Exercice 1 : J'ai reçu 5 poissons adultes d'environ 5 cm chacun. Je souhaite acheter un aquarium bien adapté. Un spécialiste m'a indiqué que la place minimum nécessaire pour mes 5 poissons est de 25 000 cm³.

Chez le vendeur je peux choisir entre les tailles suivantes :

Aquarium/ <i>Volume</i>	Longueur	Largeur	Hauteur
Cube / <i>17820 cm³</i>	30 cm	27 cm	22 cm
Studio / <i>20000 cm³</i>	40 cm	20 cm	25 cm
Villa / <i>45000 cm³</i>	60 cm	25 cm	30 cm
Hôtel / <i>96000 cm³</i>	80 cm	30 cm	40 cm

Choisis parmi ces aquariums ceux qui pourraient convenir. Explique ta démarche pour déterminer si un aquarium convient.

Les aquariums Villa et Hôtel conviennent.

Exercice 2

Je voudrais ranger des cubes de 5 cm d'arête dans une grande caisse de 43 cm de longueur, 21 cm de largeur et 30 cm de hauteur.

Combien de cubes puis-je y ranger ?

Explique ta démarche.



NOTE MÉTHODOLOGIQUE

Si la formule de volume des parallélépipèdes rectangles est utilisée pour résoudre l'exercice 2, la solution ne sera pas correcte. En effet, si on divise le volume de la caisse par le volume d'un cube (27090 cm³ : 125cm³), on obtient 216,72, qui est le nombre de cubes que la caisse peut « théoriquement » contenir. Dans l'exercice proposé, cela n'a pas des sens car il sera impossible de ranger 216 cubes dans la caisse sans les couper.

Par contre si l'élève s'imagine remplissant la caisse par couche (démarche importante dans la compréhension de la formule), il aboutira à la solution.

32 cubes par couche sur 6 couches. On obtient donc 6 x 32 cubes = 192 cubes

Proposer des cubes si l'élève ne perçoit pas mentalement le remplissage de la caisse.

Exercices supplémentaires

NOTE MÉTHODOLOGIQUE

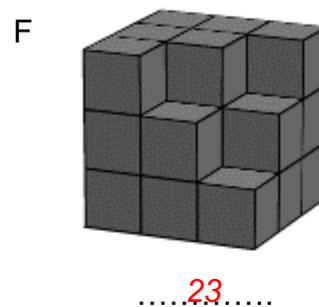
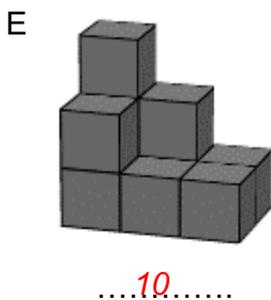
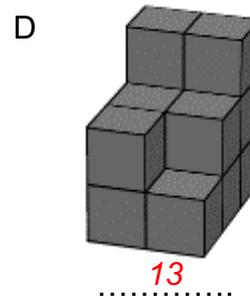
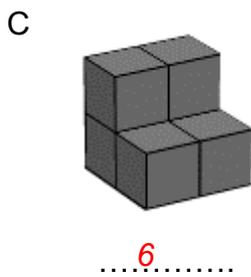
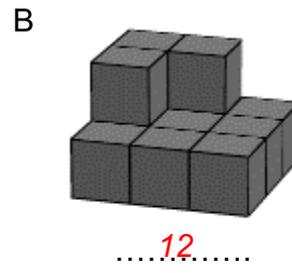
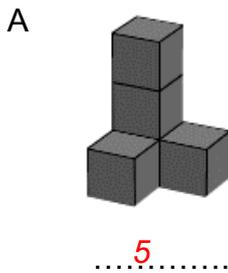
1. Si l'activité est trop difficile pour certains élèves, leur proposer des cubes à assembler.
2. Cette activité peut être réalisée avant ou après avoir découvert la formule de volume des parallélépipèdes rectangles.

Dans ce cas, si l'activité est réalisée avant la découverte de la formule, elle renforce la compréhension du rôle des couches et tranches dans la construction d'un volume.

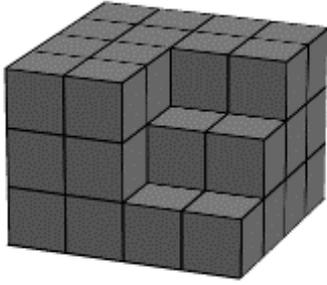
Si l'activité est réalisée après cette découverte, les enfants pourront utiliser la formule comme outil supplémentaire.

Dans les deux cas il est intéressant dans un premier temps de garder comme attente de résultat un nombre de cubes et pas un volume et d'observer si les enfants réalisent eux-mêmes le lien.

1. Combien de cubes contient chaque solide (sachant que les faces arrières sont pleines) ?

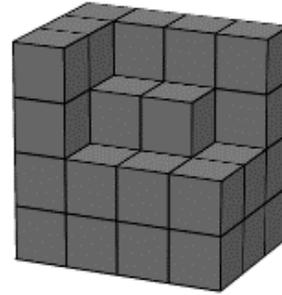


G



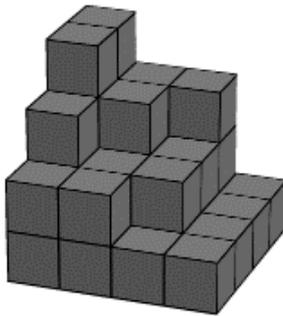
.....42.....

H



.....38.....

I



.....35.....

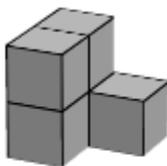
2

a/ Imagine le parallélépipède rectangle le moins volumineux que l'on pourrait construire en complétant le montage proposé. Combien de petits cubes devrais-tu *ajouter* à ceux déjà en place pour l'obtenir ?

b/ Imagine le cube le moins volumineux que l'on pourrait construire en complétant le montage proposé. Combien de petits cubes devrais-tu *ajouter* à ceux déjà en place pour l'obtenir ?

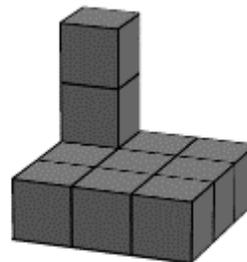
c/ Combien de cubes au minimum faut-il *retirer* au montage pour obtenir un parallélépipède rectangle ?

A



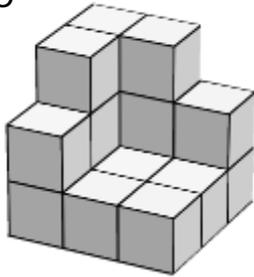
a/ .3.. b/ .3.. c/ .1..

B

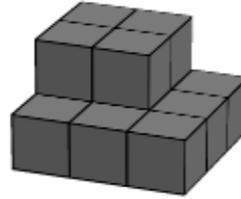


a/ .16. b/ .16. c/ .2..

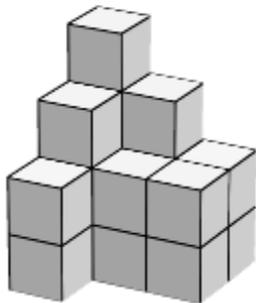
C

a/ **.10** b/ **.10** c/ **.8...**

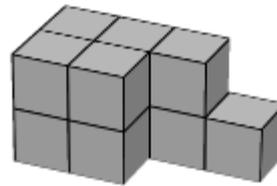
D

a/ **.5...** b/ **.14** c/ **.4...**

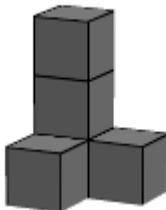
E

a/ **.18** b/ **.46** c/ **.6...**

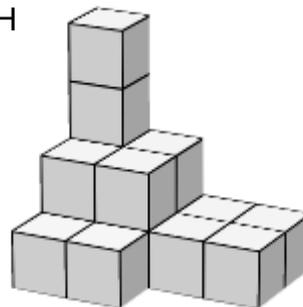
F

a/ **.5...** b/ **.53** c/ **.3...**

G

a/ **.7...** b/ **.22** c/ **.2...**

H

a/ **.32** b/ **.48** c/ **.8...**

¹ F. BARET, C. GERON, C. GOOSSENS, F. LUCAS, C. MOUSSET, M. NOLMANS, C. VAN PACHTERBEKE, P. WANTIEZ, *Comprendre les maths pour bien les enseigner*, Ed De Boeck, 2020
<https://www.vanin.be/fr/methodes/fondamental/mathematiques/comprendre-les-maths/>